وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
ـ القبة القديمة ـ (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure
-Vieux Kouba - (Alger)
Dpartement de Mathémathiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

حول المعادلات التفاضلية الجزئية

إعداد الطالبتين:
⋆ عراب صالحة
⋆ مدياني مباركة

تحت إشراف الأستاذ:
⋆ عتيق يوسف

لجنة المناقشة :

الأستاذ: وعزار الحسن . . . . . رئيساً
الأستاذة: رزقي حياة. . . . . ممتحنةً
الأستاذ: عتيق يوسف. . . . . مشرفاً

السنة الدراسية 2009 – 2010
دفعة جوان 2010

المحتويات

١ مفاهيم أولية و معادلة لابلاس ٣

1.1 تعاريف ٤

2.1 مبرهنات عامة ٧

3.1 التوابع التوافقية ، التوابع تحت التوافقية ٩

4.1 صيغة حل مسألة ديريخلي في كرة ١٣

5.1 مبادىء الذروة ١٨

٢ إثبات وجود حل لمعادلة تفاضلية جزئية ناقصية ٢٤

1.2 طريقة الفروق المقسومة ٢٥

2.2 طريقة برون Perron ٣٥

3.2 طريقة التناوب لشفارتز H.A. Schwarz ٤١

٣ معادلة الحرارة ٤٦

1.3 معادلة الحرارة، تعريف ومبدأ الذروة ٤٧

2.3 مبادىء الذروة ٤٨

3.3 الحل الأساسي لمعادلة الحرارة ٥١

4.3 مسألة القيم الابتدائية لمعادلة الحرارة ٥٧

٤ معادلة الأمواج ٦١

1.4 معادلة الأمواج في البعد 1 ..... ٦٢

2.4 حل معادلة الأمواج في البعد 1 ..... ٦٢

3.4 حل معادلة الأمواج بطريقة فصل المتغيرات ٦٥

4.4 حل معادلة الأمواج بتطبيق صيغة القيمة الوسطى ومعادلة داربو Darboux ٦٨

٥ **ملحق** ٧٤

مقدمة

قضينا أربع سنوات في المدرسة العليا للأساتذة ونحن ننهل من علومها ونتزود من عطائها. وجاءت السنة الخامسة، إنها سنة التخرج، لذلك لابد من اختيار موضوع ما ليكون هدف بحثنا. اقترح علينا الأستاذ المشرف عدة مواضيع، فوقع اختيارنا على موضوع المعادلات التفاضلية الجزئية لأسباب عدة، من بينها : الموضوع هو جزء من برنامج المعادلات التفاضلية التي درسناها في السنة الرابعة، ورأينا أننا لم نوفه حقه من الاطلاع والبحث، وايضا كونه يلعب دورا فعالا في حل الكثير من المعضلات الحياتية كما له تطبيقات شتى في ميدان الفيزياء. ثم إن معظم المعادلات ذات المشتقات الجزئية هي تجريد لقوانين تتحكم في ظواهر فيزيائية وتظهر فيها المشتقات الجزئية كوسائط طبيعية مثل السرعة، القوة، الاحتكاك، ... أردنا بهذه المذكرة أن نعود ونفتح هذا الفضاء من أوله ونتوغل في دواليبه مااستطعنا إلى ذلك سبيلا.

بدأت دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية في القرن الثامن عشر في أعمال العديد من العلماء نذكر منهم أويلر Euler ، دالمبير d'Alembert ، فوريه Fourier ، ولابلاس Laplace ، كوسيلة لتحليل الظواهر الميكانيكية. وهنا نسلط الضوء على النماذج الثلاثة للمعادلات التفاضلية الجزئية :

- درس دالمبير سنة 1752 معادلة الأمواج في بعد واحد التي تدرس ظاهرة اهتزاز الوتر. وقد واصل هذه الدراسة كل من أويلر سنة 1759 وبرنولي D. Bernoulli سنة 1762 ، فتناولا معادلة الأمواج في بعدين وثلاثة أبعاد.
- أول من تطرق إلى معادلة لابلاس هو العالم الذي سميت باسمه، وكان ذلك سنة 1780 ، وهي معادلة تمثل حقل كمون.
- بينما معادلة الحرارة درست لأول مرة من طرف فوريه Fourier في مذكرته المعنونة **بالنظرية التحليلية للحرارة** (Théorie analytique de la chaleur) وكان ذلك في الفترة الممتدة مابين 1810 وَ 1822 .

كان لمعادلة لابلاس حصة الأسد في مذكرتنا هذه. لقد تناولناها في فصلين يتضمن الأول منهما مفاهيم أولية حول المعادلات التفاضلية الجزئية، ومعادلة لابلاس. أعطينا فكرة بسيطة عن حلها بشروط حدية. وقدمنا مبدأ الذروة، الذي مكننا من معرفة بعض خواص الحل دون معرفة عبارته صراحة. أما الفصل الثاني فتناولنا فيه ثلاث تقنيات مختلفة لإثبات وجود حل معادلة بواسون Poisson بشروط حدية. ولم نخصص لِمعادلتي الحرارة والأمواج إلا فصلا واحدا لكل منهما. فتطرقنا في الفصل الثالث إلى معادلة الحرارة مع إلقاء نظرة بسيطة على حلها ووحدانيته. وأخيرا تناولنا معادلة الأمواج وبعض صيغ حلها في الفصل الرابع.