وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
ـ القبة القديمة ـ (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure
-Vieux Kouba - (Alger)
Département de Mathématiques

فضاءات لوبيغ المعمّمة

$L^{p(x)}$

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

إعداد:
♦ أملال ليلى
♦ بوشنب بسمة

تحت إشراف الأستاذة:
★ دوجة هبول

نوقشت يوم 2010/06/09 من طرف لجنة المناقشة:

مختاري فارس ..... رئيسًا
دوجة هبول ..... مشرفةً
زيتوني ليلى ..... ممتحنةً

السنة الجامعية: *2010/2009*
دفعة جوان: *2010*

الفـــهرس

أهم الرموز المستعملة

مقدمة 07

الفصل الأوّل : تذكير ببعض المفاهيم

$I.1$ عموميات 09
$I.2$ الفضاءات الشعاعية النظيمية 09
$I.3$ التوابع المحدبة 11
$I.4$ الفضاءات و التوابع القيوسة 11
$I.5$ تكامل لوبيغ 14
$I.6$ فضاءات لوبيغ 17
$I.6.1$ الفضاءان $\mathcal{L}^p$ و $\mathbf{L}^p$ $\quad 1 \leq P < \infty$ 17
$I.6.2$ الفضاءان $\mathcal{L}^\infty$ و $\mathbf{L}^\infty$ 19
$I.6.3$ بعض أنواع التقاربات 22

الفصل الثاني : الفضاءات $\mathbb{L}^{p(x)}(\Omega)$

$II.1$ فضاءات لوبيغ المعمّمة 24
$II.1.1$ تمهيد 24
$II.1.2$ الخواص الأساسية لِ ρ_p 24
$II.1.3$ متباينة مينكوفسكي المعمّمة 33
$II.1.4$ الفضاء $\mathbb{L}^{p(x)}(\Omega)$ 34
$II.1.5$ المقارنة بين نظيم الفضاء $\mathbb{L}^{p(x)}(\Omega)$ و نظيم الفضاء $\mathbb{L}^p$ 36
$II.1.6$ متباينة هولدر المعمّمة 38
$II.1.7$ النظيم $|||\cdot|||_p$ 41
$II.1.8$ تكافؤ النظيمين $|||\cdot|||_p$ و $\|\cdot\|_{p(.)}$ 49
$II.2$ التقارب في الفضاء $\mathbb{L}^{p(x)}(\Omega)$ 50
$II.3$ الثنوية، الإنعكاسية و الكثافة في الفضاء $\mathbb{L}^{p(x)}(\Omega)$ 55

خـاتمة 61
دليل المصطلحات المستعملة 62
قائمة المراجع 64

مقدمة

إنّ إنشاء الفضاءات $\mathbf{L}^p$ ، $p \in [1, +\infty]$ ساعد كثيرا في تطوير البحث في مجال التحليل التابعي، فعليه أنشئت فضاءات سوبولاف [4] التي تلعب دورا أساسيا في حل المعادلات التفاضلية العادية أو الجزئية.

فنظرا لهذه الأهمية فكّر بعض الرياضياتيون في توسيع لمفهوم هذه الفضاءات و ذلك بدلا من إعتبار p ثابتا في المجال $[1, +\infty]$ يعتبرونه تابعا معرفا على جزء من $\mathbb{R}^N$ و يأخذ قيمه في $[1, +\infty]$ ،

فبعد إعطاء تعريف للفضاء النظيمي $\mathbf{L}^{p(x)}$ مع p تابع من $\mathbb{R}^N$ في $[1, +\infty]$ تمّ التوصل إلى إثبات أنّ متباينة من شكل مينكوفسكي محققة في هذه الفضاءات و أيضا من شكل هولدر محققة. كما سوف نراه في المذكرة و تحت شروط معينة يمكن إثبات أنّ هذه الفضاءات، فضاءات تامة و تتمتّع بعدة خواص مثل التي نجدها في حالة p ثابت.

لدراسة فضاءات لوبيغ المعمّمة $\mathbf{L}^{p(x)}$ قسمنا مذكرتنا إلى فصلين.

في الفصل الأول أعطينا تذكيرا لبعض المفاهيم الأساسية في نظرية القياس و المكاملة و التي نعتمد عليها في براهين الفصل الثاني، كما ذكّرنا بالفضاءات $\mathbf{L}^p$ مع p ثابت من $[1, +\infty]$ و أعطينا بعض الخواص التي تتمتّع بها هذه الفضاءات.

أمّا في الفصل الثاني فلقد عرّفنا الفضاءات $\mathbf{L}^{p(x)}$ مع $p(x)$ تابعا معرفا على جزء Ω من $\mathbb{R}^N$ ويأخذ قيمه في $[1, +\infty]$ ، فتمكنّا من إثبات أنّ هذه الفضاءات تامة، كما أثبتنا صحة متباينتين، الأولى من شكل مينكوفسكي و الثانية من شكل هولدر، كما أعطينا العلاقة الموجودة بين هذه الفضاءات إذا توفرت شروط معينة.