

الفصل الأول : مفاهيم أولية

1 تعاريف و توابع خاصة

1.1 التابع جامًا (Gamma) و التابع بيتا (Beta)

1.1.1 تعريف التابع جامًا

2.1.1 تعريف التابع بيتا

3.1.1 علاقة التابع بيتا بالتابع جامًا

2.1 تحويل لابلاس (Laplace)

1.2.1 تحويل لابلاس لتابع

2.2.1 خطية تحويل لابلاس

3.2.1 تحويل لابلاس لجداء اللف لتابعين

4.2.1 تحويل لابلاس لمشتق تابع من الرتبة n

5.2.1 تحويل لابلاس العكسي

3.1 تابع ميتاق - لفلر (Mittag - Leffler)

1.3.1 تعريف تابع ميتاق - لفلر

2.3.1 تحويل لابلاس لتابع ميتاق - لفلر

2 التفاضل و التكامل الكسريين

1.2 التفاضل و التكامل الكسريين بمفهوم ريمان - ليوفيل (Riemann - Liouville)

1.1.2 تعريف التكامل الكسري بمفهوم ريمان - ليوفيل

2.1.2 تعريف المشتق الكسري بمفهوم ريمان - ليوفيل

3.1.2 خواص

21 2.2 المشتق الكسري بمفهوم كابوتو (*Caputo*)

21 1.2.2 تعريف المشتق الكسري بمفهوم كابوتو

22 2.2.2 خواص

23 3.2 العلاقة بين المشتق الكسري بمفهوم ريمان - ليوفيل وبمفهوم كابوتو

الفصل الثاني : بعض المعادلات التفاضلية الكسرية

25 1 الوجود والوحدانية بتطبيق نظرية النقطة الصامدة لبناخ (*Banach*)

32 2 حل المعادلات التفاضلية الكسرية بتطبيق طريقة تحويل لابلاس

33 1.2 تحويل لابلاس للتكامل الكسري بمفهوم ريمان - ليوفيل

33 2.2 تحويل لابلاس للمشتق الكسري بمفهوم ريمان - ليوفيل

34 3.2 أمثلة

38 3 شرح للمقال

“ Solutions to a class of nonlinear differential equations of fractional order ”

“ حلول المعادلات التفاضلية غير الخطية برتبة كسرية ”

ل نيكولاي كوسماتوف (Nikolai Kosmatov)

38 1.3 تذكير

39 2.3 دراسة الوجود

الفصل الثالث : بعض تطبيقات التفاضل و التكامل الكسريين و المعادلات

التفاضلية الكسرية

49 1 الحساب الكسري في البيولوجيا

50 2 الحساب الكسري في الفيزياء

53 خاتمة

54 المراجع

مقدمة

إنّ حساب التفاضل و التكامل الكسريين (التحليل الكسري) هو أحد مجالات التحليل الرياضي الذي يناقش بحث و تطبيقات التفاضل و التكامل برتب غير صحيحة في \mathbb{R} أو \mathbb{C} ، ورغم أنه ظهر قديما إلا أنه يعتبر حديثا. فهو قديم لإتفاق معظم الباحثين في تاريخ الرياضيات على أنّ ميلاد التحليل الكسري يعود إلى حوالي 300 سنة تقريبا، ففي 30 سبتمبر 1695 ، بعث " ماركيز دو لوبيتال (*Marquis de l'Hôpital*) " برسالة إلى " غوتفريد ويلهولم لايبنيز (*Gottfrid Wilhelm Leibniz*) " سائلا إياه عن ملاحظة خاصة يبحثه المتعلق بحساب المشتق من الرتبة n : $\frac{d^n v}{dv^n}$ للدالة $f(v) = v$. و كان سؤال لوبيتال كالتالي: " ماهي نتيجة الإشتقاق إذ كان $n = \frac{1}{2}$ ؟ " ، فكان جواب لايبنيز كمايلي: " السؤال يبدو متناقضا مع ذلك فهو يحتمل الصحة ... " .
بهذه الكلمات تمّ ظهور التحليل الكسري.

ثمّ نال هذا الموضوع اهتماما كبيرا من طرف علماء الرياضيات و الفيزياء نذكر من بينهم: أولر (*L.Euler*) (1707 – 1783) في 1730 ، لابلاس (*Laplace*) (1749 – 1827) في 1812 ، فوريي (*J.B.J.Fourier*) (1768 – 1830) في 1822 ، ليوفيل (*J.Liouville*) (1809 – 1882) في 1832 ، ريمان (*G.F.B.Riemann*) (1826 – 1866) في 1847 ...

ومن ناحية أخرى فإنّه موضوع حديث لأنّه اكتسب رواجاً و أهمية كبيرة في العقود الثلاثة الأخيرة، فقد أصبح موضوعاً و هدفاً لعدد من المؤتمرات التخصصية و البحوث الجامعية. و يعود فضل المؤتمر الأول في هذ المجال إلى روز (*Ross*) الذي نظم هذا المؤتمر في حساب التفاضل و التكامل الكسريين و تطبيقاته في جامعة " New Haven " في جانفي 1974 ، و قد قام بإعداد كتاب عن وقائع المؤتمر. و يعود الفضل في كتابة أول دراسة إلى أولدهام (*Oldham*) و سبانير (*Spanier*) الذين بدأ بتأليف كتاب بعد جهد مشترك عام 1968 في حساب التفاضل و التكامل الكسريين و أصدره عام 1974 . و فضلا عن ذلك نلفت الانتباه إلى أبحاث كابوتو (*caputo*) في 1967 .

و في وقتنا الحاضر هناك اهتمام ملحوظ بهذا الموضوع، فعدد المنشورات و الملتقيات العلمية التي كرسّت من أجله تشهد على أهمية المسائل التي يثيرها هذا الموضوع من الناحيتين النظرية و التطبيقية. تظهر تطبيقات الحساب الكسري في مختلف مجالات العلوم و الهندسة، فمثلا يطبق في مجال التحليل العددي، المعادلات التفاضلية، الدارات الكهربائية، نظرية الإحتمالات و الإحصاء، الكيمياء، الفيزياء و البيولوجيا ...

الهدف الأساسي لهذه المذكرة هو دراسة وجود و وحدانية الحل لبعض المعادلات التفاضلية

الكسرية. وتتألف هذه المذكرة من 3 فصول، وفيها:

- الفصل الأول: وهو فصل تمهيدي نذكر فيه بعض التوابع الخاصة بالتحليل الكسري، كما نقدم بعض التعاريف الأكثر انتشارا و استعمالا للتفاضل و التكامل الكسريين و بعض خواصهما.
- الفصل الثاني: نتناول فيه بعض نظريات الوجود و الوحدانية لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية بالإضافة إلى طريقة تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية الكسرية.
- الفصل الثالث: نذكر فيه بعض تطبيقات التفاضل و التكامل الكسريين و المعادلات التفاضلية الكسرية.