

Ministère de l'enseignement Supérieur  
et de la recherche Scientifique  
Ecole Normale Supérieure  
Vieux – Kouba (Alger)  
Département de Mathématiques



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
المدرسة العليا للأساتذة  
القبة القديمة – الجزائر  
قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي  
بعنوان

# التوابع متعددة المتغيرات وتطبيقاتها

تحت اشراف الأستاذ:

موساوي توفيق

من اعداد الطالبتين:

❖ بوجردة أمال

❖ كبسة سامية

لجنة المناقشة:

الأستاذ: حمور بوسعد.....رئيسا.

الأستاذ: باشوش كمال.....ممتحنا.

الأستاذ: موساوي توفيق .....مشرفا.

السنة الجامعية: 2010/2009

دفعة جوان 2010

## الفهرس

مقدمة ..... 3

### الفصل الأول: مقدمة في دراسة التوابع ذات متغيرات متعددة

1. مقدمة في دراسة التوابع ذات متغيرات متعددة ..... 4
- 1.1 تابع ذو متغيرين حقيقيين ..... 4
- 1.1.1 مثال رياضي و تعاريف ..... 4
- 2.1.1 التمثيل البياني لتابع ذو متغيرين ..... 6
- 2.1 المشتقات الجزئية ..... 8
- 1.2.1 تذكير: اشتقاق تابع من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  ..... 8
- 2.2.1 حساب المشتقات الجزئية ..... 8
- 3.2.1 المشتقات الجزئية من الدرجة العليا (إبتداءا من الدرجة الثانية) ..... 9
- 3.1 توابع ذات قيم شعاعية ..... 10
- 1.3.1 تعميم ..... 11

### الفصل الثاني: دراسة الاستمرار والنهايات لتوابع متعددة المتغيرات

2. دراسة الاستمرار والنهايات لتوابع متعددة المتغيرات ..... 13
- 1.2 استمرارية التوابع المتعددة المتغيرات ..... 13
- 1.1.2 الحالة الحقيقية ..... 13
- 2.1.2 حالة التوابع المعرفة من  $\mathbb{R}^2$  نحو  $\mathbb{R}$  ..... 13
- 3.1.2 التقنيات العامة ..... 16

### الفصل الثالث: مفهوم قابلية التفاضل

21.....	3. مفهوم قابلية التفاضل
21.....	1.3 حساب التفاضل
21.....	1.1.3 اشتقاق وفق شعاع
22.....	2.1.3 التوابع المعرفة من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^p$
23.....	3.1.3 التطبيقات التفاضلية
25.....	4.1.3 النشور المحدودة
27.....	5.1.3 المعنى الواضح (الصريح) للتفاضل
28.....	2.3 الخاصية التفاضلية
28.....	1.2.3 مفهوم التدرج

### الفصل الرابع: محدد المصفوفة اليعقوبية

30 .....	4. محدد المصفوفة اليعقوبية
30 .....	1.4 المصفوفة اليعقوبية
30 .....	1.1.4 قابلية المفاضلة للتوابع من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^p$
31 .....	2.1.4 تعميم
32 .....	3.1.4 اليعقوبي
32.....	2.4 مفهوم $C^1$ - تفتاشاكل - diffeomorphisme
32 .....	1.2.4 عموميات
33 .....	2.2.4 خواص

## الفصل الخامس: البحث عن القيم القصوى

5. البحث عن القيم القصوى..... 35
- 1.5 المسائل المتعلقة بالبحث عن القيم القصوى..... 35
- 1.1.5 النشور المحدودة من الدرجة الثانية ..... 35
- 2.5. النقاط الحرجة والقيم القصوى ..... 36
- 3.5 خصائص النقاط الحرجة ..... 37
- 1.3.5 المصفوفة الهيسية ..... 37
- 2.3.5 بعض مفاهيم التحليل الطيفي..... 38
- 4.5 حالة البعد يساوي 2 ..... 39

## الفصل السادس: مدخل إلى المعادلات ذات المشتقات الجزئية

- 6 مدخل إلى المعادلات ذات المشتقات الجزئية..... 37
- 1.6 متممة الحساب التفاضلي ..... 42
- 1.1.6 مثال توضيحي ..... 42
- 2.6 المؤثرات التفاضلية ..... 43
- 3.6 تغيير الإحداثيات..... 44
- 1.3.6 المعلم القطبي ..... 44
- 2.3.6 تغيير متغير ما ..... 45
- 3.3.6 بعض الطرق لحل المعادلات ذات المشتقات الجزئية..... 47
- 1.3.3.6 تغيير الإحداثيات ..... 47
- 2.3.3.6 طريقة فصل المتغيرات ..... 48

خاتمة

قائمة المراجع

## مقدمة

تعتبر التوابع المتعددة المتغيرات من أهم النظريات في التحليل الرياضي، والذي يعد من أكثر المجالات النشطة في الرياضيات الحديثة. وذلك لارتباطها بمعادلات غاية في الأهمية في مجال الفيزياء مثل معادلات الحرارة ، معادلات الموجة ، معادلات الحبل المهتز. وكذلك حساب العديد من القيم مثل : حساب عزم العطالة ، التدفق....إلخ.

نقوم في هذه المذكرة بدراسة هذا النوع من التوابع وخصائصه الطوبولوجية كالإستمرار، الإشتقاق ... إلخ، كما سنحاول وضع جميع المبادئ والتعاريف و النظريات الأساسية المتعلقة بها. وذلك من خلال الفصول الأولى، ثم سنبرز العلاقة بين هذا النوع من التوابع و بعض أنواع المصفوفات والتحليل المصفوفي الذي يعد من أحد أهم مجالات الرياضيات.

وأيضا إن ظهور هذا التخصص فتح الباب أمام المعادلات التفاضلية والتي سنعالج البعض منها وكيفية إيجاد حلولها في الفصل الأخير من هذه المذكرة.