

Ministère de l'enseignement supérieur

et de la recherche scientifique  
Ecole normale supérieure  
Vieux Kouba - (Alger)



Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة

القبة القديمة - (الجزائر)

قسم الرياضيات

## الزمرة الأساسية لفضاء طولوجي

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

تحت إشراف الأستاذة:  
★ وردية محراب

إعداد:

★ نور الدين تشماقجي  
★ نور الدين محبر

لجنة المناقشة:

رئيسة	.....	* حياة رزقي
مُمتحنة	.....	* زهيرة سحنون
مشرفة	.....	* وردية محراب

السنة الجامعية: 2010/2009

دفعة جوان: 2010

# المحتويات

04	.....	مقدمة
06		1 تعاريف عامة
07	.....	1.1 الفضاء الطبولوجي .
07	.....	1.1.1 التراص
07	.....	2.1.1 الترابط
08	.....	2.1 توطئة التمديد بالإستمرار
08	.....	3.1 السيل
09	.....	4.1 حركات Reidmeister
10	.....	5.1 الجداء الحر والزمرة الحرة
10	.....	1.5.1 الجداء الحر
13	.....	2.5.1 الزمرة الحرة
15		2 هموتوبيا
16	.....	1.2 هموتوبيا وأنواعها
19	.....	1.1.2 الفضاءات الطبولوجية التي لها نفس نوع هموتوبيا
20	.....	2.1.2 الفضاءات المقلصة إلى نقطة
20	.....	2.2 هموتوبيا النسبية والتقلص بالتشوه
20	.....	1.2.2 هموتوبيا النسبية
20	.....	2.2.2 التقلص
21	.....	3.2.2 التقلص بالتشوه
22	.....	3.2 هموتوبيا السيل
27		3 الزمرة الأساسية وتطبيقاتها

28	.....	1.3 الزمرة الأساسية
30	.....	2.3 تطبيقات
30	.....	1.2.3 العقد
35	.....	2.2.3 الرفع
39	.....	3.2.3 تمثيلات الزمر
43	.....	الخاتمة
44	.....	دليل المصطلحات
47	.....	المراجع

---

## مقدمة

إن الطوبولوجيا الجبرية تسمح بإنشاء دالات طوبولوجية . لهذه الأخيرة دور هام في تصنيف الأدوات الطوبولوجية ككثير حدود الكسندر، كثير حدود جونز، الزمرة الأساسية، ...  
 إن الزمرة الأساسية لفضاء طوبولوجي دال يرفق بكل فضاء طوبولوجي زمرة و التي تعتبر دالا طوبولوجيا. هذا يعني أننا سنرفق بكل فضاء طوبولوجي زمرة بحيث الزمر المرفقة بفضاءات طوبولوجية مستشاكله هي متشاكله.

لفهم الموضوع، نطرح التساؤل التالي:

ما هي الخاصية الطوبولوجية لفضاء طوبولوجي التي يمكن استخدامها كي تتمكن من تصنيف الفضاءين الممثلين بالشكل (1)



الشكل 1

بحيث الأول هو قرص دائري والثاني حلقة، أو قرص به ثقب؟ بعبارة أخرى، كيف يمكننا تحديد وجود الثقوب بأدوات لا تستخدم مفاهيم طوبولوجية كالمسافة والزاوية؟

الاجابة تكمن في امكانية أو عدم امكانية تقليص سبل مغلقة، في فضاءين طوبولوجيين، إلى نقطة. كل سبيل مغلق  $f$  في قرص دائري، مبدؤه ونهايته هي  $x_0$ ، يمكن تقليصه إلى نقطة دون الخروج عن القرص، لكن يوجد سبيل مغلق  $f'$  في الحلقة بحيث لا يمكن تقليصه إلى نقطة في الحلقة. يمكن تمثيل السبل  $f$  و  $f'$  كعقد عند  $x_0$  و  $x'_0$  على الترتيب (استعمل الخيط). يمكننا بالسحب على الخيط، تقليص الأول، بينما الثاني يصطدم بحافة ثقب الحلقة.

أي أن خاصية، لفضاء طوبولوجي  $E$ ، كون كل سبيل مغلق في  $E$  يمكن أن يقلص لنقطة في  $E$ ، هي خاصية طوبولوجية له. إذا كان  $E$  و  $E'$  مستشاكلين فإن تقليص أي سبيل معطى في  $E'$  يمكن الحصول عليه بنقل تقليص السبيل المقابل له في  $E$ . لكن هذا التحليل يركز بشكل كبير على الحس الملموس.

لذلك نلجأ إلى تعويض مفهوم التقصص بمفهوم طوبولوجي معرف بشكل أدق ألا وهو الهموتوبيا. من الواضح أن تقليص سبيل مغلق لنقطة هو حالة خاصة لتشويه السبيل المغلق من شكل لآخر وهو أيضاً حالة خاصة لتشويه السبيل الكيفية (ليست بالضرورة مغلقة) من وضعية لأخرى. للزمرة الأساسية دور كبير في تصنيف الفضاءات الطوبولوجيا، فبفضل الزمرة الأساسية تم تصنيف كل المساحات ، وبعض الفضاءات الطوبولوجية كالعقد من النوع: noeuds toriques ، وفضاءات أخرى. لكن دال الزمرة الأساسية ليس دالا كاملا لعجزه عن تصنيف بعض الفضاءات الطوبولوجية لذا لجأ بعض الرياضياتيين الى تعريف الزمرة الأساسية من رتب عليا ، كذلك الهمولوجيا، ... تجدر الإشارة الى أنه، الى حد الآن، لم يتمكن الرياضياتيون من ايجاد دال كامل مما يجعل موضوع تصنيف الفضاءات الطوبولوجية مفتوحا لحد الآن .