وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة

القبّة القديمة - الجزائر
قسم الرياضيات

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure
Vieux Kouba - Alger
Département de Mathématiques

مجموعـــة كانتـــــور (Cantor)
و بعض التطبيقات عليها

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

اعداد:
- حمريط فطيمة الزهرة
- ساسي فاطمة

تحت إشراف الأستاذة:
- هبول دوجة

لجنة المناقشة:

* بورغدة عبد الوهاب ..... رئيسًا
* سحنون زهيرة ..... ممتحنة
* هبول دوجة ..... مشرفة

السنة الجامعية: *2010/2009*

دفعة جوان: *2010*

المحتويات

مقدمة 2

ترميزات 3

1 عموميات في نظرية القياس و المكاملة 4

1.1 العشائر أو الا σ_X ـ جبر 5

2.1 العشيرة البوريلية 5

3.1 التطبيقات القيوسة 6

4.1 القياسات الموجبة 7

5.1 القياسات الخارجية 8

6.1 قياس لوبيغ الخارجي 9

7.1 أجزاء $\mathbb{R}^N$ القيوسةحسب لوبيغ 9

8.1 قياس لوبيغ 10

9.1 تكامل لوبيغ 11

10.1 تساوي القدرة لمجموعتين 13

11.1 المجموعات القابلة للعد 15

2 مجموعةكانتور 18

1.2 إنشاء مجموعة كانتور 19

2.2 بعض خواص مجموعة كانتور P 21

3.2 المميزات التحليلية لعناصر P 23

3 بعض التطبيقات على مجموعة كانتور 30

1.3 تابع لوبيغ 31

2.3 مثال لجزء من $\mathbb{R}$ ليس قيوس حسب لوبيغ 36

3.3 مثال لجزء قيوس حسب لوبيغ و لا ينتمي إلى العشيرة البوريلية 39

4.3 مثال لتابع قابل للمكاملة حسب ريمان دون أن يكون بوريليا 41

خاتمة 42

ملحق 43

قائمة المراجع 45

مقدمة

نسلط الضوء من خلال موضوع بحثنا عن مجموعة مهمة ، هي مجموعة كانتور ، لنكشف من خلال بعض التطبيقات عليها عن الإجابة على تساؤلات لطالما صدرة عن الطالب في نظرية القياس و المكاملة ، فيما يخص العلاقة الحقيقية الموجودة بين العشيرة البوريلية ([3]) و عشيرة الأجزاء القيوسة حسب لوبيغ ، إضافة إلى عشيرة الأجزاء كلها .
حيث أننا نعلم وجود إحتواء للعشيرة البوريلية في عشيرة الأجزاء القيوسة حسب لوبيغ و كذا إحتواء هذه الأخيرة في عشيرة الأجزاء كلها . فماذا عن الإحتواءات العكسية ؟
و من أجل بلوغ هذا الهدف ، نعرض العمل في مذكرتنا هاته في ثلاث فصول هي :
الفصل الأول و فيه أهم المعلومات في نظرية القياس و المكاملة دون التطرق إلى معلومات الطبولوجيا التي إستعملناها ، معتبرين القارىء ملم بها ، ليليه الفصل الثاني حيث نفصل فيه كل الخطوات التي تم بها إنشاء مجموعة كانتور ، و التي مكنتنا من عرض كل مميزات هذه المجموعة مرقمة بالبرهان ، لنمهد بهذا للفصل الثالث و الأخير أين نعرض بعض التطبيقات التي تمت على المجموعة المذكورة ، حيث نتمكن من الإجابة على الأسئلة السابقة الذكر ، و نضيف معلومات أخرى مثل إعطاء مثال لتابع يقبل المكاملة حسب ريمان دون أن يكون بوريليا ([5]) ، و كذلك إنشاء تابع لوبيغ f المستمر و المتزايد على $[0,1]$ و الذي يحقق الترجيح التالي :

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$