تمارين في نظرية التوزيعات وتحليل فوريي
مع ملخصات للدروس

لطيفة آيت محيوت

قسم الرياضيات

المدرسة العليا للأساتذة-القبة الجزائر.

مـــــــــــاي 2021

بسم الله الذي لا يضر مع اسمه شيء في الأرض
ولا في السماء وهو السميع العليم

لكل من لديه ملاحظة أو سؤال، مراسلتنا عبر عنوان البريد الالكتروني التالي

latifa.aitmahiout@g.ens-kouba.dz

مقدمة

قام لورنت شوارتز Laurent Schwartz $(1915-2002)$ عندما كان أستاذا بجامعة نانسي الفرنسية بتأسيس النظرية الرياضية للتوزيعات distributions في مقال نشر عام 1945 عنوانه

``Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier
et applications mathématiques et physiques"

«تعميم مفهوم التابع والاشتاق وتحويل فوريي مع تطبيقات رياضيتية وفيزيائية.»

حيث أنّه قدم مفهوما رياضيا لعدة «توابع معممة» استعملت في الفيزياء مثل قياس ديراك Dirac $(1902-1984)$ وتابع هيفيسايد Heaviside $(1850-1925)$.

فلنأخذ مثلا قياس ديراك. عرف الفزيائي ديراك كائنا جديدا يسمى بـ «قياس ديراك» والذي يعتبر تابعا عند الفزيائيين يعرفونه كالتالي: يساوي 0 في كل مكان ما عدا عند الصفر، وعند 0 يساوي لا نهاية مع القيد تكامله يساوي 1 .

ويلاحظ الفيزيائيون أنّ مربع هذا التابع «غير موجود» وهذا تناقض مع كون مربع كل تابع موجود. لذا فكيف يمكن أعطاءه تسمية تابع؟ هذا السؤال الذي طرحه الفيزيائيون ولم يتمكن ديراك من تفسير هذه النقطة، لأنّ تعريفه يعتمد على الحدس. فأتى لورنت شوارتز بمفهوم دقيق لـ «تابع» ديراك واعتبره شكلا خطيا مستمرا على مجموعة التوابع المتراصة الحامل والقابلة للإشتقاق لا نهائيا (المسماة بمجموعة التوابع الإختبارية) والتي نرمز لها بـ C_c^∞ ، معرفا بـ: $\varphi \mapsto \varphi(0)$. وسماه بتوزيع أو تابعا معمما.

وما يميز نظرية التوزيعات أيضا، هو أنها أتت بمفهوم اشتقاق جديد يزيل الحواجز التي وضعها الاشتقاق بالمفهوم المألوف.

في عام 1934 ، نشر العالم جون لوري Jean Leray $(1906-1998)$ مقالا يقدم فيه مفهوما جديدا للإشتقاق يسمى الإشتقاق الضعيف، وهو خاص بالتوابع ذات المربعات الكمولة. يقول لوري ببساطة: ليكن f تابعا ينتمي إلى مجموعة التوابع التي مربعها كمول على $\mathbb{R}$ والتي نرمز إليها بـ $L^2(\mathbb{R})$. يقبل f الإشتقاق بالمفهوم الضعيف L^2 إذا وجد g من $L^2(\mathbb{R})$ بحيث من أجل كل φ من $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ،

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi.$$

نسمي g المشتق الضعيف لـ f .

نلاحظ أنّه إذا كان f من الصنف C^1 فإنّ $g = f'$ شبه كليا.

تمكننا هذه النظرية من حل العديد من المسائل مثل، مسألة لابلاس Laplace. (1749 – 1827) ومسألة نافي ـ ستوكس Navier – Stokes. كما أنّها أساس تعريف فضاءات سوبولاف Sobolev (1908 – 1989) ، إلا أنها لا تمكننا من حل جميع المسائل.

قدم لورنت شوارتز فكرة جديدة، وهي إمكانية اشتقاق التوابع (الكمولة محليا) بمفهوم التوزيعات. ذلك أنه يمكن " مطابقة " أي تابع كمول محليا بتوزيع T .

كيف عرف شوارتز المشتق T' لـ T ؟ لقد وضع من أجل كل $\varphi \in C_c^\infty$ ،

$$T'(\varphi) = -T(\varphi').$$

في هذه العلاقة نلاحظ أنّه نقل رمز الإشتقاق من T إلى φ مع تغيير الإشارة.

يمكننا ذلك من ازالة العديد من العوائق في حل المعادلات التفاضلية الجزئية.

نشير إلى أنّ لورنت شوارتز تحصل عام 1950 بفضل هذه الأعمال على ميدالية فيلدز ـ Fields (1863 – 1932) في الرياضيات (المعادلة لجائزة نوبل)، وهذا ما يبين أهمية هذا الإنجاز.

يتضمن هذها الكتاب، سبعة فصول. يتناول الفصل الأول بعض الفضاءات المهمة والنتائج الأساسية. أمّا الفصل الثاني فهو مخصص لدراسة التوزيعات. ثم نتعرف في الفصل الثالث على فضاءات سوبولاف، يقدم الفصل الرابع ملخصا حول جداء التزاوج.

وقد خصصنا الفصل الخامس إلى تحويل فوريي Fourier الذي يؤدي دورا بارزا في حل المعادلات التفاضلية الجزئية. ونشير إلى أننا خصصنا في كل فصل من الفصول السابقة جزءا لتمارين محلولة.

ويجد القاريء في الفصل السادس تمارين غير محلولة مزودة بإرشادات. أمّا الفصل السابع فيحتوي على تمارين غير محلولة.

وبهذا نأمل أن نكون قد قدمنا للقاريء بسطة حول نظرية التوزيعات وتطبيقاتها.

المحتويات

باب 1

فضاءات ونتائج أساسية

رموز:

- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ دليل متعدد. نضع $|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|$ ، ويسمى طول α.
- ليكن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. نضع: $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$.
- إذا كان α و β دليلين متعددين فإن لدينا التكافؤ:

$$\forall i = 1, \ldots, n : \ \ \alpha_i \leqslant \beta_i \Leftrightarrow \alpha \leqslant \beta.$$

- نضع: $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ لكل $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
-

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ (x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} y^\beta$$

- ليكن $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. نعبر المشتق الجزئي من الرتبة α لـ f ، بـ:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \partial^\alpha f = D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f.$$

دستور ليبنتز. ليكن $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. لدينا:

$$D^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f D^\beta g.$$

نعتبر فيما يلي Ω مفتوحا غير خال من $\mathbb{R}^n$.

تعريف 1.1
ليكن التطبيق $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
الملاصقة

$$\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

تسمى حامل (سند) f .
$\operatorname{Supp} f$ أصغر مغلق من Ω يكون f معدوما خارجه، و $(\operatorname{Supp} f)^c$ أكبر مفتوح ينعدم عليه f ويسمى مفتوح الإنعدام.

1.1 فضاء التوابع الإختبارية Espace des fonctions tests

تعريف 1.2
نقول عن تابع φ معرف على Ω إنه من الصنف C^∞ وذو سند متراص، إذا:

- φ من الصنف C^∞ ، أي أنّ $D^\alpha\varphi$ موجود ومستمر على Ω مهما كان α من $\mathbb{N}^n$.
- يوجد متراص (مغلق ومحدود) من $\mathbb{R}^n$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi \subset K \subset \Omega$.

نرمز لمجموعة التوابع التي من الصنف C^∞ على Ω وذو سند متراص، بـ $\mathcal{D}(\Omega)$ أو بـ $C_c^\infty(\Omega)$.

ملاحظات

1. φ معدوم بجوار حافة Ω .
2. من أجل $\Omega =]a, b[$. إذا كان $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$ فإنّه يوجد α و β يحققان $a < \alpha < \beta < b$ ، بحيث φ معدوم خارج $[\alpha, \beta]$.

أمثلة:

1. التابع φ المعرف على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) & : |x| < 1, \\ 0 & : |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

ينتمي إلى $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ وسنده هو $\operatorname{Supp}\varphi = [-1, 1]$.

2. من أجل $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و $a > 0$ معطيين، التابع $x \mapsto \varphi\left(\dfrac{|x-x_0|}{a}\right)$ ينتمي إلى $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ وسنده هو $B(x_0, a)$.

3. نعتبر التابع φ المعرف من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ بـ $\varphi(x)=1$. لدينا:

$$\operatorname{Supp}\varphi=\overline{\{x\in\mathbb{R}:\varphi(x)\neq 0\}}=\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}.$$

$\operatorname{Supp}\varphi=\mathbb{R}$ ليس متراص (لأنّه ليس محدودا). ومنه φ ليس تابعا إختباري على $\mathbb{R}$.

4. نعتبر التابع $1_{\mathbb{Q}}$ المعرف على $\mathbb{R}$ بـ:

$$1_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & : x\in\mathbb{Q},\\ 0 & : x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

لدينا:

$$\operatorname{Supp}1_{\mathbb{Q}}=\overline{\{x\in\mathbb{R}:1_{\mathbb{Q}}(x)\neq 0\}}=\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}.$$

ومنه $1_{\mathbb{Q}}$ ليس تابعا إختباريا.

يمكن القول أيضا أنّ التابع $1_{\mathbb{Q}}$ ليس إختباريا على $\mathbb{R}$ لأنه غير مستمر.

1.1.1 التقارب في فضاء التوابع الإختبارية

تعريف 1.3
نقول عن متتالية (φ_n) من $\mathcal{D}(\Omega)$ إنها تتقارب في $\mathcal{D}(\Omega)$ نحو تابع φ إذا وجد متراص K محتوى من Ω بحيث:

1) $\operatorname{Supp}\varphi_n\subset K,\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

2) $\operatorname{Supp}\varphi\subset K$.

3) $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in K}|D^\alpha\varphi_n(x)-D^\alpha\varphi(x)|=0$ ، أي أنّ المتتالية ومشتقاتها متقاربة بإنتظام مهم كان α.

مثال: ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. ادرس التقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ للمتتاليات التالية:

$$\psi_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x),\ \ \eta_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(nx),\ \ \theta_n(x)=\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right),\ \ n\geqslant 1.$$

حل المثال:

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. يوجد $a>0$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi\subset K=[-a,a]$.

1. **دراسة تقارب المتتالية** (ψ_n) **في** $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

- دراسة التقارب البسيط لـ ψ_n . ليكن x مثبتا في $\mathbb{R}$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\psi_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\varphi(x)=0.$$

أي أنّ ψ_n تتقارب ببساطة نحو $\psi = 0$.

- نلاحظ أنّ $\operatorname{Supp}\psi_n = \operatorname{Supp}\varphi$. لدينا:

1) $\operatorname{Supp}\psi_n \subset K$ ،
2) $\operatorname{Supp}\psi = \varnothing \subset K$ ،
3) ليكن $\alpha \in \mathbb{N}$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in K}|D^\alpha\psi_n(x) - D^\alpha\psi(x)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)| = 0.$$

من 1 ، 2 و 3 نستنتج أنّ ψ_n تتقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ نحو التابع المعدوم $\psi = 0$.

2. **دراسة تقارب المتتالية (η_n) في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$** .

- دراسة التقارب البسيط لـ η_n . ليكن x مثبتا في $\mathbb{R}$. نضع $M = \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi(y)|$. لدينا:

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty}|\eta_n(x)| \leqslant \frac{M}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

ومنه η_n تتقارب ببساطة نحو $\eta = 0$.

- لدينا:

1) $\operatorname{Supp}\eta_n \subset \left[-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}\right] \subset K$ ، 2) $\operatorname{Supp}\psi = \varnothing \subset K$ ، 3) ليكن $\alpha \in \mathbb{N}$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in K}|D^\alpha\eta_n(x) - D^\alpha\eta(x)| = \lim_{n\to+\infty}n^{\alpha-1}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(nx)| = +\infty,\ \ \forall\alpha > 1.$$

ومنه نستنتج أنّ η_n لا تتقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. **دراسة تقارب المتتالية (θ_n) في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$** .

- دراسة التقارب البسيط لـ θ_n . ليكن x مثبتا في $\mathbb{R}$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\theta_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)\varphi\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n}\right) = \varphi(0)\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

ومنه θ_n تتقارب ببساطة نحو $\theta = 0$.

- لدينا: $\operatorname{Supp}\theta_n \subset [-an, an]$.

إذا كان φ غير مطابق للصفر، يوجد $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ بحيث $\varphi(x_0) \neq 0$. نلاحظ أنّ

$$\theta_n(nx_0) = \frac{1}{n}\varphi(x_0) \neq 0.$$

إذن $nx_0 \in \operatorname{Supp}\theta_n$ مهما كان n ومجموعة النقاط nx_0 غير موجودة. إذن $\operatorname{Supp}\theta_n$ غير محدود فهو غير متراص.

ومنه نستنتج أنّ المتتالية (θ_n) لا تتقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1.2 المتتاليات الصاقلة Suites régularisantes

تعريف 1.4 نقول عن متتالية $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ إنها صاقلة إذا حققت:
1) $\varphi_j \geqslant 0,\ \forall j \in \mathbb{N}$،
2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x)\ \mathrm{d}x = 1$،
3) $\operatorname{Supp}\varphi_j \subset B(0, r_j)$ مع $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} r_j = 0$.

كيفية إنشاء متتالية صاقلة.
ليكن $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ موجب وغير مطابق للصفر.
ومنه يوجد $a > 0$ بحيث $\operatorname{Supp}\psi \subset B(0, a)$.
نضع

$$\psi_0(x) = \frac{\psi(x)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\ \mathrm{d}x}.$$

نلاحظ أنّ $\operatorname{Supp}\psi_0 \subset B(0, a)$ وَ

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x)\ \mathrm{d}x = 1,\ \ \forall x : \psi_0(x) \geqslant 0.$$

نضع

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j^n}\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right),$$

مع $\varepsilon_j > 0$ و $\lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j = 0$.
لدينا:
1) $\forall j \in \mathbb{N},\ \ \varphi_j \geqslant 0$ ،
2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon_j^n}\int_{\mathbb{R}} \psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right)$ ،
بتبديل المتغير $y = \dfrac{x}{\varepsilon_j}$ ، نجد أنّ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\ \mathrm{d}x = 1$.
3) $\operatorname{Supp}\varphi_j \subset B(0, \varepsilon_j a)$ مع $\displaystyle\lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j = 0$.
يكفي أن نضع $r_j = \varepsilon_j a$ في التعريف. ومنه المتتالية φ_j صاقلة.

1.3 المتتاليات المعمقة Suites exhaustives

نظرية 1.1 ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$. توجد متتالية معمقة من المتراصات $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ تغطي Ω،

أي أنها متتالية تحقق:
1) $\forall j \in \mathbb{N},\ K_j \subset \Omega$,
2) $\forall j \in \mathbb{N},\ K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ (ونكتب عموما $K_j \subset\subset K_{j+1}$),
3) $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$.

إثبات النظرية:

1. في حالة $\Omega = \mathbb{R}^n$: نعتبر $K_j = \overline{B(0,j)}$.
2. في حالة $\Omega \neq \mathbb{R}^n$: نضع

$$A_j = \left\{ x \in \Omega : d(x, C_{\mathbb{R}^n}\Omega) > \frac{1}{j} \right\}.$$

نلاحظ أنّ:

- A_j مفتوح لأنّه يمثل الصورة العكسية للمجال الفتوح $\left]\frac{1}{j}, +\infty\right[$ وفق التابع المستمر

$$f : x \in \Omega \longmapsto f(x) = d(x, C_{\mathbb{R}^n}\Omega) \in]0, +\infty[,$$

- $A_j \subset \Omega$ ،
- $\forall j \in \mathbb{N},\ A_j \subset A_{j+1}$.

نضع $\Omega_j = A_j \cap B(0,j)$. لدينا:

أ) Ω_j مفتوح.

ب) $\overline{\Omega_j} = \overline{A_j \cap B(0,j)} \subset \overline{B(0,j)}$ ، أي أنّ $\overline{\Omega_j}$ متراص. نضع $K_j = \overline{\Omega_j}$.

جـ) بقي إثبات أنّ $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$. تعريفا، لدينا $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{K_j} \subset \Omega$.

ليكن $x \in \Omega$. لدينا:

$$\exists j_1 \in \mathbb{N} : x \in B(0, j_1),$$
$$\exists j_2 \in \mathbb{N} : d(x, C_{\mathbb{R}^n}\Omega) > \frac{1}{j_2} \Rightarrow x \in A_{j_2}.$$

نضع $j_0 = \min(j_1, j_2)$. لدينا:

$$x \in A_{j_0} \cap B(0, j_0) \subset \overline{A_{j_0} \cap B(0,j)} = K_{j_0}.$$

وهو المطلوب. □

ملاحظة 1.1
كل مفتوح Ω غير خال من $\mathbb{R}^n$ يقبل متتالية معمقة من المفتوحات (Ω_j) تغطي Ω ، أي أنها متتالية تحقق:

1) $\overline{\Omega_j} \subset\subset \Omega_{j+1}$ ، 2) $\overline{\Omega_j}$ متراص. 3) $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j = \Omega$.

توطئة 1.1 ليكن K متراصا من Ω, ولتكن (K_j) متتالية معمقة من المتراصات تغطي Ω. يوجد K_{j_0} عنصرا من المتتالية (K_j) بحيث $K \subset K_{j_0}$.

مبرهنة 1.1 (توطئة أورشون)
إذا كان F مغلقا من $\mathbb{R}^n$ و K متراصا من $\mathbb{R}^n$ بحيث $K \cap F = \varnothing$ ، فإنّه يوجد $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ بحيث

1) $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ ،
2) $\varphi = 1$ **بجوار** K ،
3) $\varphi = 0$ **بجوار** F .

لدينا النتيجة التالية:

نتيجة 1.1
ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ وليكن K متراصا محتوى في Ω. عندئذ يوجد تابع إختباري $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ بحيث:

1) $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.
2) $\varphi = 1$ في جوار K (يمكن إختيار هذا الجوار متراصا).

إثبات النتيجة:
ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ ، وليكن K متراصا من Ω . نضع $F = C_{\mathbb{R}^n}\Omega$ ونلاحظ أنّ F مغلق.
حسب توطئة أورشون، يوجد تابع $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ بحيث:
$0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ ، $\varphi = 1$ في جوار V لـ K ، $\varphi = 0$ في جوار W لـ F .
بقي إثبات أنّ $\operatorname{Supp}\varphi \subset \Omega$. لدينا:

$$C_{\mathbb{R}^n}\Omega = F \subset W \subset C_{\mathbb{R}^n}\operatorname{Supp}\varphi.$$

ومنه نستنتج أنّ $\operatorname{Supp}\varphi \subset \Omega$. وهو المطلوب. □

تعريف 1.5 [التوابع المنبسطة - ***Fonctions plateaux***]
ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ و K متراصا محتوى في Ω. نسمي تابعا منبسطا كل تابع φ من الصنف $C^\infty(\Omega)$ يحقق:
1) $\operatorname{Supp}\varphi \subset \Omega$ ،
2) $\forall x \in \Omega: \ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$.
3) $\forall x \in K: \ \varphi(x) = 1$.

1.4 المتتاليات الباترة - Suites tronquantes

تعريف 1.6
ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن (Ω_j) متتالية معمقة من مفتوحات تغطي Ω. نقول عن متتالية φ_j من $\mathcal{D}(\Omega)$ إنّها متتالية باترة إذا حققت:
1) $\forall j, \ 0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$.
2) $\varphi_j = 1$ في جوار $\overline{\Omega_j}$.

نظرية 1.2
المتتالية الباترة موجودة دوما.

إثبات النظرية:
نعتبر المتراص $K_j = \overline{\Omega_j}$ ونطبق توطئة أورشون. فنجد المطلوب. $\square$

نظرية 1.3
لتكن $(\Omega_j)_{j=1,\ldots,n}$ عائلة من المفتوحات من $\mathbb{R}^n$ ، وليكن K متراصا بحيث $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$.
عندئذ توجد عائلة من المتراصات $(K_j)_{j=1,\ldots,n}$ بحيث $K_j \subset \Omega_j$ لكل $j = 1, \ldots, n$ و $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j$.

ملاحظة 1.2
ليست كل كرة مغلقة متراصة.

نظرية 1.4 [نظرية تجزئة الوحدة - *Théorème de la partition d'unité*] ليكن K متراصا من $\mathbb{R}^n$ ولتكن $(\Omega_j)_{j=1,\dots,n}$ مجموعة مفتوحات من $\mathbb{R}^n$ بحيث $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j = \Omega$.
عندئذ يوجد $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ مع $j = 1, \dots, n$ بحيث
1) $\forall j = 1, \dots, n, \ 0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$.
2) $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = 1$ في جوار K.

إثبات نظرية تجزئة الوحدة:
توجد متراصات $(K_j)_{j=1,\dots,n}$ بحيث $K_j \subset \Omega_j$ من أجل كل $j = 1, \dots, n$ و $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j$.
نطبق نتيجة توطئة أورشون على K_j ونجد أنّه يوجد $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ بحيث $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$ و $\psi_j = 1$ بجوار K'_j لـ K_j.
من جهة أخرى، فإنّ $V = \bigcup_{j=1}^{n} K'_j$ جوار مفتوح لـ K ونلاحظ أنّ $\sum_{j=1}^{n} \psi_j > 0$ على V .
ثم إنه يوجد $\theta \in \mathcal{D}(V)$ بحيث $\theta = 1$ في جوار W لـ K . لاحظ أنّ

$$\psi_0(x) = 1 - \theta(x) = \begin{cases} 1 & : x \in CV; \\ 0 & : x \in W, \end{cases}$$

وأنّ ψ_0 ليس تابعا إختباريا.
نضع الآن

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{i=0}^{n} \psi_i} \in \mathcal{D}(\Omega_j); \ \ j = 1, \dots, n.$$

لاحظ أنّ $\sum_{i=0}^{n} \psi_i > 0$ لأنّه من أجل $x \in V$ لدينا:

$$\sum_{j=0}^{n} \psi_j = \sum_{j=1}^{n} \psi_j + \psi_0 > 0.$$

أما إذا كان $x \in C_{\mathbb{R}^n} V$ فإن $\psi_0 = 1$ ومنه $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} \psi_j}{\sum_{i=0}^{n} \psi_i}$ معرف جيدا.
نلاحظ أنّه من أجل $x \in W$ ، لدينا:

$$\psi_0 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \varphi_j = 1,$$

مع العلم أنّ W جوار لـ K.
وهو المطلوب. □

1.5 تمارين محلولة

تمرين 1.1
1. كيف يكتب الرمز x^α (حيث $x \in \mathbb{R}^n$ ، $\alpha \in \mathbb{N}^n$) في حالة $x = (t,s) \in \mathbb{R}^2$ ، $\alpha = (2,3)$ ؟
2. كيف يكتب الرمز x^α (حيث $x \in \mathbb{R}^n$ ، $\alpha \in \mathbb{N}^n$) في حالة $x = (u,v,w)$ ، $\alpha = (1,0,3)$ ؟

حل التمرين 1.1

1. $x^\alpha = t^2 s^3$.
2. $u.w^3$

تمرين 1.2
هل يمكن إنشاء تابع إختباري $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ موجب ويساوي 10 بجوار 0 ؟

حل التمرين 1.2

نعم، يكفي إعتبار تابع إختباري $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ يساوي 1 بجوار 0 ، ثمّ وضع $\varphi = 10.\psi$.

تمرين 1.3
هل يمكن إنشاء تابع إختباري $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ موجب ويساوي x^2 بجوار 0 ؟

حل التمرين 1.3
يكفي تطبيق النتيجة 1.1 التي تؤكد وجود تابع $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ يساوي 1 بجوار 0. ثم وضع $\varphi(x) = x^2\eta(x)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

تمرين 1.4
هل يمكن إنشاء تابع إختباري $\psi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ بحيث يكون $\psi'(x) \geqslant 0$ مهما كان $x \in]-1,1[$ ؟

حل التمرين 1.4

لا ، إلّا إذا كان $\psi \equiv 0$ لأنّ الشرط $\psi' \geqslant 0$ يعني أنّ ψ متزايد، علما أنّ $\psi(-1) = \psi(1) = 0$. وهذا لا يتحقق إلّا في حالة $\psi \equiv 0$.

تمرين 1.5
ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$ ، والتابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ $f(x) = |x|\varphi(x)$. هل $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ؟

حل التمرين 1.5
نضع $g(x) = |x|$ ، فيكون $f = g.\varphi$.
نلاحظ أنّ في المفتوح $\mathbb{R}^\star$ ، $g \in C^\infty(\mathbb{R}^\star)$ و $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^\star)$. ومنه $g.\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$. وعليه $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$. إذن $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

تمرين 1.6
1. تأكد من أنّ $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ:

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & : t > 0; \\ 0 & : t \leqslant 0, \end{cases}$$

من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$.

2. استنتج أنّ $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ المعرف بـ

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1; \\ 0 & : |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

ينتمي إلى $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ حيث يرمز $|\cdot|$ للنظيم الإقليدي، وكذلك عناصر المتتالية $\varphi_j(x) = j\dfrac{\varphi(jx)}{\varphi(0)}$.

3. ارسم بيانات بعض مثل هذه الدوال عندما يكون $n = 1$.

حل التمرين 1.6

.1

- **دراسة إستمرار ψ على $\mathbb{R}$.**

من أجل $t>0$: $\psi(t)=e^{-1/t}$ وهو تركيب تابعين مستمرين على $]0,+\infty[$ هما التابع الأسي والتابع $t\mapsto -\dfrac{1}{t}$ فهو مستمر على $]0,+\infty[$

من أجل $t<0$: $\psi(t)=0$ ثابت، فهو مستمر على $]-\infty,0[$.

- بقيت دراسة الإستمرار عند $t=0$. لدينا:

$$\lim_{t\to 0^+}\psi(t)=\lim_{t\to 0^+}e^{-1/t}=0=\lim_{t\to 0^-}\psi(t)=\psi(0).$$

أي أنّ ψ مستمر عند $t=0$.

وبالتالي نستنتج أنّ ψ مستمر على $\mathbb{R}$.

- **دراسة قابلية ψ للإشتقاق.**

- من أجل $t<0$: لدينا $\psi(t)=e^{-1/t}$ عبارة عن تركيب تابعين قابلين للإشتقاق لا نهائيا على المجال $]0,+\infty[$. وبالتالي فهو يقبل الإشتقاق لا نهائيا على المجال $]0,+\infty[$.

- من أجل $t<0$: لدينا $\psi(t)=0$ ، فهو يقبل الإشتقاق لا نهائيا على المجال $]-\infty,0[$.

- بقيت دراسة قابلية الإشتقاق عند $t=0$. لدينا:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t},$$

و

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\psi(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0,\ \ \lim_{t\to 0^+}\frac{\psi(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-1/t}}{t}=0.$$

ومنه نستنتج أنّ ψ يقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\psi'(0)=0$.

لنبيّن الآن أنّ $\psi^{(n)}(0)=0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لما $t>0$ ، لدينا:

$$\begin{aligned}
\psi^{(1)}(t) &= \frac{1}{t^2}e^{-1/t}, \qquad \psi^{(2)}(t)=\left(-\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)e^{-1/t},\\
\psi^{(3)}(t) &= \left(\frac{6}{t^4}-\frac{6}{t^5}+\frac{1}{t^6}\right)e^{-1/t}.
\end{aligned}$$

لنتأكد بالتراجع أنّ $\psi^{(n)}(t)$ يكتب على الشكل:

$$\psi^{(n)}(t)=P_n\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}, \tag{1.1}$$

مع P_n كثير حدود من الدرجة $2n$.

من أجل $n=1$ ، العلاقة (1.1) **محققة.**
نفرض أنّ (1.1) **محققة** من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$. لدينا:

$$\begin{aligned}\psi^{(n+1)}(t) &= P_n'\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}+P_n\left(\frac{1}{t}\right)(e^{-1/t})'\\ &= P_n'\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t^2}P_n\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}=Q_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}.\end{aligned}$$

ومنه العلاقة (1.1) **صحيحة.**
نبين بعد ذلك بالتراجع، أنّ $\psi^{(n)}(0)=0$. لدينا:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi^{(n)}(t)-\psi^{(n)}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}P_n\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}=0=\psi^{(n+1)}.$$

وهذا يعني أنّ ψ يقبل الإشتقاق لا نهائيا عند $t=0$. وبالتالي نستنتج من نظرية تمديد مشتقة أنّ $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$.

.2

- $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ذلك أنّ $\varphi=\psi\circ f$ حيث $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ x\mapsto 1-|x|^2$ و $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. كما أنّه متراص الحامل حيث $\operatorname{Supp}\varphi\subset\overline{B(0,1)}$. ومنه نستنتج أنّ $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
- φ_j عبارة عن تركيب تابعين من الصنف C^∞ :

$$\varphi_j: x\mapsto jx\mapsto\frac{j}{\varphi(0)}\varphi(jx).$$

ومنه $\varphi_j\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. كما أنّ φ_j متراص الحامل حيث $\operatorname{Supp}\varphi_j\subset\overline{B\left(0,\frac{1}{j}\right)}$. ومنه نستنتج أنّ $\varphi_j\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

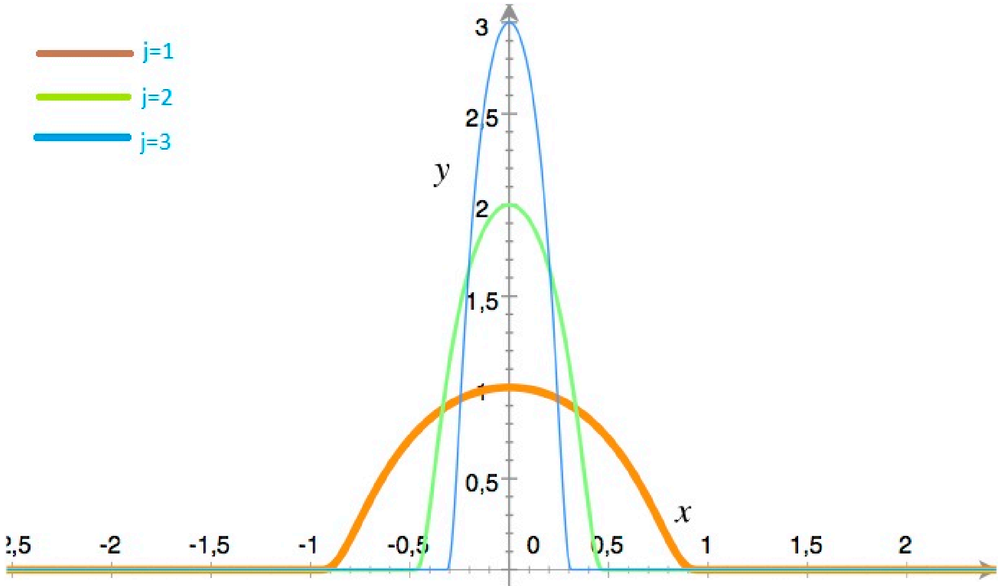
ملاحظة: لدينا من أجل $n=1$:

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi_j(x)\ \mathrm{d}x=\frac{j}{\varphi(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(jx)\ \mathrm{d}x\overset{jx=y}{=}\frac{1}{\varphi(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y,\ \ \forall j.$$

التكامل لا يتعلق بـ j وهذا يعني أنّ المساحة التي يحصرها بيان التابع ومحور الفواصل هي نفسها.
يمكننا تعريف متتالية صاقلة إنطلاقا من φ_j وهذا بوضع:

$$\psi_j(x)=\frac{\varphi_j(x)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x}.$$

.3



الشكل 1 : **الرسومات البيانية لـ** $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

تمرين 1.7

ليكن التابع $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right) & : |x| < 1, \\ 0 & : |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

1 ـ تأكد من أنّ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2 ـ نضع $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\mathrm{d}y$.

هل $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ؟ حدد حامله.

3 ـ نضع $f(x) = \varphi(x) - \varphi(x-3)$ و $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y$.

هل $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ ؟ حدد حامله.

حل التمرين 1.7

1 ـ $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ لأنّه تركيب تابعين من الصنف C^∞ ، كما أنّ حامله متراص حيث $\mathrm{Supp}\,\varphi = [-1, 1]$. ومنه نستنتج أنّ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (أنظر التفاصيل في التمرين السابق).

2 ـ لدينا $\psi' = \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ومنه $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. لنحدد الآن حامل ψ. نميز الحالات التالية:

- إذا كان $x < -1$: $\varphi(x) = 0$ ومنه $\psi(x) = 0$.
- إذا كان $-1 < x < 1$:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{x} \varphi(y)\mathrm{d}y > 0.$$

• إذا كان $x \geqslant 1$:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{x} \varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\mathrm{d}y + \int_{1}^{x} \varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\mathrm{d}y > 0.$$

ومنه نستنتج أنّ $\operatorname{Supp}\psi = [-1, +\infty[$.

لاحظ أنّ $\operatorname{Supp}\psi$ ليس متراص، فهو ليس إختباريا.

3 ـ لدينا $g' = f \in C^\infty(\mathbb{R})$. ومنه $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. لنحدد الآن حامل g. نلاحظ بالحساب المباشر أنّ $g(x) = \int_{x-3}^{x} \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ وأنّ $g(x) = 0$ لما $x < -1$ أو $x - 3 > 1$ أي $x > 4$.

ومنه

$$\operatorname{Supp} g \subset [-1, 4].$$

ثم

$$\forall x \in [-1, 4],\ \ [x-3, x] \subset [-1, 1].$$

إذن

$$x \in [-1, 4] \Rightarrow g(x) \neq 0.$$

ومنه

$$[-1, 4] \subset \operatorname{Supp} g.$$

الخلاصة. $\operatorname{Supp} g = [-1, 4]$.

تمرين 1.8

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi_n(x) = n\left[\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \varphi(x)\right].$$

1. اثبت أنّ $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.
2. اثبت أنّه لمّا n يؤول إلى $+\infty$ فإنّ φ_n تتقارب ببساطة نحو تابع يطلب تعيينه.

حل التمرين 1.8

1. إثبات أنّ $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

• بما أنّ $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ، والفرق بين تابعين من الصنف C^∞ هو من الصنف C^∞ ، فإنّ $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- φ متراص الحامل، ولذا فالتابع $x \mapsto \varphi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ متراص الحامل. ولدينا:

$$\text{Supp }\ \varphi_n \subset \text{Supp }\left(x \mapsto \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right) \cup \text{Supp}(x \mapsto \varphi(x)),$$

وهو ما يثبت تراص $\text{Supp}\,\varphi_n$ بوصفه محتوى في إتحاد متراصين.

2. إثبات أنّه لمّا n يؤول إلى $+\infty$ فإنّ φ_n تتقارب نحو تابع يطلب تعيينه.

لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to+\infty} n\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]=\lim_{1/n\to 0}\frac{\varphi\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\varphi(x)}{1/n}=\varphi'(x),$$

أي أنّ φ_n تتقارب ببساطة نحو التابع φ' لمّا n يؤول إلى $+\infty$.

تمرين 1.9

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ مع $\varphi \neq 0$.

ادرس التقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ للمتتالية ψ_n المعرفة بـ $\psi_n(x)=(n+1)^k\varphi(nx)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

حل التمرين 1.9

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ مع $\varphi \neq 0$. يوجد $a>0$ بحيث $\text{Supp}\,\varphi \subset [-a,a]$ حيث $a>0$.

- دراسة التقارب البسيط لـ ψ_n. ليكن x مثبتا في $\mathbb{R}$. نميّز ثلاث حالات:

1. لمّا $k=0$: نميز حالتين:

أ) ـ إذا كان $x=0$: المتتالية العددية ψ_n متقاربة نحو $\varphi(0)$.

ب) ـ إذا كان $x\neq 0$: المتتالية العددية ψ_n متقاربة نحو التابع المعدوم لأنّها منعدمة إبتداء من رتبة معينة.

ومنه نستنتج أنّه لمّا $k=0$ ، فإنّ متتالية التوابع ψ_n تتقارب ببساطة نحو التابع ψ المعرف بـ:

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & : x\neq 0,\\ \varphi(0) & : x=0.\end{cases}$$

2. لمّا $k<0$. المتتالية العددية ψ_n متقاربة ببساطة نحو التابع المعدوم $\psi=0$.

3. لمّا $k>0$. نميز حالتين:

- إذا كان $\varphi(0)=0$ فإنّ $\psi_n(0)$ متقاربة وإذا كان $\varphi(0)\neq 0$ فإنّ $\psi_n(0)$ متباعدة.
- ننتقل الآن إلى المرحلة الموالية في دراسة تقارب ψ_n في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. الحالات التي لا يوجد فيها تقارب بسيط، لا يوجد فيها تقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

لدينا الحالات التّالية:

1. لمّا $k=0$. نلاحظ أنّه إذا كان $\varphi(0)\neq 0$ فإنّ التابع ψ لا يقبل الإشتقاق عند $x=0$ ، أي أنّ $\psi\notin\mathcal{D}(\mathbb{R})$. ومنه لا يمكن لـ ψ_n أن تتقارب نحو التابع ψ.

أمّا إذا كان $\varphi(0)=0$ فإنّه واضح أنّ ψ_n متقاربة في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ نحو التابع المعدوم $\psi=0$.

2. لمّا $k<0$. لدينا:

أ ـ $\operatorname{Supp}\psi_n\subset K$ ،

ب ـ ليكن $j\in\mathbb{N}$ (مثلا $j>k$). لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in K}|\psi_n^{(j)}(x)-\psi^{(j)}(x)|=\lim_{n\to+\infty}n^{(j)}(n+1)^k\sup_{x\in K}|\varphi^{(j)}(nx)|.$$

إذن $\psi_n^{(j)}$ ليست متقاربة بإنتظام. ولذا ψ_n ليست متقاربة في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

تمرين 1.10

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث يوجد $a\in\mathbb{R}^\star$ يحقق $\varphi'(a)\neq 0$.

أدرس تقارب المتتالية $f_j(x)=j^{-1}\varphi(jx)$ في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

حل التمرين 1.10

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. يوجد $a>0$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi\subset[-a,a]$. حسب عبارة f_j ، اذا تقاربت (f_j) في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ فستتقارب نحو 0. لاحظ أنّ الشرط اللازم القائل بأن متتالية المشتقات (f_j') تتقارب بانتظام غير محقق، إذ أن:

$$\sup_{x\in K}|f_j'(x)-0|=\sup_{x\in K}|\varphi'(jx)|\geqslant|\varphi'(a)|>0.$$

إذ أن $\lim_{j\to+\infty}\sup_{x\in K}|f_j'(x)|\neq 0$. ومنه f_j غير متقاربة في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

ملاحظة: لاحظ أن الشرط الأول للتقارب محقق لأن $\operatorname{Supp}f_j\subset\left[\dfrac{-a}{j},\dfrac{a}{j}\right]$ من أجل كل j.

تمرين 1.11

ليكن K متراصا من $\mathbb{R}^n$. و $\varepsilon>0$

اثبت وجود تابع φ_ε يحقق:

أ) $\varphi_\varepsilon\geqslant 0$ ،

ب) $\forall x\in K,\ \varphi_\varepsilon(x)=1$.

جـ) $\operatorname{Supp}\varphi_\varepsilon\subset\bigcup_{x\in K}B(x,\varepsilon)$.

حل التمرين 1.11

باعتبار $\Omega=\bigcup_{x\in K}B(x,\varepsilon)$ في توطئة أورشون نجد المطلوب.

تمرين 1.12

لتكن $(K_j)_{j=1,\dots,p}$ متراصات غير متقاطعة مثنى مثنى من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $(f_j)_{j=1,\dots,p}$ دوال من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$. اثبت وجود $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ بحيث $f(x)=f_j(x)$ بجوار كل K_j.

حل التمرين 1.12

بما أنّ المتراصات $(K_j)_{j=1,\dots,p}$ غير متقاطعة مثنى مثنى، فإنّه توجد مفتوحات $(U_j)_{j=1,\dots,p}$ غير متقاطعة مثنى مثنى بحيث $K_j\subset U_j$. ومنه حسب توطئة أورشون، توجد توابع $\chi_j\in\mathcal{D}(U_j)$ تأخذ قيمها في $[0,1]$ بحيث $\chi_j=1$ على جوار K_j.

نضع $f=\sum j=1^n\chi_j f_j$. لدينا $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ و $f(x)=f_j(x)$ لأنّها مجموع توابع إختبارية، و $f(x)=f_j(x)$ بجوار كل K_j.

وهو المطلوب.

تمرين 1.13

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، وليكن $M>0$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi\subset[-M,M]$. انشيء عنصرا Φ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\forall x\in]-\infty,M|,\ \ \Phi'(x)=\varphi(x)$.

حل التمرين 1.13

إنّ تعيين $\Phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\forall x\in]-\infty,M[,\ \ \Phi'(x)=\varphi(x)$ يعني أنّ $\Phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ويحقق

$$\forall x\in]-\infty,M[,\ \ \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-M}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

تلك هي عبارة Φ على $]-\infty,M[$ وعلينا الآن تعيين Φ على $[M,+\infty[$ بحيث يكون Φ متراص الحامل ومن الصنف C^∞ على $\mathbb{R}$. لذلك نستعمل التابع المنبسط $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ حيث

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad 0\leqslant\chi(x)\leqslant 1;$$

$$\forall x\in K=[-M,M],\qquad \chi(x)=1,$$

ونضع

$$\forall x\geqslant M,\ \ \Phi(x)=\chi(x)\int_{-M}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

إذن Φ يحقق المطلوب.

تمرين 1.14

ليكن $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. اوجد شرطا حول ψ لكي يوجد $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\psi = \varphi + \varphi'$.

حل التمرين 1.14

نحل المعادلة التفاضلية الخطية $\psi = \varphi + \varphi'$ بإعتبار أي $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ وبالتالي يوجد $M > 0$ بحيث $\operatorname{Supp}\psi \subset [-M, M]$. حل المعادلة يكتب على الشكل:

$$\varphi(x) = e^{-x}\int_{-M}^{x} e^t\psi(t)\mathrm{d}t.$$

من الواضح أنّ $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ وأنّ $\varphi(x) = 0$ لما $x < -M$ (لأنّ $\operatorname{Supp}\psi \subset [-M, M]$). ثمّ إذا إفترضنا أنّ $\int_{-M}^{M} e^t\psi(t)\mathrm{d}t = 0$ فهذا يؤدي إلى $\varphi(x) = 0$ لمّا $M < x$.

الخلاصة هي أنّ الشرط $\int_{-M}^{M} e^t\psi(t)\mathrm{d}t = 0$ يضمن وجود حل لـ $\psi = \varphi + \varphi'$ في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ وهو شرط لازم.

تمرين 1.15

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، وليكن $M > 0$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi \subset [-M, M]$.

ما هو الشرط حول φ بحيث يوجد $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ يحقق $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi'(x) = \varphi(x)$.

حل التمرين 1.15

أذا كان $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ فلا بد أن يكتب على الشكل

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

فنلاحظ أنّ Φ يحقق $\Phi'(x) = \varphi(x)$ وأنّه من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$.

لكي يكون Φ ذا سند متراص، يجب

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x) = \lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 0.$$

أي أنّه تحت الشرط $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$ ، يوجد تابع إختباري Φ يحقق $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi'(x) = \varphi(x)$ ، وهو معطى بـ $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t$.

هذا الشرط يكافيء $\int_{-M}^{M}\varphi(t)\mathrm{d}t=0$ وهو كاف لكي يكون $\Phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ لأنّ $\int_{-M}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=0$ لمّا $x<0$. كما أنّ الشرط $\int_{-M}^{M}\varphi(t)\mathrm{d}t=0$ و $\operatorname{Supp}\varphi\subset[-M,M]$ يستلزم أنّ $\int_{-M}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=0$ لمّا $x>0$. هذا يعني أنّ $\operatorname{Supp}\Phi\subset[-M,M]$.

الخلاصة: الشرط اللّازم والكافي هو $\int_{-M}^{M}\varphi(t)\mathrm{d}t=0$.

تمرين 1.16

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، وليكن $M>0$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi\subset[-M,M]$. ..

ما هو الشرط حول φ كيفي بحيث يوجد $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ يحقق

$$\forall x\in]-\infty,M[,\psi''(x)=\varphi(x).$$

حل التمرين 1.16

لدينا

$$\psi'(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

حتى يكون $\operatorname{Supp}\psi'\subset]-M,M[$ ، يجب أن تكون

$$\lim_{x\to+\infty}\psi'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)\mathrm{d}s=\int_{-M}^{M}\varphi(s)\mathrm{d}s=0.$$

لدينا بالمكاملة بالتجزئة أنّ

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi'(s)\mathrm{d}s=[s\psi'(s)]_{-\infty}^{x}-\int_{-\infty}^{x}s\varphi(s)\mathrm{d}s$$

حتى يكون ψ ذا سند متراص، يجب أن يكون

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=0=-\int_{-M}^{M}s\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

ومنه الشرط اللّازم على φ لوجود ψ هو:

$$\int_{-M}^{M}\varphi(s)\mathrm{d}s=0 \quad \text{و} \quad \int_{-M}^{M}s\varphi(s)\mathrm{d}s=0.$$

ونتحقق بسهولة أنّ هذا الشرط كاف. وهو المطلوب.

باب 2

التوزيعات Distributions

2.1 مدخل إلى التوزيعات

نعتبر في كل ما يأتي Ω مفتوحا غير خال من $\mathbb{R}^n$.

تعريف 2.1
نسمي توزيعا على Ω كل تطبيق $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ خطي ومستمر.

هذا يعني أنّ التوزيع شكل خطي ومستمر على $\mathcal{D}(\Omega)$.

مبرهنة 2.1
مجموعة التوزيعات على Ω تشكل فضاء شعاعيا نرمز له بـ $\mathcal{D}'(\Omega)$ ، وهو الثنوي الطوبولوجي لـ $\mathcal{D}(\Omega)$.

إذا كان $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ نرمز لقيمة T عند φ من $\mathcal{D}(\Omega)$ بـ $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$.

نظرية 2.1 (استمرار توزيع)
ليكن $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ شكلا خطيا. يكون T مستمرا إذاا:
مهما كان K متراصا من Ω ، يوجد ثابت $C \geqslant 0$ ويوجد $m \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{|\alpha| \leqslant m, x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|. \tag{2.1}$$

$\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ يعني أن $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ و $\operatorname{Supp} \varphi \subset K$.

ترميز.
نضع:

$$p_{K,m}(\varphi)=\sup_{|\alpha|\leqslant m, x\in K}|D^{\alpha}\varphi(x)|.$$

ونكتب العلاقة (2.1) في النظرية، كما يلي:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}_K(\Omega):|\langle T,\varphi\rangle|\leqslant Cp_{K,m}(\varphi).$$

ملاحظات:

1) نلاحظ أنّ المتتالية الحقيقية $(p_{K,m}(\varphi))_{m\in\mathbb{N}}$ متزايدة.

2) يمكن اثبات استمرار توزيع T بإستعمال المتتاليات: كلما كان $\varphi\to(\varphi_n)$ في $\mathcal{D}(\Omega)$ كان $T(\varphi)\to(T(\varphi_n))$ في $\mathbb{C}$.

3) بما أنّ T خطي يمكن إثبات إستمراره كما يلي: كلما كان $0\to(\varphi_n)$ في $\mathcal{D}(\Omega)$ كان $0\to(T(\varphi_n))$ في $\mathbb{C}$.

رتبة توزيع:

إذا كان m في العلاقة (2.1) من تعريف الإستمرار مستقلا عن K، نقول عن T إنّه توزيع متهي الرّتبة.

إذا تحقّقت العلاقة (2.1) من أجل m طبيعي فإنّها محقّقة من أجل كل $q\in\mathbb{N}$ حيث $q\geqslant m$ (لكنها ليست بالضرورة محقّقة من أجل $q<m$).

تعريف 2.2 [تعريف رتبة توزيع]

إذا كان توزيع T متهي الرتبة، نسمي رتبة T أصغر عدد m يحقق الخاصية (2.1).

تعريف 2.3 [تعريف قياس رادون - *Mesure de Radon*]

قياس رادون هو كل توزيع رتبته معدومة.

أمثلة:

1• **توزيع ديراك** Dirac : ليكن $a\in\Omega$. نعرف توزيع ديراك عند a بـ:

$$\mathcal{D}(\Omega)\ni\varphi\longmapsto\delta_a(\varphi)=\varphi(a)\in\mathbb{C}.$$

أ) δ_a معرف جيدا لأنّ $\varphi(a)$ موجود.

ب) δ_a خطي.

جـ) إستمرار δ_a : ليكن K متراصا من Ω ، وليكن $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. لدينا:

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leqslant \sup_{x \in K} |\varphi(x)| = 1 \times p_{K,0}(\varphi).$$

إذن δ_a مستمر.
من أ)، ب) وجـ) نستنتج أنّ δ_a توزيع على Ω متهي الرّتبة ورتبته $m = 0$. ولذا فهو قياس رادون.

ملاحظة:
إذا كان $a = 0$ ، نرمز لتوزيع ديراك عند النقطة 0 بـ: δ

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \longmapsto \delta(\varphi) = \varphi(0) \in \mathbb{C}.$$

2• **التوزيعات المعرفة بتابع** L^1_{loc} **:** كل عنصر f من $L^1_{loc}(\Omega)$ يعرف توزيعا T_f بـ:

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \longmapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{C}.$$

أ) T_f معرف جيدا لأنّ التكامل $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$ موجود بفضل تراص $\mathrm{Supp}\,\varphi$.
ب) T_f خطي.
جـ) إستمرار T_f. ليكن K متراصا من Ω ، وليكن $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. لدينا:

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_\Omega f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_K f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \leqslant C_K\, p_{K,0}(\varphi),
\end{aligned}$$

حيث $C_K = \int_K |f(x)|\ \mathrm{d}x$ ثابت. وهكذا يوجد ثابت C_K ويوجد $m = 0$ بحيث $|\langle T_f, \varphi \rangle| \leqslant C_K\, p_{K,0}(\varphi)$. وبالتالي T_f توزيع على Ω رتبته 0 (فهو قياس رادون).

ملاحظة:
يمكن إستعمال الترميز $T_f \equiv f$.

3• **القيمة الرئيسية لكوشي** $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$. نضع:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x.$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. يوجد $a > 0$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi \subset [-a,a]$ ، أي أنّه لدينا:

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x\right\}.$$

أ) $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ معرف جيدا. نعلم أنّ

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

بإستعمال تبديل المتغير $u = tx$ مع $t \in [0,1]$ ، نجد:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t.$$

نضع $\psi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t$ ، ولدينا:

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{|x|>\varepsilon} \psi(x)\ \mathrm{d}x.$$

أي أنّ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{a} \psi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x)\ \mathrm{d}x\right].$$

من جهة، بما أنّ التّابع $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ فردي، لدينا:

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x - \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x = 0.$$

ومن جهة اخرى، ψ تابع مستمر على $\mathbb{R}$ ، ولذا:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{a} \psi(x)\ \mathrm{d}x\right] = \int_{-a}^{0} \psi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} \psi(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \psi(x)\ \mathrm{d}x.$$

ومنه

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \psi(x)\ \mathrm{d}x.$$

وبالتالي، $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ معرف جيدا.

ب) $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ خطي. واضح.

جـ) إستمرار $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$. ليكن K متراصا من $\mathbb{R}$ ، وليكن $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. يوجد $a > 0$ بحيث $K \subset [-a,a]$.

ومنه:

$$\begin{aligned}
|\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle| &= \left|\int_{-a}^{a} \psi(x)\ \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-a}^{a} |\psi(x)|\ \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{-a}^{a} \left(\int_{0}^{1} |\varphi'(tx)|\,\mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x \\
&\leqslant \sup_{y\in K} |\varphi'(y)| \int_{-a}^{a} \left(\int_{0}^{1} \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2ap_{K,1}(\varphi).
\end{aligned}$$

إذن $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ مستمر.

نستنتج مما سبق أنّ $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ توزيع على $\mathbb{R}$ متهي الرّتبة ورتبته $m \leqslant 1$.

• لنبيّن أنّ رتبة التّوزيع $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ هي $m=1$. يكفي لذلك إثبات أنّ رتبة $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ لا تساوي 0. أي نبيّن أنّه يوجد متراص K من Ω بحيث من أجل كل ثابت $C \geqslant 0$ لدينا:

$$\exists \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : \left|\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle\right| > C||\varphi||_\infty.$$

نعتبر متتالية توابع منبسطة $(\varphi)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ تحقق:

- $\mathrm{Supp}\,\varphi_n \subset [-2,2]$ ،
- $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$ ،
- $\varphi_n(x) = 1,\ \ \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ ،
- $\varphi_n(x) = 0,\ \ \forall x \in \left]-2, \frac{1}{2n}\right[$.

من جهة لدينا $||\varphi_n||_\infty = 1$. ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi_n\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x}\ \mathrm{d}x\right] \\
&= \int_{1/2n}^{1/n} \frac{\varphi_n(x)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{1/n}^{1} \frac{\varphi_n(x)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x}\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\geqslant \int_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \ln(n).$$

ومن ثمّ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi_n \right\rangle = +\infty$.
ومنه نستنتج أنّ رتبة $\mathrm{vp}(1/x)$ لا تساوي الصفر، فهي إذن تساوي 1.

4• نعتبر التّوزيع

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0). \end{array}$$

- **إثبات أنّ رتبة T تساوي** 1.

لذلك يكفي إثبات أنّ رتبة T لا تساوي الصفر، وهذا يعود إلى إيجاد متراص K ومتتالية توابع إختبارية $(\varphi_n) \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ بحيث $\langle T, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0) \to +\infty$ و $||\varphi_n||_\infty < +\infty$.
نعتبر متتالية التّوابع الإختبارية (φ_n) المعرفة بـ

$$(\varphi_n) = (f_n \chi)$$

حيث $f_n(x) = \sin(nx)$ و χ تابع منبسط يحقق $\forall x \in [-1,1] : \chi(x) = 1$.
نلاحظ أنّ $\mathrm{Supp}\, \varphi_n \subset \mathrm{Supp}\, \chi = K$.
لدينا:

$$\varphi_n'(0) = f_n'(0)\chi(0) + f_n(0)\chi'(0) = n.$$

ومنه: $\langle T, \varphi_n \rangle = n$ و $\sup_x |\varphi_n| = 1$. وبالتالي نستنتج أنّ رتبة T لا تساوي 0.

2.2 التقارب في $\mathcal{D}'(\Omega)$

تعريف 2.4
لتكن (T_j) متتالية توزيعات، وليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. نقول عن (T_j) إنها تتقارب في $\mathcal{D}'(\Omega)$ نحو T إذا

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_j, \varphi \rangle \xrightarrow{j\to+\infty} \langle T, \varphi \rangle.$$

ونكتب $(T_j) \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T$.

لدينا النظرية التّالية:

نظرية 2.2
لتكن المتتالية $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ تحقق:
1) $\operatorname{Supp} f_j \subset \overline{B}(0, \varepsilon_j)$ مع $\varepsilon_j \to 0$.
2) $\forall j \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\ \mathrm{d}x = 1$.
3) $\forall j \in \mathbb{N} : f_j \geqslant 0$.
عندئذ:

$$f_j \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} \delta.$$

- إثبات النظرية:

العلاقة $f_j \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} \delta$ تعني:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \langle f_j, \varphi\rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0),$$

أي أنّ:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \to \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0) f_j(x)\mathrm{d}x.$$

وبما أنّ $\operatorname{Supp} f_j \subset \overline{B}(0, \varepsilon_j)$ ، فإن ذلك يأتي من

$$\int_{\overline{B}(0,\varepsilon_j)} f_j(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|\ \mathrm{d}x \xrightarrow{\mathbb{C}} 0.$$

لإثبات النظرية يكفي إذن إثبات العلاقة الأخيرة.

نلاحظ أنّ التّابع $x \mapsto |\varphi(x) - \varphi(0)|$ مستمر على المتراص $\overline{B}(0, \varepsilon_j)$ ، فهو محدود ويدرك حديه الأعلى والأدنى. ومن ثمّ

$$\exists y_j \in \overline{B}(0, \varepsilon_j) : \sup_{x \in \bar{B}(0,\varepsilon_j)} |\varphi(x) - \varphi(0)| = |\varphi(y_j) - \varphi(0)|,$$

حيث أنّ $y_j \to 0$ لمّا $j \to +\infty$ (لأنّ $\varepsilon_j \to 0$ لمّا $j \to +\infty$). وبالتالي:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\overline{B}(0,\varepsilon_j)} f_j(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|\ \mathrm{d}x\right| &\leqslant \sup_{x \in \overline{B}(0,\varepsilon_j)} |\varphi(x) - \varphi(0)| \int_{\overline{B}(0,\varepsilon_j)} f_j(x)\ \ \mathrm{d}x \\ &= |\varphi(y_j) - \varphi(0)| \xrightarrow{j \to +\infty} |\varphi(0) - \varphi(0)| = 0. \end{aligned}$$

وهو المطلوب. □

نظرية 2.3
ليكن $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ و $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
إنّ القضيتان التاليتان متكافئتان:
1) $T_f = 0$ (أي $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi = 0$).
2) $f = 0$ شك على Ω.

ملاحظة وإستنتاج:
نعتبر التطبيق الخطي

$$\begin{array}{rcl} L^1_{loc}(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \mapsto & T_f. \end{array}$$

لدينا حسب النظرية السابقة:

$$T_f = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ شك},$$

وهذا يعني أنّ التطبيق متباين.
سؤال: هل هذا التّابع مستمر؟ أي هل لدينا الإستلزام التّالي:

$$f_j \xrightarrow{L^1_{loc}} 0 \Rightarrow T_{f_j} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0?$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. ومنه يوجد متراص K بحيث $\operatorname{Supp} \varphi \subset K \subset \Omega$.
لدينا:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\langle T_{f_j}, \varphi \rangle| &\leqslant \int_\Omega |f_j(x)\varphi(x)| \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_K |f_j(x)\varphi(x)| \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |f_j(x)| \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

ونستنتج من الفرض $\int_K |f_j(x)| \, \mathrm{d}x \xrightarrow{j\to+\infty} 0$ ، أنّ $\langle T_{f_j}, \varphi \rangle \xrightarrow{j\to+\infty} 0$. ومنه إستمرار التطبيق. إذن التطبيق خطي ومتباين ومستمر.
لذلك نقول عن $L^1_{loc}(\Omega)$ إنّه منغمس في $\mathcal{D}'(\Omega)$ ، ونكتب:

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

نستنتج أنّ $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ مهما يكن $p \geqslant 1$.

قضية 2.1
لتكن (f_j) متتالية توابع من $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. نفرض أنّ
1. $f_j \to f$ شك.
2. $\exists g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : |f_j(x)| \leqslant g(x)$.

عندئذ،

$$T_{f_j} \equiv f_j \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} f \in L^1_{loc}.$$

ملاحظة: $\mathcal{D}(\Omega)$ منغمس في $L^1_{loc}(\Omega)$ والذي هو منغمس في $\mathcal{D}'(\Omega)$. ونكتب:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

2.3 الإشتقاق في $\mathcal{D}'(\Omega)$

تعريف 2.5
ليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. لدينا:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle \partial_i T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_i \varphi \rangle.$$

ملاحظة:

$$\begin{array}{rcl} \partial_i T : \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \langle \partial_i T, \varphi \rangle \end{array}$$

توزيع، لأنّ:
1. $\partial_i T$ معرف جيدا لأنّ مشتق تابع إختباري هو تابع إختباري. وبالتّالي القوس التّوزيعي $\langle T, \partial_i \varphi \rangle$ له معنى.
2. الخطية واضحة.
3. الإستمرار: ليكن K متراصا محتوى في Ω وليكن φ من $\mathcal{D}_K(\Omega)$. بما أنّ T توزيع فإنّه يوجد $C \geqslant 0$ و $m \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|\langle \partial_i T, \varphi \rangle| \leqslant C p_{K,m+1}(\varphi).$$

ومنه $\partial_i T$ مستمر.

من 1 ، 2 و 3 نستنتج أنّ $\partial_i T$ توزيع على Ω.

خلاصة:

1. أي توزيع يقبل الإشتقاق لا نهائيا (بمفهوم التوزيعات).
2. إذا كان T توزيعا متهي الرّتبة فإنّ كل مشتقاته متهية الرّتبة.

3 إذا كانت رتبة توزيع تساوي m فإنّ رتبة مشتقه أقل أو تساوي $m+1$.

تعميم:
ليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. لدينا:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

لدينا النظرية التّالية:

نظرية 2.4
ليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ، ولتكن (T_j) متتالية من $\mathcal{D}'(\Omega)$. لدينا:

$$T_j \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{\longrightarrow} T \Rightarrow D^\alpha T_j \longrightarrow D^\alpha T, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

الإثبات:
ليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ولتكن (T_j) متتالية من $\mathcal{D}'(\Omega)$.
إثبات أنّ $D^\alpha T_j \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{\longrightarrow} D^\alpha T$ يعود إلى إثبات أنّ

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \lim_{j\to+\infty}\langle D^\alpha T_j, \varphi\rangle = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle.$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to+\infty}\langle D^\alpha T_j, \varphi\rangle &= \lim_{j\to+\infty}(-1)^{|\alpha|}\langle T_j, D^\alpha \varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha}(-1)^{|\alpha}\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

وهو المطلوب. □

أمثلة:

1. نعتبر تابع هيفسايد H المعرف بـ:

$$H(x) = \begin{cases} 1: & x > 0, \\ 0: & x \leqslant 0 \end{cases}$$

لدينا $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. ومنه H يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

حساب H' في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned}
\langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle \\
&= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -[\varphi(x)]_0^{+\infty} \\
&= -\varphi(+\infty) + \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

أي أنّ $H' = \delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ملاحظة:
التّابع H ليس مستمرا على $\mathbb{R}$ لكنه يقبل الإشتقاق بمفهوم التّوزيعات.

2. ليكن f تابعا يقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. لدينا

$$(T_f)' = T_{f'}.$$

بالفعل،

$$\begin{aligned}
\langle T_f', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -[f\varphi]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \langle f', \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

وهذا يعني أنّ $T_f' = T_{f'}$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

نظرية 2.5 [نظرية القفزات]
ليكن f تابعا من الصنف $C^1\left(\mathbb{R}\backslash \bigcup_{i=1}^{p} a_i\right)$ حيث $a_1, \ldots, a_p$ نقاط من $\mathbb{R}$.
نفرض أنّ $\lim\limits_{x\to a_i^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a_i^+} f(x)$ موجودتان ومتهيتان عند كل $(a_i)_{i=1,\ldots,p}$.
نضع $\sigma_i = \lim\limits_{x\to a_i^+} f(x) - \lim_{x\to a_i^-} f(x)$. عندئذ

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \delta_{a_i},$$

حيث f' هو مشتق f بالمفهوم الإعتيادي.
تسمى σ_i قفزة f عند a_i.

ملاحظة 2.1
نلاحظ أن شروط النظرية كافية وليست لازمة. بمعنى أنه يمكن ألّا تتحقق شروط النظرية مع صحة نتيجتها.
ومن جهة أخرى، فدستور القفزات ليس صحيحا في كل الأحوال. على سبيل المثال، إذا كان عدد نقاط التقطع غير منته فقد تسقط نتيجة النظرية كما يبيّن المثال المضاد التالي:
نعتبر الدالة $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [-1, 0], \\ -nx + 1 & : x \in \left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

نضع $a_n = \dfrac{1}{n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^\star$. نلاحظ أن النقاط $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ كلها نقاط تقطع من النمط الأول وأن

$$\lim_{x\to a_n^-} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a_n^+} f(x) = \frac{1}{n}.$$

ولذلك فالقفزة σ_{a_n} عند كل نقطة a_n هي

$$\sigma_{a_n} = \lim_{x\to a_n^+} f(x) - \lim_{x\to a_n^-} f(x) = \frac{1}{n}.$$

كما نلاحظ أن $f \in C^1\left([-1, 1] - \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} a_n\right)$.

ومن ثم لو كانت نتيجة النظرية محققة في حالة عدد غير منته من نقاط التقطع لكان الحد الثاني في الطرف الثاني من دستور القفزات سلسلة متقاربة، أي أنه يجب أن تكون السلسلة $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \sigma_{a_n} \delta_{a_n}$ متقاربة.
لكننا نلاحظ بأنه عند اعتبار دالة اختبارية $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ مساوية لـ 1 في المجال المتراص $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ فإننا نجد

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \sigma_{a_n} \langle \delta_{a_n}, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{n}.$$

وهذه السلسلة متباعدة. إذن دستور القفزات غير صالح في هذه الحالة.

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.2
ليكن $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ، حيث

$$\forall i = 1, \ldots, n, \ \ \partial_i T = 0.$$

عندئذ يكون T توزيعا ثابتا.

أمثلة:

1. نعتبر التّابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \chi_{]0,1]} + (2-x)\chi_{]1,2]}$ ، أي أنّ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[\\ 1 & : x \in]0, 1] \\ 2-x & : x \in]1, 2]. \end{cases}$$

لاحظ أنّ التّابع f غير مستمر على $\mathbb{R}$ وله قفزة عند $x = 0$ تساوي 1.

حساب T'_f في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: نلاحظ أنّ $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ فهو يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_f, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \varphi(x) \ \mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

لدينا:

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_0^1 \varphi'(x) \ \mathrm{d}x - \int_1^2 (2-x)\varphi'(x) \ \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 \varphi'(x) \ \mathrm{d}x = [\varphi(x)]_0^1 = \varphi(1) - \varphi(0),$$

وباستعمال المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\int_1^2 (2-x)\varphi'(x) \mathrm{d}x = -\varphi(1) + \int_1^2 \varphi(x) \ \mathrm{d}x.$$

ومنه،

$$\langle (T_f)', \varphi\rangle = \varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(1) - \int_1^2 \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \varphi(0) - \int_1^2 \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle \delta - \chi_{[1,2]}, \varphi\rangle.$$

وبالتّالي نستنتج أنّ $T_f' = \delta - \chi_{[1,2]}$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

حساب T_f' باستعمال نظرية القفزات.
نلاحظ أنّ التّابع f لديه قفزة عند النقطة $x = 0$ حيث

$$\sigma_1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 - 0 = 1.$$

ومنه حسب نظرية القفزات لدينا:

$$T_f' = T_{f'} + \delta,$$

حيث $f'(x) = -\chi_{]1,2]}$. أي أنّ

$$T_f' = -\chi_{]1,2]} + \delta,$$

وهي النتيجة المحصل عليها آنفا.

2. نعتبر التّابع g المعرف على $\mathbb{R}$. بـ $g(x) = x|x|$
نلاحظ أنّ $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ومنه g يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle g, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} x|x|\ \mathrm{d}x.$$

حساب $(T_g)'$: نلاحظ أنّ g مستمر على $\mathbb{R}$ ومنه حسب نظرية القفزات، لدينا $(T_g)' = T_{g'}$ ، حيث:

$$g'(x) = \begin{cases} -2x & : x \in]-\infty, 0[, \\ 2x & : x \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

ثم إنّ $g' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ فهو يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_{g'}, \varphi\rangle = -2\int_{-\infty}^0 x\varphi(x)\ \mathrm{d}x + 2\int_0^{+\infty} x\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

حساب $(T_g)''$: باستعمال القفزات: نلاحظ أنّ g' مستمر، إذن

$$(T_g)'' = (T_{g'})' = T_{g''},$$

و

$$g''(x) = \begin{cases} -2 & : x < 0, \\ 2 & : x > 0. \end{cases}$$

ومنه

$$(T_g)'' = -2\chi_{]-\infty,0[} + 2\chi_{]0,+\infty[}.$$

حساب $(T_g)'''$ **:** باستعمال نظرية القفزات لدينا:

$$(T_g)''' = (T_{g''})' = T_{g'''} + 4\delta,$$

لكن $T_{g'''} = 0$ ، ومنه

$$(T_g)''' = 4\delta.$$

3. **حساب** $(\log|x|)'$.

لنبيّن أوّلا أنّ $\log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

لدينا $\log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^\star)$ لأنّ $\log|x|$ مستمر على $]-\infty,0[$ وعلى $]0,+\infty[$. يبقى إثبات أنّ $\log|x|$ كمول بجوار الصفر. لدينا من أجل كل $a > 0$:

$$\int_0^a \log|x| \ \mathrm{d}x = [x\log(x) - x]_0^a = a\log(a) - a < +\infty.$$

وبالمثل نبيّن أنّ $\int_{-a}^0 \log|x| \ \mathrm{d}x < +\infty$.

ومنه $\log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. فهو يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle \log|x|, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \log|x|\varphi(x) \ \mathrm{d}x.$$

إذن يمكن كتابة هذا التكامل على الشكل:

$$\langle \log|x|, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \log(x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x\right\}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \langle (\log|x|)', \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \ \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \ \mathrm{d}x\right\} \\ &= \langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

ملاحظة مهمة:

لا يمكن إستعمال نظرية القفزات لحساب $(\log|x|)'$ لأنّ النهايتين على يمين الصفر وعلى يساره غير موجودتين.

2.4 العمليات على التوزيعات

إقتصار توزيع

تمديد تابع إختباري:

ليكن Ω و Ω' مفتوحين غير خاليين من $\mathbb{R}^n$ حيث $\Omega \subset \Omega'$. يمكن تمديد عنصر φ من $\mathcal{D}(\Omega)$ إلى عنصر $\tilde{\varphi}$ من $\mathcal{D}(\Omega')$ بالطريقة التّالية:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & : x \in \operatorname{Supp}\varphi, \\ 0 & : x \in \Omega' \backslash \operatorname{Supp}\varphi. \end{cases}$$

عكسيا، إذا كان $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ مع $\operatorname{Supp}\varphi \subset \Omega$ فإنّ $\varphi_{|\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

تعريف 2.6 [تعريف إقتصار توزيع]
ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ و $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. إذا كان U مفتوحا من Ω فإننا نعرف إقتصار T على U، والذي نرمز له $T_{|U}$، بـ

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(U), \langle T_{|U}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

لدينا النظرية التالية:

نظرية 2.6
ليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ و $f \in C^\infty(\Omega)$. نعرف fT بالعلاقة

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle.$$

عندئذ: $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

الإثبات:

لنبيّن أنّ التطبيق

$$\begin{aligned} fT : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle \end{aligned}$$

توزيع على Ω.

1) fT معرف جيدا لأنّ $\psi = f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ و T توزيع. ومنه $\langle fT, \varphi\rangle$ موجود.

2) الخطية. واضحة.

3) الاستمرار. ليكن K متراصا، وليكن $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. لدينا:

$$|\langle fT, \varphi\rangle| = |\langle T, f\varphi\rangle| \leqslant Cp_{K,m}(f\varphi).$$

نعلم أنّ

$$p_{K,m}(f\varphi) = \sup_{x\in K, |\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(f\varphi)(x)|$$

و

$$D^\alpha(f\varphi) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\alpha^\beta (D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta\varphi).$$

ومنه يوجد ثابت $M > 0$ (يتعلق بـ f) بحيث:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K, |\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(f\varphi)(x)| &\leqslant M\sum_{\beta\leqslant\alpha} \sup_{x\in K}|D^\beta\varphi(x)| \\ &\leqslant Cp_{K,m}(\varphi).\end{aligned}$$

وعليه:

$$|\langle fT, \varphi\rangle| \leqslant Cp_{K,m}(\varphi).$$

ومنه fT مستمر.

من 1) و 2) و 3) نستنتج أنّ fT توزيع على Ω. وهو المطلوب. □

ملاحظة:

لا يوجد تعريف لجداء توزيعين يتمتّع بخواص جداء تابعين.

2.5 حامل توزيع - Support d'une distribution

تعريف 2.7 [تعريف مفتوح إنعدام توزيع]

ليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ، وليكن w مفتوحا من Ω.

نقول إنّ w مفتوح إنعدام T إذا كان w أكبر مفتوح ينعدم عليه T :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(w), \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(w),\mathcal{D}(w)} = 0.$$

تعريف 2.8 [تعريف حامل توزيع نقطة ـ نقطة]
نقول عن نقطة x إنها تنتمي إلى حامل توزيع T إذا كان من أجل كل جوار V لـ x ، يوجد تابع إختباري φ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi \subset V$ و $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$.

لدينا النظرية التّالية:

نظرية 2.7
إن كل توزيع $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ يقبل مفتوح إنعدام ω.

الإثبات:
لتكن $(U_i)_{i\in I}$ المفتوحات من Ω التي ينعدم عليها T. نضع $w = \bigcup_{i\in I} U_i$. لدينا:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(U_i) : \langle T, \varphi\rangle = 0.$$

لنثبت أنّ مفتوح إنعدام T هو w ، أي أنّ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(w) : \langle T, \varphi\rangle = 0.$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(w)$. هذا يعني أنّ

$$\operatorname{Supp}\varphi = K \subset \omega = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

ولمّا كان K متراصا فإنّ:

$$\exists (U_i)_{i=1,\dots,N} : K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i.$$

بتطبيق نظرية تجزئة الوحدة نجد أنّه يوجد (ψ_i) من $\mathcal{D}(U_i)$ بحيث $0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$ و $\sum_{i=1}^{N}\psi_i = 1$ في جوار لـ K. إذن

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi(x)\psi_i(x) = \varphi(x), \ \ \forall x \in \Omega.$$

ومنه

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \left\langle T, \sum_{i=1}^{N} \varphi(x)\psi_i(x)\right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle T, \varphi\psi_i\rangle_{\mathcal{D}'(U_i),\mathcal{D}(U_i)} = \sum_{i=1}^{N} 0 = 0.$$

إذن $\langle T,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}=0$.
وهو المطلوب. □

مثال: تعيين $\operatorname{Supp}\delta$.

لتعيين $\operatorname{Supp}\delta$ نعين مفتوح الإنعدام w ، أي الذي من أجله لدينا:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(w):\langle\delta,\varphi\rangle=0,$$

ويكون w أكبر مفتوح يحقق هذه الخاصية.

نضع $F=\{0\}$ ونبين أنّ $\operatorname{Supp}\delta=F$. يعود ذلك إلى إثبات أنّ $\omega=\mathbb{R}^\star$ هو مفتوح الإنعدام.

1) نلاحظ أنّ $\mathbb{R}^\star$ يمثل إتحاد مجالين مفتوحين من $\mathbb{R}$ فهو مفتوح في $\mathbb{R}$.

2) ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$. نلاحظ أنّ ذلك يؤدّي بالضرورة إلى

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)=0.$$

3) إثبات أنّ ω هو أكبر مفتوح ينعدم عليه δ .

نفرض أنّه يوجد مفتوح من $\mathbb{R}$ أكبر من $\mathbb{R}^\star$ ينعدم عليه δ. فهذا المفتوح هو $\mathbb{R}$. وبالتّالي سيكون

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\langle\delta,\varphi\rangle=0,$$

وهذا غير ممكن. نأخذ مثلا

$$\varphi(x)=\begin{cases}\exp(1/(x^2-1)) & |x|<1,\\ 0 & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

فنجد

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)=\frac{1}{e}\neq 0.$$

ولذا فإنّ $\omega=\mathbb{R}^\star$ هو أكبر مفتوح ينعدم عليه δ. وبالتالي، $\operatorname{Supp}\delta=\{0\}$.

نظرية 2.8
ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ و $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$. إذا كان $\varphi=0$ بجوار $\operatorname{Supp}T$ فإن $\langle T,\varphi\rangle=0$.

الإثبات:

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ و $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$. نفرض أنّ $\varphi=0$ بجوار مفتوح V لـ $\operatorname{Supp}T$. لدينا:

$$\operatorname{Supp}\varphi\subset C_\Omega V\subset C_\Omega\operatorname{Supp}T=w.$$

هذا يعني أنّ $\varphi \in \mathcal{D}(w)$. ومنه $\langle T, \varphi \rangle = 0$. $\square$

ملاحظة:

$\varphi = 0$ على $\operatorname{Supp} T$ لا يستلزم أنّ $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

مثال مضاد:

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. نعرف التوزيع δ' بـ $\langle \delta', \varphi >= -\varphi'(0)$.

لدينا $\operatorname{Supp}\ \delta' = \{0\}$. ليكن $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\psi = 1$ في جوار $x = 0$. نضع $\varphi(x) = x\psi(x)$.

نلاحظ أنّ $\varphi(0) = 0$ أي أنّ $\varphi = 0$ على $\operatorname{Supp} \delta'$ ، لكن $\varphi'(0) = \psi(0) = 1$. ومنه $\langle \delta', \varphi \rangle \neq 0$.

نظرية 2.9 [نظرية اللصق - ***Théorème du recollement***]

لتكن $(\Omega_j)_{j \in J}$ مفتوحات من $\mathbb{R}^n$. نضع $\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$. وليكن $T_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ من أجل كل j من J . نفرض أنه كلما كان $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \varnothing$ فإن $T_{i|\Omega_i \cap \Omega_j} = T_{j|\Omega_i \cap \Omega_j}$. عندئذ يوجد $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ بحيث $T_{|\Omega_j} = T_j$.

2.6 التوزيعات المتراصة الحامل - Distributions à support compact

نظرية 2.10

نرمز بـ $\mathcal{E}(\Omega)$ للفضاء $C^\infty(\Omega)$ وبـ $\mathcal{E}'(\Omega)$ لفضاء التوزيعات المتراصة الحامل على Ω.

ليكن $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

1) إنّ T منتهي الرتبة.

2) إذا كانت m رتبة T فإنّه من أجل كل جوار متراص K لـ $\operatorname{Supp} T$ ، يوجد ثابت C بحيث:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C p_{K,m}(\varphi).$$

الإثبات:

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ وليكن K جوارا متراصا لـ $\operatorname{Supp}\ T$ ، وليكن $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ بحيث $\chi = 1$ في جوار K.

نلاحظ أنّ $(1-\chi)\varphi = 0$ في جوار $\operatorname{Supp} T$ ، ومنه حسب النظرية السابقة فإنّ $\langle T, (1-\chi)\varphi \rangle = 0$.

أي أنّ

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle.$$

بما أنّ T توزيع على Ω ، فإنّه يوجد C_K و m بحيث:

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C p_{K,m}(\chi\varphi).$$

لدينا:

$$p_{K,m}(\varphi) = \sup_{|\alpha|\leqslant m, x\in K} |D^\alpha(\chi\varphi)(x)|,$$

و

$$|D^\alpha(\chi\varphi)| = \left|\sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}\chi(x) D^\beta\varphi(x)\right|.$$

ومنه يوجد $c > 0$ بحيث

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C' p_{K,m}(\varphi).$$

أثبتنا أنّه من أجل كل φ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ لدينا $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C' p_{K,m}(\varphi)$ ، ومنه m يتعلق بـ T فقط لأنّ المتراص K الذي أختير يتعلق بـ T فقط، والمتباينة صحيحة مهما يكن φ كيفي من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. وهذا ما يثبت 2) . نلاحظ أنّه إذا كان $\varphi \in \mathcal{D}_{k'}(\Omega)$ فإن $p_{K,m}(\varphi) \leqslant p_{K',m}(\varphi)$ ومنه المطلوب 1) .
□

تعريف 2.9
ليكن $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ و $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$. نضع

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = \langle T, \chi\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},$$

حيث $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ويساوي 1 في جوار $\operatorname{Supp} T$.

ملاحظات:

1. نتيجة التعريف مستقلة عن إختيار χ : ليكن χ_1 و χ_2 تابعين يحققان الفرض الذي يحققه χ. لدينا: $\chi_1\varphi - \chi_2\varphi = (\chi_1 - \chi_2)\varphi = 0$ بجوار $\operatorname{Supp} T$. ومنه $\langle T, (\chi_1 - \chi_2)\varphi\rangle = 0$. إذن $\langle T, \chi_1\varphi\rangle = \langle T, \chi_2\varphi\rangle$.
2. يسمح التطبيق السابق بمطابقة الفضاء $\mathcal{E}'(\Omega)$ بثنوي $\mathcal{E}(\Omega)$.
3. التطبيق (المسمّى بالتباين القانوني)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}'(\Omega) & \rightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & T \end{array}$$

متباين ومستمر.

2.7 تمارين محلولة

تمرين 2.1

اذكر التطبيقات المستمرة من بين التطبيقات التالية، وبرر ذلك:

(1

$$D^\alpha : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad T \mapsto D^\alpha T,$$

(2

$$D^\alpha : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \quad T \mapsto D^\alpha T,$$

(3

$$D^\alpha : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \quad T \mapsto D^\alpha T.$$

حل التمرين 2.1

1. لتكن $T_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ متتالية كيفية متقاربة نحو 0 في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
بما أنّ التطبيق D^α خطي فلإثبات إستمرار التطبيق الأول يكفي إثبات تقارب $D^\alpha T_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ نحو 0 في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. من أجل ذلك يكفي كتابة تعريف التقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
2. لتكن $T_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ متتالية كيفية متقاربة نحو 0 في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. بما أنّ التطبيق D^α خطي فلإثبات إستمرار التطبيق الثاني يكفي إثبات تقارب $D^\alpha T_j$ نحو 0 في $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. من أجل ذلك يكفي كتابة تعريف التقارب في $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ الذي يعني التقارب المنتظم على كل متراص. وهذا بديهي لأنّ التقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ يعني التقارب المنتظم لجميع المشتقات في المتراص الذي يحوي جميع حوامل T_j.
3. لتكن $T_j \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ متتالية كيفية متقاربة نحو 0 في $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. وهذا يعني التقارب المنتظم نحو 0 لجميع مشتقات $T_j \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ على كل متراص. هذه الخاصية تستلزم أنّ المتتالية $D^\alpha T_j \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ تتقارب أيضا بإنتظام نحو 0 وكذا جميع مشتقاتها على كل متراص. ومنه إستمرار التطبيق الثالث.

تمرين 2.2

1. هل التطبيقان T و S المعرفاب من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بـ: $\langle T, \varphi\rangle = 1 + \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ و $\langle S, \varphi\rangle = \varphi(0) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ توزيعان على $\mathbb{R}$ ؟

حل التمرين 2.2

التطبيقان T و S غير خطيين. وبالتالي لا يعرفان توزيعين.

تمرين 2.3

نعتبر القضيتين حيث $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ و $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$(1) \qquad \forall a = (0, 0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n, \qquad \tau_a T = T.$$

$$(2) \qquad \forall a = (0, 0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n, \qquad \tau_a f = f.$$

بإعتبار $T = T_f$: هل $(2) \Rightarrow (1)$ ؟ $(1) \Rightarrow (2)$ ؟

(عندما تتحقق (1) نقول أنّ التوزيع $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ مستقل عن المتغير ذي الدليل j).

حل التمرين 2.3

الكتابة المباشرة تبيّن قيام الإستلزامين $(2) \Rightarrow (1)$ و $(1) \Rightarrow (2)$ مهما كان الشعاع $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ، أي مهما كانت مركباته منعدمة كانت أو غير منعدمة.

تمرين 2.4

1. عيّن التوزيع $x.\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$.
2. احسب الجداءين $((\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}).x).\delta$ و $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}.(x.\delta)$. ماذا تستنتج؟

حل التمرين 2.4

1. تعيين $x.\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$. ليكن φ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\langle x.\mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} x \frac{\varphi(x)}{x} \ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} 1.\varphi(x) \ \mathrm{d}x = \langle 1, \varphi\rangle.$$

إذن $x.\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} = 1$.

2. حساب الجداءين $((\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}).x).\delta$ و $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}.(x.\delta)$.

إذا سلمنا بوجود جداء للتوزيعات وأنّه تجميعي وتبديلي (كما هو الحال في جداء التوابع) فسنحصل على أنّ الجداء الأول يساوي δ والثاني منعدم، بإعتبار أنّ $(\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}).x = x.\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} = 1$ و $x.\delta = 0$. إذن لا يوجد تعريف لجداء توزيعات يتمتع بخاصيتي التجميع والتبديل.

تمرين 2.5

قارن بين توزيع ديراك δ و $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-a\right)H(x)e^{ax}$ حيث $a=2020$.

حل التمرين 2.5

لدينا:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-a\right)H(x)e^{ax}=H'e^{ax}+aHe^{ax}-aH(x)e^{ax}=H'e^{ax}=e^{ax}\delta.$$

من جهة أخرى

$$\langle e^{ax}\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,e^{ax}\varphi\rangle=e^{a.0}\varphi(0)=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,$$

من أجل كل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. إذن $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2020\right)H(x)e^{2020x}=\delta$.

تمرين 2.6

1. عين توزيع مقتصر توزيع ديراك على $\mathbb{R}^\star$. : $\delta_{|\mathbb{R}^\star}$
2. نفرض أنّه يوجد $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ بحيث:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\langle\delta,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

اثبت أنّ $f=0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}^\star$ ، واستنتج أنّ $f=0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}$. هل هناك تناقض؟

حل التمرين 2.6

1. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$. نلاحظ أنّ φ منعدم بجوار 0 وبالتالي فهو منعدم عند 0. إذن

$$\langle\delta_{|\mathbb{R}^\star},\varphi\rangle=\varphi(0)=0,$$

وعليه $\delta_{|\mathbb{R}^\star}=0$.

2. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$. لدينا:

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^\star}f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x=0.$$

ومنه $f=0$ شبه كليا على $\mathbb{R}^\star$. وبما أنّ قياس $\{0\}$ معدوم فإنّ $f=0$ حيثما كان على $\mathbb{R}$. ومنه $\delta=0$. وهذا غير ممكن.

نستنتج أنّه لا يمكن تمثيل توزيع ديراك بتابع ينتمي إلى $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

تمرين 2.7

هل التابع f المعرف بـ $f(x)=H(x)\ln|x|$ ، (حيث يرمز H لتابع هيفيسايد) يمثل توزيعا على $\mathbb{R}$ ؟

حل التمرين 2.7

نعم: لأن $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. لاحظ أن بجوار $]a,b[\subset]-1,1[$ للصفر:

$$\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x=\int_a^0 |f(x)|\ \mathrm{d}x+\int_0^b |f(x)|\ \mathrm{d}x=-\int_0^b \ln x\ \mathrm{d}x=b-b\ln b.$$

تمرين 2.8

بيّن أنّ كل شكل خطي من الأشكال التالية تمثل توزيعا، حيث $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

1. $\langle T,\varphi\rangle=\sum_{n=1}^{+\infty} n!\varphi(n)$.
2. $\langle T,\varphi\rangle=\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)-n\varphi(0)-\varphi'(0)\ln n\right\}$.
3. $\left\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right),\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right]$ (الجزء المنتهي لهدامار).
4. $\left\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right),\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x-\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}+\varphi'(0)\ln\varepsilon\right]$ ، حيث يمثل H تابع هيفيسايد.

حل التمرين 2.8

1. $\langle T,\varphi\rangle=\sum_{n=1}^{+\infty} n!\varphi(n)$.

أ) T معرف جيدا. ليكن φ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، ومنه توجد n_0 بحيث

$$\forall n\geqslant n_0:\varphi(n)=0.$$

أي أنّ

$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{n=1}^{n_0} n!\varphi(n)$$

والمجموع السابق مجموع منته. وبالتالي T معرف جيدا.

ب) الخطية. ليكن $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ وليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}$ هو حقل أساس $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned}\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle &= \sum_{n=1}^{n_0} n!(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(n)\\ &= \alpha\sum_{n=1}^{n_0} n!\varphi_1(n) + \beta\sum_{n=1}^{n_0} n!\varphi_2(n) = \alpha\langle T, \varphi_1\rangle + \beta\langle T, \varphi_2\rangle.\end{aligned}$$

ومنه T خطي.

جـ) الإستمرار. ليكن K متراصا من $\mathbb{R}$ و φ من $\mathcal{D}_K(\Omega)$. لدينا:

$$\begin{aligned}|\langle T, \varphi\rangle| &= \left|\sum_{n=1}^{n_0} n!\varphi(n)\right|\\ &\leqslant \sup_{x\in K}|\varphi(x)|\sum_{n=1}^{n_0} n! \leqslant Cp_{K,0}(\varphi),\end{aligned}$$

حيث $C = \sum_{n=1}^{n_0} n!$. ومنه T مستمر.

من أ، ب وجـ نستنتج أنّ T توزيع على $\mathbb{R}$ رتبته $m = 0$ فهو قياس رادون.

.2 $\langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - \varphi'(0)\ln(n)\right\}$.

أ) T **معرف جيدا.** ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. نضع:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - \varphi'(0)\ln n.$$

إثبات أنّ T معرف جيدا يعود إلى إثبات أنّ $\lim_{n\to+\infty} u_n$ موجودة ومنتهية.

نلاحظ أنّ في حالة $\varphi(0) \neq 0$ فإنّ $n\varphi(0) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ و $\ln(n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ، والشرط اللّازم لتكون السلسلة $\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)$ متقاربة هو أن يكون $\varphi\left(\frac{1}{k}\right) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ وهذا يتعلق بـ φ. ونحن نعلم أنّه لا يمكن توزيع النهاية إذا لم يكن كل حد متقاربا. لذالك نفكر في طريقة أخرى لحساب النهاية.

بكتابة نشر تايلور من الرتبة 2 لـ φ عند النقطة $\frac{1}{k}$ في جوار الصفر نجد:

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \varphi(0) + \frac{1}{k}\varphi'(0) + \frac{1}{2k^2}\varphi''(\xi_k),\ \ \xi_k \in \left(0, \frac{1}{k}\right).$$

ومنه

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n}\varphi(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\varphi'(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}\varphi''(\xi_k)-n\varphi(0)-\varphi'(0)\ln(n)\\ &= n\varphi(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\varphi'(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}\varphi''(\xi_k)-n\varphi(0)-\varphi'(0)\ln(n)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)\varphi'(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}\varphi''(\xi_k). \end{aligned}$$

نضع $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ و $w_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}\varphi''(\xi_k)$.

- w_n **مجموع جزئي** لسلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{2k^2}\varphi''(\xi_k)$ وهي متقاربة مطلقا، حيث أنّ:

$$\left|\frac{1}{2k^2}\varphi''(\xi_k)\right|\leqslant M\left|\frac{1}{k^2}\right|,\ \ M=\frac{1}{2}\sup_x|\varphi''(x)|.$$

ومنه w_n متقاربة **نحو** w.
لاحظ أنّ

$$\begin{aligned} |w| &\leqslant \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right).\sup_x|\varphi''(x)|\\ &\leqslant C.p_{K,2}(\varphi), \end{aligned}$$

حيث $C=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

- لندرس تقارب v_n. نضع $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$. إنّ المتتالية v_n متقاربة ونهايتها γ تسمى بثابت أولر:

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\gamma\simeq 0.5.$$

وبالتّالي

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\gamma\varphi'(0)+w.$$

أي أنّ التطبيق T معرف جيدا.
ب) **الخطية.** واضحة.
جـ) **الإستمرار.** ليكن K متراصا من $\mathbb{R}$ و $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned}|\langle T,\varphi\rangle| &= |\gamma\varphi'(0)+w|\\ &\leqslant \gamma|\varphi'(0)|+w\\ &\leqslant \gamma p_{K,1}(\varphi)+Cp_{K,2}(\varphi)\\ &\leqslant C_1p_{K,2}(\varphi),\end{aligned}$$

حيث $C_1=\gamma+C$.

من أ، ب وجـ نستنتج أنّ T توزيع متهي الرتبة، رتبته أقل أو تساوي 2.

3. $\left\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right),\varphi\right\rangle=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right]$.

أ) $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **معرف جيدا.**

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ومنه يوجد $a>0$ بحيث $\mathrm{Supp}\,\varphi\subset[-a,a]$.

نضع

$$u_\varepsilon=\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

نكتب نشر تايلور من الرتبة 2 لـ φ في جوار الصفر:

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2}\varphi''(\xi_x),\ \ \xi_x\in]0,x[.$$

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2}\varphi''(\eta_x),\ \ \eta_x\in]-x,0[.$$

ومنه

$$\begin{aligned}u_\varepsilon &= \int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi'(0)}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-a}^{-\varepsilon}\varphi''(\eta_x)\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi'(0)}{x}\,\mathrm{d}x\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{a}\varphi''(\xi_x)\,\mathrm{d}x-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

بما أنّ التابع $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ زوجي فإنّ $\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ ، وبما أنّ التابع $x\mapsto\frac{1}{x}$ فردي فإنّ $\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x=-\int_{\varepsilon}^{a}\frac{\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$.

ومنه

$$u_\varepsilon=\frac{1}{2}\int_{-a}^{-\varepsilon}\varphi''(\eta_x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{a}\varphi''(\xi_x)\,\mathrm{d}x-2\frac{\varphi(0)}{a}.$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle &= -2\frac{\varphi(0)}{a} + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-a}^{-\varepsilon} \varphi''(\eta_x)\ \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{a} \varphi''(\xi_x)\ \mathrm{d}x\right\}\\
&= -2\frac{\varphi(0)}{a} + \frac{1}{2}\left\{\int_{-a}^{0} \varphi''(\eta_x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} \varphi''(\xi_x)\ \mathrm{d}x\right\}\\
&= A < +\infty.
\end{aligned}$$

أي أنّ $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ معرف جيدا.

ب) **الخطية.** واضحة.

جـ) **الاستمرار.**

ليكن K متراصا من $\mathbb{R}$. و $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ يوجد ثابت $C = C_K$ بحيث:

$$\left|\left\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant C p_{K,2}(\varphi).$$

ومنه $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ مستمر.

من أ ، ب وجـ نستنتج أنّ $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ توزيع متهي الرتبة رتبته أقل أو تساوي 2.

4. $\left\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln\varepsilon\right]$.

أ) $\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ **معرف جيدا.**

نضع

$$u_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln\varepsilon.$$

نكتب نشر تايلور من الرتبة 2 لـ φ في جوار الصفر:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi_x),\ \ \xi_x \in]0, x[.$$

ومنه

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon &= \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(0)}{x^2}\ \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi'(0)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi_x)\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln(\varepsilon)\\
&= -\frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0)\ln(a) + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{1}{2}\varphi''(\xi_x)\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

وبالتّالي:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = -\frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0)\ln(a) + \frac{1}{2}\int_0^a f''(\xi_x)\ \mathrm{d}x < +\infty.$$

وهذا يعني أنّ $\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ معرف جيدا.

ب) **الخطية.** واضحة.

جـ) **الاستمرار.** ليكن K متراصا من $\mathbb{R}$ و $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right),\varphi\right\rangle\right| &= \left|-\frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0)\ln(a) + \int_0^a \frac{1}{2}\varphi''(\xi_x)\ \mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant C_1 p_{K,0}(\varphi) + C_2 p_{K,1}(\varphi) + C_3 p_{K,2}(\varphi)\\ &\leqslant C p_{K,2}(\varphi).\end{aligned}$$

من أ ، ب وجـ نستنتج أنّ $\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ توزيع متهي الرتبة رتبته أقل أو تساوي 2.

تمرين 2.9

احسب المشتق الأول بمفهوم التوزيعات للتابع $f(x) = x\ln|x|$.

حل التمرين 2.9

بوضع $f(0)=0$ ، نلاحظ أنّ التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ فهو $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. إذن هو يعرف توزيعا T_f على $\mathbb{R}$ بـ

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_f,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

ولدينا $T'_f = T_{f'}$ ، حيث f' هو مشتق f بالمفهوم الكلاسيكي. أي أنّ $f'(x) = 1+\ln|x|$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

تمرين 2.10

1. احسب المشتقات الأولى والثانية بمفهوم التوزيعات للتوابع التالية:

أ ـ التّابع f المعرف من أجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |\cos(x)|$.

ب ـ التّابع g 2π ـ دوري حيث $g(x) = x$ من أجل كل x من $]0,2\pi[$.

2. احسب $\langle g'',\varphi\rangle$ حيث $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ سنده محتوى في $[-\pi,\pi]$ مع $\varphi(x)=x$ على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

حل التمرين 2.10

1. نعتبر التّابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |\cos x|$.

حساب f' بمفهوم التّوزيعات:
لدينا:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & : x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k,\pi\right[; \\ -\cos x & : x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k.\pi\right[\end{cases}$$

مع $k \in \mathbb{Z}$.
نلاحظ أنّ f مستمر على $\mathbb{R}$ ولا توجد قفزات. ومنه

$$(T_f)' = T_{f'},$$

حيث f' معرف بـ

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & : x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[; \\ \sin x & : x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[, \end{cases}$$

مع $k \in \mathbb{Z}$.
حساب f'' بمفهوم التوزيعات:
لدينا حسب ما سبق:

$$(T_f)'' = ((T_f)')' = (T_{f'})'.$$

نلاحظ أنّ f' لديه قفزات عند النقاط من الشكل $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.
ومنه لدينا:

$$(T_f)'' = T_{f''} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi/2},$$

حيث $f'' = -f$.
وبالتالي،

$$(T_f)'' = T_{-f} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi/2}.$$

ملاحظات:
1. في الحالة العامة، إذا كان

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \delta_i,$$

فإنّ

$$(T_f)'' = ((T_f)')' = (T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \delta_i)' = (T_{f'})' + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \delta_i'.$$

ولاحظ أنّ $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \delta_i$ متقاربة دوما، حيث

$$\langle \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \delta_i, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \varphi(i) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi(i),$$

لأنّ φ إختباري.

2. في الحالة العامة، $\sum_{j=1}^{+\infty} T_j$ ليس متقاربا.

مثال: في حالة التّوزيع $\delta_{1/n}$ و $\varphi = 1$ في جوار الصفر، لدينا:

$$\left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{1/n}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + 1 + \ldots = \infty.$$

لكن في التّمرين، المجموع منته لأنه إبتداء من رتبة معينة يكون لدينا $\mathrm{card}\,(K \cap \mathbb{Z}) < +\infty$ مهما كان المتراص K.

2. نعتبر التّابع g المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x$ من أجل كل $x \in [0, 2\pi[$. نلاحظ أنّ $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. ومنه فهو يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

ـ لنعيّن قيمة g على $[2k\pi, 2(k+1)\pi[$. ليكن x من $\mathbb{R}$. عندئذ يوجد $k \in \mathbb{Z}$ وحيد بحيث $2k\pi \leqslant x < 2(k+1)\pi$ (وهو $k = \left[\frac{x}{2\pi}\right]$)، ومنه $0 \leqslant x - 2k\pi < 2\pi$

نضع $y = x - 2k\pi$. بما أنّ g $2\pi-$ دوري، فإنّ:

$$g(y + 2\pi) = g(y) = y.$$

أي أنّ $g(x) = x - 2k\pi$ ، و:

$$\langle g, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (x - 2k\pi)\varphi(x) \ \mathrm{d}x.$$

ـ **حساب** g' **:**

نلاحظ أنّ g له قفزات عند النقاط $2k\pi$ ، ونلاحظ أنّ $\lim_{x \to (2k\pi)^+} g(x) - \lim_{x \to (2k\pi)^-} g(x) = 2\pi$.

وبالتّالي،

$$(T_g)' = T_{g'} + 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}.$$

لدينا $g'(x) = 1$ لمـّا $x \neq 2k\pi$. ومنه:

$$(T_g)' = 1 + 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}.$$

ـ **حساب** g'' :

لدينا:

$$(T_g)'' = ((T_g)')' = (1 + 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi})'.$$

ومنه

$$(T_g)'' = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta'_{2k\pi}.$$

وهو المطلوب.

تمرين 2.11

ليكن التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2} & : x \in \left]-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right[, \\ 0 & : x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[. \end{cases}$$

احسب المشتقين بمفهوم التوزيعات $(T_f)'$ و $(T_f)''$ ، واستنتج معادلة تفاضلية يكون T_f حلا لها حيث T_f هو التوزيع المعرف بـ f.

حل التمرين 2.11

باستخدام نظرية القفزات وملاحظة أنّ $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2}$ و $f''(x) = -\dfrac{\sin x}{2}$ لما $x \in \left]-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right[$ و $f'(x) = f''(x) = 0$ لما $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ وأنّ f' مستمر و $f'' = -f$ نحصل على

$$(T_f)' = T_{f'} + \frac{1}{2}\delta_{\pi/2},$$

و

$$(T_f)'' = (T_{f'})' + \frac{1}{2}\delta'_{\pi/2} = T_{f''} + \frac{1}{2}\delta'_{\pi/2} = -T_f + \frac{1}{2}\delta'_{\pi/2}.$$

ومن ثم نستنتج أنّ T_f يحقق المعادلة التفاضلية:

$$(T_f)'' + T_f = \frac{1}{2}\delta'_{\pi/2}.$$

تمرين 2.12

1. احسب المشتق الأوّل والثاني بمفوم التّوزيعات لـ $f : x \mapsto |x|$.
2. نعتبر التّابعين $g : x \mapsto |x| \sin x$ و $h : x \mapsto |x| \cos x$.
   (أ) بيّن أنّ كلا من التّابعين يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$.
   (ب) احسب المشتق الأوّل والثاني لهذين التّوزيعين.

حل التمرين 2.12

1. نعتبر التّابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x|$. لدينا:

$$f(x) = \begin{cases} -x & : x \in]-\infty, 0[, \\ x & : x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

التّابع f مستمر على $\mathbb{R}$ فهو $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ، وبالتّالي يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle f, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{0} x\varphi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{x} x\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

ـ **حساب** $(T_f)'$.
بما أنّ f ليست لديه قفزات، فإنّ

$$(T_f)' = T_{f'},$$

حيث f' معرف بـ:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & : x \in]-\infty, 0[, \\ 1 & : x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

ـ **حساب** $(T_f)''$.
لدينا:

$$(T_f)'' = ((T_f)')' = (T_{f'})'.$$

نلاحظ أنّ لـ f' قفزة عند النقطة $x = 0$ ، ولدينا:

$$\sigma_0 = \lim_{x\to 0^+} f'(x) - \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2.$$

ومنه:

$$(T_f)'' = T_{f''} + 2\delta,$$

لكن $f'' \equiv 0$ ومنه $T_{f''} = 0$ ، أي أنّ:

$$(T_f)'' = 2\delta.$$

2. نعتبر التّابعين $g(x) = |x| \sin x$ و $h(x) = |x| \cos x$.

أ)

بما أنّ g و h مستمران على $\mathbb{R}$ ، فهما $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ، ومنه g يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \sin x \varphi(x) \, \mathrm{d}x,$$

و h يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle h, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cos x \varphi(x) \, \mathrm{d}x,$$

ب)

ـ **حساب** $(T_g)'$.

لدينا:

$$(T_g)' = T_{g'},$$

حيث g' معرف بـ:

$$g'(x) = \begin{cases} \sin x + x \cos x & : x > 0, \\ -\sin x - x \cos x & : x < 0. \end{cases}$$

ـ **حساب** $(T_g)''$.

نلاحظ أنّ g' ليست لديه قفزات، ومنه لدينا:

$$(T_g)'' = T_{g''},$$

حيث g'' معرف بـ:

$$g''(x) = \begin{cases} 2 \cos x - x \sin x & : x > 0, \\ -2 \cos x + x \sin x & : x < 0. \end{cases}$$

وهو المطلوب.

ـ **حساب** $(T_h)'$:

لدينا حسب نظرية القفزات، أنّ:

$$(T_h)' = T_{h'},$$

حيث:

$$h'(x) = \begin{cases} \cos x - x\sin x & : x > 0, \\ -\cos x + x\sin x & : x < 0. \end{cases}$$

ـ **حساب** $(T_h)''$.
لدينا:

$$(T_h)'' = ((T_h)')' = (T_{h'})'.$$

نلاحظ أنّ التّابع h' له قفزة عند النقطة $x = 0$ ، ولدينا:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1 \text{ و } \lim_{x\to 0^-} h(x) = -1.$$

ومنه:

$$(T_h)'' = T_{h''} + 2\delta,$$

حيث

$$h''(x) = \begin{cases} -2\sin x - x\cos x & : x > 0, \\ 2\sin x + x\cos x & : x < 0. \end{cases}$$

تمرين 2.13

نعتبر التابع $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ على $\mathbb{R}$. هذا التابع يعرف توزيعا نرمز له بـ T_f.

1. احسب التوزيع $(T_f)' - T_{f'}$.
2. احسب التوزيع $(T_f)'' - T_{f''}$.

حل التمرين 2.13

1. نلاحظ أنّ التابع المعطى مستمر (ومن ثم يعرف توزيعا). وبالتالي فليس له قفزات. وعليه $(T_f)' - T_{f'} = 0$.

2. نلاحظ أنّ f يكتب على الشكل $f(x) = -(x-1)(x-3)$ في المجال $(1,3)$ و $f(x) = (x-1)(x-3)$ خارجه. وعليه فإنّ $f'(x) = -2x+4$ في المجال $(1,3)$ و $f'(x) = 2x-4$ خارجه. كما نلاحظ أنّ هناك قفزة لـ f' عند النقطة 1 تساوي 4 وأنّ هناك قفزة أخرى عند النقطة 3 تساوي أيضا 4 . وبالتالي حسب دستور القفزات: $(T_f)'' - T_{f''} = 4(\delta_1 + \delta_3)$.

تمرين 2.14
نعتبر التوزيع $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ المعرف بـ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} (H(-x)e^{a|x|} + H(x)e^{b|x|})\varphi(x)\ \mathrm{d}x,$$

حيث $a < 0$ و $b < 0$ و H يمثل تابع هيفيسايد.
ما هو مشتق T ؟

حل التمرين 2.14

من الواضح أنّ f مستمر وأنّ

$$f'(x) = \begin{cases} -ae^{-ax} & : x < 0, \\ be^{bx} & : x > 0. \end{cases}$$

ومنه ليست هناك قفزات للتابع f ، ولدينا $T' = (T_f)' = T_{f'}$.
وعليه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، لدينا:

$$\begin{aligned}
\langle T', \varphi\rangle &= \langle f', \varphi\rangle \\
&= -a\int_{-\infty}^{0} e^{-ax}\varphi(x)\ \mathrm{d}x + b\int_{0}^{+\infty} e^{bx}\varphi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} -aH(-x)e^{-ax}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} bH(x)e^{bx}\varphi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [-aH(-x)e^{-ax} + bH(x)e^{bx}]\varphi(x)\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

إذن: $T' = -aH(-x)e^{-ax} + bH(x)e^{bx}$.

تمرين 2.15
ليكن التوزيع T المعرف بـ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \langle T, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, -x)\mathrm{d}x.$$

احسب العبارة $\partial_x T - \partial_y T$.

حل التمرين 2.15

نضع $\psi(x)=\varphi\circ f(x)$ حيث $f(x)=(x,-x)$. ثم نفاضل فنجد من أجل كل $t\in\mathbb{R}$ (حيث نرمز لـ $D_1 f(a)$ ، $D_2 f(a)$ للتفاضليتين الجزئيتين لـ f عند a):

$$\begin{aligned}
\psi'(a)t &= D\psi(a)(t)\\
&= D\varphi(f(a))\circ Df(a)(t)\\
&= D\varphi(f(a))(D_1 f(a)(t), D_2 f(a)(t))\\
&= D\varphi(f(a))(t,-t)\\
&= \partial_x\varphi(f(a))t-\partial_y\varphi(f(a))t,
\end{aligned}$$

علما أنّ ∂_x و ∂_y يدلان على المشتق بالنسبة للمتغير x و y على الترتيب. بإعتبار $t=1$ نحصل على

$$\forall z\in\mathbb{R}, \psi'(z)=\partial_x\varphi(z,-z)-\partial_y(z,-z).$$

ومنه، لحساب $\partial_x T-\partial_y T$ نكتب من أجل كل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ (تذكر أنّ φ إختباري وبالتالي ينعدم بجوار اللّانهاية):

$$\begin{aligned}
\langle\partial_x T-\partial_y T,\varphi\rangle &= -\langle T,\partial_x\varphi-\partial_y\varphi\rangle\\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x\varphi(z,-z)-\partial_y\varphi(z,-z))\mathrm{d}z\\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}\psi'(z)\mathrm{d}z\\
&= \psi(-\infty)-\psi(+\infty)\\
&= \varphi(-\infty,+\infty)-\varphi(+\infty,-\infty)\\
&= 0-0=0.
\end{aligned}$$

إذن $\partial_x T-\partial_y T=0$.

تمرين 2.16

اعط شرطا كافيا على المتتالية (a_n) حتّى يعرّف التطبيق

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} a_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

توزيعا على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 2.16

أوّلا: هل التطبيق معرف جيدا؟ نلاحظ أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{Z}^\star$ ، لدينا $\frac{1}{n} \in [-1,1]$.
في حالة تابع اختباري φ يحقق:

$$\forall x \in [-1,1], \varphi(x) = 1,$$

يكون لدينا

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} a_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} a_n,$$

وهذه السلسلة ليست بالضرورة متقاربة. فشرط من الشروط الكافية التي تجعل السلسلة متقاربة هو:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} |a_n| < +\infty. \tag{2.2}$$

أمّا الخطية والإستمرار فهما واضحين. وبالتالي الشرط (2.2) كاف ليكون التطبيق المعطى توزيعا.

تمرين 2.17

ليكن التطبيق $\langle T,\varphi\rangle = \sum_{n=20}^{+\infty}\left(\varphi\left(\frac{1}{n^2}\right) - \varphi(0)\right)$ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ نحو $\mathbb{C}$.

1. اثبت أنّ التطبيق T معرف جيدا، وأنّه توزيع متهي الرتبة.
2. اثبت أنّ T متراص الحامل ثم حدد حامله.

حل التمرين 2.17

.1

أ) T معرف جيدا. بإستخدام التزايدات المتهية يتضح أنّ

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{n=20}^{+\infty}\left(\varphi\left(\frac{1}{n^2} - \varphi(0)\right)\right) = \sum_{n=20}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\varphi'(\xi_n) < +\infty.$$

ومنه T معرف جيدا.

ب) الخطية. واضحة.

جـ) T الإستمرار. ليكن K متراصا من $\mathbb{R}$ وليكن $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. لدينا:

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant c\sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi'(y)| \leqslant cp_{K,1}(\varphi),$$

حيث $c=\sum_{n=20}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ (السلسلة متقاربة حسب ريمان). ومنه T مستمر.

من أ)، ب) وج)ـ نستنتج أنّ T توزيع على $\mathbb{R}$ متنهي الرتبة ورتبته أقل أو تساوي 1.

2. نلاحظ أنّ مهما كان $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\backslash[0,1])$ فإنّ

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{n=20}^{+\infty}(0-0)=0.$$

إذن T ينعدم على $\mathbb{R}\backslash[0,1]$. ومنه $\operatorname{Supp}T\subset[0,1]$. وهو ما يبيّن تراص الحامل (لإنّه مغلق ومحدود). ليكن $F=\bigcup_{n\geqslant 20}\left\{\frac{1}{n^2}\right\}\cup\{0\}$. نلاحظ أنّ T ينعدم خارج المغلق F . ومنه $\operatorname{Supp}T\subset A$. ثم نثبت الإحتواء العكسي بسهولة. فنحصل في الأخير على $\operatorname{Supp}T=F$.

وهو المطلوب.

تمرين 2.18

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$. نعرف التطبيق T من $\mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$ في $\mathbb{C}$ بـ: $\langle T,\varphi\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$.

اثبت أنّ $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^\star)$. هل T متراص الحامل على $\mathbb{R}$ ؟

حل التمرين 2.18

- **اثبات أنّ T توزيع على $\mathbb{R}^\star$.**

أ) T معرف جيدا. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$. هذا يعني أنّ φ منعدم في جوار الصفر: يوجد $a>0$ بحيث $\forall x\in]-a,a[:\ \varphi(x)=0$. إذا كان $\frac{1}{n^2+1}<a$ فإنّ $\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)=0$.

ولذلك، يوجد $N_\varphi\in\mathbb{N}$ بحيث إذا كان $n\geqslant N_\varphi$ يكون $\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)=0$.

ومنه $\langle T,\varphi\rangle=\sum_{n=0}^{N_\varphi}\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$. وبالتالي T معرف جيدا.

ب) الخطية. واضحة.

جـ) الإستمرار: ليكن K متراصا من $\mathbb{R}^\star$ و $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^\star)$. يوجد $N_K\in\mathbb{N}$) (نضع $N_K=m$) وثابت موجب C ، بحيث:

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\sum_{n=0}^{m}\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right|$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \sum_{n=0}^{m}\left|\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in K}|\varphi^{(n)}(x)|\sum_{n=0}^{m}1 \\ &\leqslant Cp_{K,m}(\varphi), \end{aligned}$$

بحيث $C = m$. ومنه T مستمر.

من أ، ب وجـ نستنتج أنّ T توزيع على $\mathbb{R}^\star$ متهي الرتبة.

• **هل T متراص الحامل على $\mathbb{R}$ ؟**

لو كان T توزيعا متراص الحامل على $\mathbb{R}$ لكان $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. وهذا غير صحيح لأنّ، في تلك الحالة، الحد العام في السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ لا يؤول بالضرورة إلى 0. وعليه ليس هناك ما يضمن أنّ T تطبيق معرف على $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

وهو المطلوب.

تمرين 2.19

لتكن متتالية التوزيعات (T_n) المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{\frac{1}{2k}} - \delta_{\frac{1}{2k+1}}\right),$$

حيث يرمز δ لديراك.

اثبت أنّ (T_n) متقاربة نحو توزيع رتبته أقل من 1 أو تساويه.

حل التمرين 2.19

بتطبيق التزايدات المتهية، من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ يمكن كتابة ما يلي (علما أن السلسلة الأخيرة متقاربة لأنها متقاربة مطلقا حسب ريمان):

$$\lim_{n\to+\infty}\langle T_n,\varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty}\left(\varphi\left(\frac{1}{2k+1}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k(2k+1)}\varphi'(\xi_k) < +\infty.$$

ومنه يأتي تقارب (T_n) نحو توزيع نرمز له بـ T. ثمّ إنه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ ، حيث K متراص كيفي من $\mathbb{R}$:

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)\sup|\varphi'(x)| \leqslant \pi p_{K,1}(\varphi).$$

وهذا يثبت أن T توزيع رتبته أقل من 1 أو تساويه.

تمرين 2.20

نعرف المتتالية (f_n) بـ:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & : x \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right[, \\ 0 & : x \in C_{\mathbb{R}}\left(\left]0, \dfrac{1}{n}\right[\right). \end{cases}$$

1. هل (f_n) متقاربة ببساطة؟
2. اثبت أنّ (f_n) تتقارب في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ نحو توزيع ديراك δ ، وأن مربع المتتالية متتالية غير متقاربة في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. اثبت أنّ المتتالية $f_n^2 - n\delta$ متقاربة في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ، واحسب نهايتها.

حل التمرين 2.20

1. **دراسة التقارب البسيط لـ** (f_n). ليكن x مثبتا في $\mathbb{R}$ ولنحسب $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
   - لمّا $x > 0$: $f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   - لمّا $x < 0$: يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ **بحيث** $\dfrac{1}{n_0} < x$ أي $x > \dfrac{1}{n_0}$. إذن $f_n(x) = 0,\ \forall n \geqslant n_0$.

   الخلاصة: (f_n) متقاربة ببساطة **نحو** $f \equiv 0$.
2.
   - **إثبات أنّ** (f_n) **تتقارب في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ **نحو توزيع ديراك** δ. يكفي لذلك إثبات أنّ

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0).$$

بما أنّ $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ فهو يعرف التوزيع

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned} |\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x - \varphi(0)\right| \\ &= \left|\int_0^{1/n} n\varphi(x)\ \mathrm{d}x - \varphi(0)\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_0^{1/n} n(\varphi(x) - \varphi(0)) \,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant n \int_0^{1/n} |\varphi(x) - \varphi(0)| \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

من نظرية التزايدات المتهية لدينا:

$$\exists \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : \varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\xi).$$

ومنه

$$\begin{aligned} |\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle| &\leqslant n \int_0^{1/n} |x\varphi'(\xi)| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant Mn \int_0^{1/n} x\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

حيث $M = \sup_x |\varphi'(x)|$.

ومنه

$$|\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle| \leqslant \frac{M}{2}\frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

أي أنّ $\lim_{n\to+\infty}\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$.

- **إثبات أنّ** $(f_n)^2$ **غير متقاربة في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ **بحيث** $\varphi(0) \neq 0$. لدينا:

$$\begin{aligned} \langle f_n^2, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} n^2\varphi(x) \,\mathrm{d}x \\ &= n\int_{\mathbb{R}} n\varphi(x) \,\mathrm{d}x \\ &= n\langle f_n, \varphi\rangle \\ &= n\varphi(0) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

ومنه المطلوب.

3. **إثبات أنّ المتتالية** $f_n^2 - n\delta$ **تتقارب في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ **وحساب نهايتها.**

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned}\langle f_n^2 - n\delta, \varphi\rangle &= \langle f_n^2, \varphi\rangle - n\langle \delta, \varphi\rangle \\ &= n^2 \int_0^{1/n} (\varphi(x) - \varphi(0)) \ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

نكتب نشر تايلور من الرتبة 2 لـ $\varphi(x)$ في جوار 0 :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi_x), \ \ \xi_x \in (0, x).$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\left|\left\langle f_n^2 - n\delta, \varphi\right\rangle\right| &= n^2 \int_0^{1/n} (x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi_x)) \ \mathrm{d}x \\ &\leqslant n^2 \frac{\varphi'(0)}{n^2} + \frac{n^2}{2} \int_0^{1/n} |x^2\varphi''(\xi_x)| \ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

لدينا

$$\int_0^{1/n} |x^2\varphi''(\xi_x)| \ \mathrm{d}x \leqslant \sup_x |\varphi''(x)| \left(\int_0^{1/n} x^2 \ \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3n^3} \sup_x |\varphi''(x)|.$$

ومنه

$$\langle f_n^2 - n\delta, \varphi\rangle \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\varphi'(0).$$

لكن

$$\frac{1}{2}\varphi'(0) = \frac{1}{2}\left\langle \delta, \varphi'\right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \delta', \varphi\right\rangle.$$

أي أنّ $f_n^2 - n\delta \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T = -\frac{1}{2}\delta'$.

تمرين 2.21

نعرف المتتالية (f_n) بـ:

$$f_n(x) == \begin{cases} n & : x \in \left]0, \frac{1}{n^2}\right[, \\ 0 & : x \in C_{\mathbb{R}}\left(\left]0, \frac{1}{n^2}\right[\right). \end{cases}$$

اثبت أن هذه المتتالية متقاربة في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ، وعين نهايتها.

حل التمرين 2.21

لدينا من أجل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$|\langle f_n, \varphi\rangle| = \left| n \int_0^{1/n^2} \varphi(x) \ \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{n} \sup |\varphi(x)| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

ومنه $f_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} 0$.

تمرين 2.22

نعتبر متتالية التوابع (f_n) على $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & : x \in \left]0, \dfrac{1}{n^\alpha}\right[, \\ 0 & : x \notin \left]0, \dfrac{1}{n^\alpha}\right[. \end{cases}$$

1. حدد قيم α التي من أجلها تتقارب هذه المتتالية ببساطة، وحدّد النهاية.
2. حدد قيم α التي من أجلها تتقارب هذه المتتالية في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ وحدّد النهاية.

حل التمرين 2.22

1. **تحديد قيم α التي من أجلها تتقارب (f_n) ببساطة، وتحديد نهايتها:**

نلاحظ أنّ $f_n(x) = 0$ مهما كان $x \leqslant 0$ ، وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ مهما كان $\alpha \in \mathbb{R}$ ومهما كان $x \leqslant 0$.

أمّا من أجل $x > 0$ ، فنعتبر 3 حالات:

الحالة $\alpha > 0$: يوجد n_0 طبيعي بحيث لمّا $n \geqslant n_0$ فإنّ $f_n(x) = 0$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

الحالة $\alpha = 0$: $f_n(x) = 1$ لمّا $x \in]0,1[$ و $f_n(x) = 0$ لمّا $x \notin]0,1[$. ولذلك فالمتتالية f_n ثابتة في هذه الحالة ومتقاربة نحو التابع f المعرف بـ $f(x) = 1$ لمّا $x \in]0,1[$ و $f(x) = 0$ لمّا $x \notin]0,1[$.

الحالة $\alpha > 0$: من أجل n كبير يكون $f_n(x) = n^\alpha$. ولذا: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

2. **تحدد قيم α التي من أجلها تتقارب (f_n) في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ وتحديد النهاية.**

الحالة $\alpha > 0$: $f_n \to \delta$ لأنّ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \ \mathrm{d}x = 1$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

الحالة $\alpha = 0$: لدينا من أجل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، المساواة: $\langle f_n, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ حيث التابع f هو المعرف في السؤال السابق.

الحالة $\alpha < 0$: $f_n \to 0$ لأنّ:

$$\langle f_n, \varphi \rangle = n^\alpha \int_0^{1/n^\alpha} \varphi(x)\ \mathrm{d}x \to 0. \int_0^{+\infty} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

ذلك يرجع لكون $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ متقاربا.

تمرين 2.23

نعرف المتتالية (f_n) بـ $f_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx^2}$.

ادرس تقارب (f_n) في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

إرشاد: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

حل التمرين 2.23

$f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ فهو يعرف توزيعا بالعلاقة:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle f_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx^2}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، ولنحسب

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx^2}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

نقوم بتبديل المتغير $y = \sqrt{n}x$ فنحصل على:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y.$$

نضع $g_n(y) = e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)$. نلاحظ أنّ:

- $g_n \to e^{-y^2}\varphi(0)$ شك.
- $|g_n(y)| \leqslant Ce^{-y^2} \in L^1(\mathbb{R})$ حيث $C = \mathrm{Supp}\,\varphi$.

ومن ثم نستنتج حسب نظرية التقارب بالهيمنة للوبيغ أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi(0)\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\varphi(0).$$

أي أنّ $f_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}\delta$.

تمرين 2.24

احسب نهاية متتالية التوزيعات $T_n = nx\chi_{[0,1/n]}$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ حيث يرمز $\chi_{[0,1/n]}$ للتابع المميز للمجال $[0, 1/n]$.

حل التمرين 2.24

لدينا من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\langle T_n, \varphi\rangle| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} nx\chi_{[0,1/n]}\varphi(x)\ \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^{1/n} nx\varphi(x)\ \mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi(y)|n\int_0^{1/n} x\ \mathrm{d}x = \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi(y)|\frac{1}{2n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

ومنه

$$T_n = nx\chi_{[0,1/n]} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0.$$

تمرين 2.25

احسب نهايات متتاليات التّوزيعات التّالية:

1. $x \mapsto \dfrac{n}{1+n^2x^2}$.
2. $x \mapsto \sin(nx)$.
3. $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{x}$.
4. $x \mapsto n\sin(nx)H(x)$.

حل التمرين 2.25

حساب نهايات التوزيعات التّالية:

1. $x \mapsto f_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2}$.

(f_n) متتالية توابع مستمرة على $\mathbb{R}$ ، فهي $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ، ومنه تعرف التوزيع:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle f_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

لنحسب $\lim_{n\to+\infty}\langle f_n, \varphi\rangle$.

نقوم بتبديل المتغير $y = nx$. ومنه نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\mathrm{d}y.$$

- ليكن y مثبتا في $\mathbb{R}$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1+y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\right]=\frac{1}{1+y^2}\varphi(0).$$

وبالتالي $\frac{1}{1+y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)$ تتقارب ببساطة نحو $\frac{1}{1+y^2}\varphi(0)$.

- ولدينا أيضا

$$\left|\frac{1}{1+y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{1+y^2}\sup_y|\varphi|\in L^1(\mathbb{R}).$$

ومنه حسب نظرية التقارب بالهيمنة للوبيغ، نستنتج أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f_n,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\varphi(0)\mathrm{d}y.$$

وعليه $f_n\to a\delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ حيث $a=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\pi$.

2. $x\mapsto g_n(x)=\sin(nx)$.

متتالية التوابع g_n مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ وتعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}):\langle g_n,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(nx)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

لنحسب $\lim_{n\to+\infty}\langle g_n,\varphi\rangle$. لدينا بإستعمال المكاملة بالتجزئة:

$$\lim_{n\to+\infty}\langle g_n,\varphi\rangle=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(nx)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x=0,$$

لأنّ $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(nx)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x<+\infty$.

وبالتالي $g_n\to 0$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. $x\mapsto h_n(x)=\frac{\sin(nx)}{x}$.

التابع h_n مستمر إذا عرف عند 0 بالإستمرار $h_n(0)=n$ ولهذا فهو L^1_{loc} ، ويعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}):\langle h_n,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

لنحسب $\lim_{n\to+\infty}\langle h_n,\varphi\rangle$.

أوّلا نلاحظ بأنّه لا يمكن إستعمال لوبيغ مباشرة حيث لا يمكن حد h_n بتابع L^1.

ليكن χ تابعا منبسطا يساوي 1 في جوار الصفر. نفرض أنّ $\operatorname{Supp}\chi\subset[-2a,2a]$ و $\chi=1$ على $[-a,a]$ مع $a>0$. لدينا بفضل تقارب جميع التكاملات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{x}\varphi(x)\ \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(nx)\frac{\varphi(x)-\chi(x)\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x+\varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{x}\chi(x)\ \mathrm{d}x.$$

نذكر بالنظرية التّالية:

نظرية ريمان ـ لوبيغ: إذا كان f تابعا كمولا على المجال $[a,b]$ ، فإن

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0,\ \ \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x = 0.$$

• لنحسب أوّلا $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(nx)\frac{\varphi(x)-\chi(x)\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x$.

نلاحظ أنّ التابع $x\mapsto\frac{\varphi(x)-\chi(x)\varphi(0)}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}$ ومحدود فهو كمول على $\mathbb{R}$. ومنه حسب نظرية ريمان ـ لوبيغ، لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(nx)\frac{\varphi(x)-\chi(x)\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x = 0.$$

• لنحسب الآن $\varphi(0)\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(nx)\frac{\chi(x)}{x}\mathrm{d}x$.

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(nx)\frac{\chi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_{-2a}^{-a}\sin(nx)\frac{\chi(x)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{-a}^{a}\frac{\sin(nx)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{a}^{2a}\sin(nx)\frac{\chi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

من جهة، لدينا حسب نظرية ريمان ـ لوبيغ أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-2a}^{-a}\sin(nx)\frac{\chi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = 0 \ \text{و}\ \lim_{n\to+\infty}\int_{a}^{2a}\sin(nx)\frac{\chi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = 0.$$

ومن جهة أخرى، لدينا بوضع $t = nx$:

$$\int_{-a}^{a}\frac{\sin(nx)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_{-na}^{na}\frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t,$$

أي أنّ

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{\sin(nx)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \pi.$$

وبالتالي،

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(nx)\frac{\chi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \pi\varphi(0) = \pi\langle\delta,\varphi\rangle.$$

نستنتج أنّ $h_n\to\pi\delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. $x\mapsto\eta_n(x) = n\sin(nx)H(x)$.

المتتالية (η_n) في $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ فهي تعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle\eta_n,\varphi\rangle = \int_{0}^{+\infty} n\sin(nx)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

نحسب $\int_0^{+\infty} n\sin(nx)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$ بإستعمال المكاملة بالتجزئة فنجد:

$$\int_0^{+\infty} n\sin(nx)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x.$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \eta_n, \varphi\rangle = \varphi(0) + \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x.$$

حسب نظرية ريمان ـ لوبيغ فإنّ $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x$ ، أي أنّ

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \eta_n, \varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle.$$

وبالتالي $\eta_n \to \delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

وهو المطلوب.

تمرين 2.26

نعتبر متتالية التوابع $f_j(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2+\frac{1}{j}}$ المعرفة على $I =]0,+\infty[$. نضع اختصارا $T_j = T_{f_j}$.

1. تأكد من أنّ T_j توزيعا على I.
2. اثبت أنّ متتالية التوزيعات (T_j) متقاربة في $\mathcal{D}'(I)$ نحو النهاية T المعرفة بـ:

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\varphi(x)\ \mathrm{d}x,\ \ \forall\varphi\in\mathcal{D}(I).$$

حل التمرين 2.26

1. **التأكد من أنّ** T_j **توزيع على** I.

لدينا $f_j \in L^1_{loc}(I)$ لأنّه تابع مستمر على كل متراص في I. ومنه $T_j = T_{f_j} \in \mathcal{D}'(I)$.

2. **إثبات أنّ** (T_j) **متقاربة.**

نضع $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$. لدينا $f_n(x) \to f(x)$ من أجل كل $x \in I$. ومنه التقارب شبه الكلي على I. ثم إنّ $|f_j| \leqslant |f|$ علما أنّ $f \in L^1_{loc}(I)$. ولذلك يأتي من نظرية لوبيغ أنّ $f_j \to f$ في $\mathcal{D}'$. وهذا يعني أنّ $T_j \to T$ في $\mathcal{D}'$ حيث T هو التوزيع المبين في نص التمرين.

تمرين 2.27

نعتبر متتالية التوابع $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ $f_n(x) = 2\cos^2(nx)$. بيّن أنّ المتتالية (f_n) متقاربة في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ نحو تابع $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ يطلب تعيينه.

حل التمرين 2.27

لدينا $f_n(x) = 2\cos^2(nx) = 1 + \cos(2nx)$. ومنه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، لدينا:

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2nx)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

وعليه،

$$\begin{aligned}
\langle f_n, \varphi \rangle &= \langle 1, \varphi \rangle + \frac{1}{2n}[\sin(2nx)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2nx)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \langle 1, \varphi \rangle + 0 - \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2nx)\varphi'(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

وبما أنّ التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2nx)\varphi'(x)\mathrm{d}x$ متقارب فإنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2nx)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x$. ولذلك $\lim_{n\to+\infty}\langle f_n, \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle$. إذن النهاية المطلوبة $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ هي التابع القابل للمكاملة محليا $f(x) = 1$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

تمرين 2.28

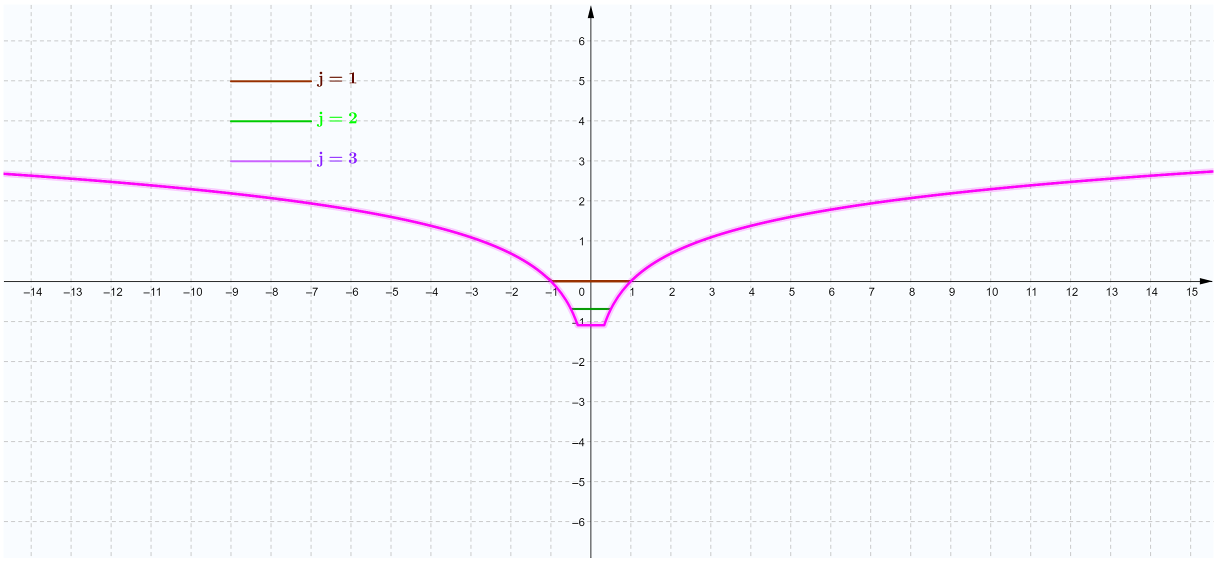
نعتبر المتتالية f_j المعرفة بـ:

$$f_j(x) = \begin{cases} \ln|x| & : |x| > \dfrac{1}{j}, \\ -\ln j & : |x| \leqslant \dfrac{1}{j}. \end{cases}$$

1. ارسم بيانات f_1, f_2, f_3.
2. اثبت أنّ $f_j \to \ln|x|$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. اثبت أنّ $(\ln|x|)' = \mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$.

حل التمرين 2.28

.1



الشكل 2 **: بيانات:** f_1, f_2, f_3.

2. **اثبات أنّ** $\ln|x| \to f_j$ **في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

نلاحظ أنّ f_j مستمر على $\mathbb{R}$ ، فهو $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. ومنه يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_{f_j}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \int_{|x|>1/j} \ln|x|\varphi(x)\ \mathrm{d}x - \int_{-1/j}^{1/j} \ln(j)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

من جهة لدينا:

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{|x|>1/j} \ln|x|\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\left|\int_{-1/j}^{1/j} \ln(j)\varphi(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{j}\ln(j)\sup_{x\in K}|\varphi(x)| \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

ومنه نستنتج أنّ $f_j \to \ln|x|$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. اثبات أنّ $(\ln|x|)' = \mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$.

لدينا من جهة، $T_{f_j} \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \ln|x|$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. ومنه $T'_{f_j} \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} (\ln|x|)'$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

من جهة أخرى، بما أنّ f_j مستمر على $\mathbb{R}$ فإنّ $T'_{f_j} = T_{f'_j}$ ، حيث:

$$f'_j = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & : |x| > \dfrac{1}{j}, \\ 0 & : |x| < \dfrac{1}{j}. \end{cases}$$

ومنه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، لدينا:

$$\lim_{j\to+\infty} \langle T_{f'_j}, \varphi\rangle = \lim_{j\to+\infty} \int_{|x|>1/j} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle.$$

أي أنّ $(\ln|x|)' = \mathrm{vp}\frac{1}{x}$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

وهو المطلوب.

تمرين 2.29

عين حامل كل من التوزيعات التالية:

1. $T_1 = \delta$.
2. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_2, \varphi\rangle = \int_{-1}^{1} x\varphi'(x)\mathrm{d}x$.
3. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_3, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$.
4. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_4, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$.
5. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_5, \varphi\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{sgn}(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$.
6. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) : \langle T_6, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,-x)\mathrm{d}x$.

حل التمرين 2.29

تعيين حامل كل من التوزيعات التالية:

1. $T_1 = \delta$.

$\mathrm{Supp}\, T_1 = \{0\}$.

2. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_2, \varphi\rangle = \int_{-1}^{1} x\varphi'(x)\mathrm{d}x$.

نضع $F = [-1, 1]$ ونبيّن أنّ $\mathrm{Supp}\, T_2 = F$.

هذا يعود إلى إثبات أنّ $w =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ هو مفتوح الإنعدام لـ T_2.

- w مفتوح: لأنّه عبارة عن إتحاد مفتوحين.
- T_2 ينعدم على w : ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(w)$. أي أنّ $\text{Supp}\,(\varphi) \subset w$. وعليه $\langle T_2, \varphi \rangle = 0$.
- w هو أكبر مفتوح ينعدم عليه T_2. لنحسب $\langle T_2, \varphi \rangle$ بالتجزئة. لدينا

$$\int_{-1}^{1} x\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \varphi(1) - \varphi(-1) - \int_{-1}^{1} \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

ومنه:

$$T_2 = \delta_1 - \delta_{-1} - T_f, \text{ في } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

حيث T_f هو التوزيع المرفق بالتّابع:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [-1, 1], \\ 0 & : x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

ليكن U مفتوحا غير خال من $\mathbb{R}$ وأكبر من w. يوجد تابعا $\varphi \in \mathcal{D}(U \cap]-1, 1[)$ بحيث $\varphi > 0$ مع $\varphi(1) = \varphi(-1) = 0$. ومنه بإعتبار إقتصار T_2 على $U \cap [-1, 1]$ ، لدينا:

$$\langle T_2, \varphi \rangle = \varphi(1) + \varphi(-1) - \int_{-1}^{1} \varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} \varphi(x)\mathrm{d}x < 0.$$

أي أنّ w أكبر مفتوح ينعدم عليه T_2.

وبالتالي نستنتج أنّ $\text{Supp}\, T_2 = [-1, 1]$.

3. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_3, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$.

نضع $F = \mathbb{R}$ ونبين أنّ $\text{Supp}\, T_3 = F$ ، وهذا يعود إلى إثبات أنّ $w = \varnothing$ أكبر مفتوح ينعدم عليه T_3.

- w مفتوح.
- T_3 معدوم على w.
- w أكبر مفتوح ينعدم عليه T_3 : ليكن U مفتوحا من $\mathbb{R}$ غير خال أكبر من w. المفتوح U يحوي $[a, b]$ يكون عليه $\cos x$ ذا إشارة ثابتة. يوجد $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$ موجب تماما. نلاحظ أنّ $\langle T_3, \varphi \rangle \neq 0$. وهذا يعني أنّ T_3 لا ينعدم على أي مفتوح غير خال. إذن w هو أكبر مفتوح ينعدم عليه T_3.

وبالتالي نستنتج أنّ $\text{Supp}\, T_3 = \mathbb{R}$.

4. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_4, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$.

نلاحظ أنّ $T_4 = T_{-\exp(x)}$ حيث $T_{-\exp(x)}$ التوزيع المرفق بالتابع $x \mapsto -\exp(x)$. ومنه:

$$\operatorname{Supp} T = \operatorname{Supp}\ -\exp(x)).$$

لدينا:

$$\operatorname{Supp}\ -\exp(x) = \overline{\{x \in \mathbb{R}; -\exp(x) \neq 0\}}.$$

وبالتالي،

$$\operatorname{Supp} T_4 = \mathbb{R}.$$

5. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T_5, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$.

نذكر أنّ تابع الإشارة sgn معرف على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0; \\ -1 & : x < 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

لدينا:

$$\langle T_5, \varphi \rangle = \varphi(-1) - 2\varphi(0) + \varphi(1).$$

أي أنّ

$$T_5 = \delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1.$$

نضع $F = \{-1, 0, 1\}$ ونبيّن أنّ $\operatorname{Supp} T_5 = F$. وهذا يعود إلى إثبات أنّ $w = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$ أكبر مفتوح ينعدم عليه T_5.

- w مفتوح لأنّه عبارة عن إتحاد مجالات مفتوحة.
- T_5 معدوم على w.
- w أكبر مفتوح ينعدم عليه T_5. ليكن U مفتوحا من $\mathbb{R}$ غير خال أكبر من w. يوجد تابعا إختباريا $\varphi \in \mathcal{D}(U \cap F)$ بحيث $\varphi(0) \neq 0$ و $\varphi(1) = \varphi(-1) = 0$. ومنه $\langle T_5, \varphi \rangle \neq 0$ ، وهذا يعني أنّ w أكبر مفتوح ينعدم عليه T_5.

وبالتالي، نستنتج أنّ $\operatorname{Supp} T_5 = \{-1, 0, 1\}$.

6. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) : \langle T_6, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, -x)\mathrm{d}x$.

نضع $F = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ ولنبيّن أنّ $\operatorname{Supp} T_6 = F$ ، وهذا يعود إلى إثبات أنّ $w = \mathbb{R}^2 \backslash F$ هو أكبر مفتوح ينعدم عليه T_6.

- w مفتوح لأنّ F هو مستقيم حقيقي في $\mathbb{R}^2$ فهو مغلق ومتممته w مفتوح.

- T_6 ينعدم على w : ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(w)$. أي أنّ $\operatorname{Supp}\varphi \subset w$ ، أي أنّ $(x,-x) \notin \operatorname{Supp}\varphi$. ومنه $\langle T_6, \varphi \rangle = 0$.
- w أكبر مفتوح ينعدم عليه T_6. ليكن U مفتوحا غير خال من $\mathbb{R}^2$ وأكبر من w. المفتوح U يحوي على الأقل على نقطة $a(x,-x)$ مع $x \in \mathbb{R}$.

نعتبر $U \cap F = B(a,r)$ مع $r > 0$. في كل كرة توجد توابع إختبارية موجبة وموجبة تماما في جوار مركز الكرة. أي أنّه يوجد $\varphi \in \mathcal{D}(B(a,r))$ بحيث $\varphi \geqslant 0$ و $\varphi(x,-x) > 0$.

ومنه، $\langle T_6, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,-x)\ \mathrm{d}x > 0$. وهذا يعني أنّ w هو أكبر مفتوح ينعدم عليه T_6.

وبالتالي نستنتج أنّ $\operatorname{Supp} T_6 = F$.

تمرين 2.30

نعتبر التطبيق T المعرف من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ في $\mathbb{R}_+$ بـ $\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi(n^2)|$. هل هو توزيع؟ متهي الرتبة؟ متراص الحامل؟

حل التمرين 2.30

التطبيق T معرف جيدا، لكنه ليس خطيا (بسبب القيمة المطلقة الظاهرة في الحد العام للسلسلة). لذا فهو ليس توزيعا.

تمرين 2.31

نعتبر التطبيق T المعرف بـ $\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\int_0^1 \varphi(x, x+1)\ \mathrm{d}x$ من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

1. اثبت أنّ T توزيع متهي الرتبة.
2. عيّن $\operatorname{Supp} T$. هل T متراص الحامل؟

حل التمرين 2.31

1. **إثبات أنّ T توزيع متهي الرتبة.**

من أجل كل متراص $K \subset \mathbb{R}^2$ و $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$ ، لدينا:

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_0^1 \varphi(x, x+1)\ \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 |\varphi(x,x+1)|\ \mathrm{d}x \leqslant \sup_{(x,y)\in K} |\varphi(x,y)| = p_{K,0}(\varphi).$$

ومنه T توزيع متهي الرتبة ورتبته تساوي 0.

2. **تعين** $\operatorname{Supp} T$.

نضع

$$K = \{(x, x+1) : 0 \leqslant x \leqslant 1\} = \text{مغلق},$$

ونضع $w = C_{\mathbb{R}^2} K$

إنّ w مفتوح ولدينا:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x, x+1)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 0\ \mathrm{d}x = 0.$$

ومنه $\operatorname{Supp} T \subset w = K$.

نفرض أنّ $a \notin \operatorname{Supp} T$.

توجد كرة $B(a, r)$ **بحيث** $B(a, r) \subset C_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Supp} T$. إذن $\forall \varphi \in \mathcal{D}(B(a, r)),\ \langle T, \varphi \rangle = 0$.

لنثبت أنّ هذا خطأ: يوجد $\varphi \in \mathcal{D}(B(a, r))$ **بحيث** $\varphi \geqslant 0$ و $\varphi = 1$ في $B\left(a, \dfrac{r}{2}\right)$. ومنه يوجد $\alpha > 0$ **بحيث**

$$\forall x \in [a - \alpha, a + \alpha],\ \ \varphi(x, x+1) = 1.$$

ومنه

$$\langle T, \varphi \rangle \geqslant \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} \varphi = 2\alpha > 0.$$

ومنه تناقض يثبت أنّ $a \in \operatorname{Supp} T$. إذن $K = \operatorname{Supp} T$.

تمرين 2.32

بيّن أنّ $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ المعرف بـ $\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2)\ \mathrm{d}x$ توزيع وعيّن رتبته.

حل التمرين 2.32

إذا كان $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، يوجد $A > 0$ **بحيث** $\operatorname{Supp} \varphi \subset [-A, A]$. عندئذ تبين العلاقة الموالية أنّ T تطبيق (لاحظ أنّ $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y < +\infty$):

$$\langle T, \varphi \rangle = 2\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \int_0^{A} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y < +\infty.$$

ثم إنّ T خطي، و إذا كان $K \subset \mathbb{R}$ متراصا فإنه يوجد $A > 0$ **بحيث** $K \subset [-A, A]$. ولذا من أجل $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ يكون:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant \int_0^A \frac{|\varphi(y)|}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y \leqslant \left(\int_0^A \frac{1}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y\right) \sup_{y \in K} |\varphi(y)| = C \cdot p_{K,0}(\varphi).$$

وهو ما يثبت أنّ T توزيع متهي الرتبة، ورتبته تساوي 0.

تمرين 2.33
ليكن التطبيق $T:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ المعرف بـ:

$$T:\varphi\mapsto\langle T,\varphi\rangle=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)-\varphi(0)-\frac{\varphi'(0)}{m}\right).$$

1. اثبت أنّ T توزيع.
2. اثبت أنّ $\operatorname{Supp}T=\{0\}\bigcup\left\{\frac{1}{m}:m\in\mathbb{N}^\star\right\}$.

حل التمرين 2.33

1. **إثبات أنّ T توزيع.**
ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. يوجد $a>0$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi\subset[-a,a]$.
أ) T معرف جيدا. نكتب نشر تايلور من الرتبة 2 لـ φ عند النقطة $\frac{1}{m}$ في جوار الصفر:

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right)=\varphi(0)+\frac{1}{m}\varphi'(0)+\frac{1}{2m^2}\varphi''(\xi_m),\ \ \xi_m\in\left(0,\frac{1}{m}\right).$$

ومنه:

$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{2m^2}\varphi''(\xi_m).$$

لدينا:

$$\left|\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{2m^2}\varphi''(\xi_m)\right|\leqslant\frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi''(x)|\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{m^2}\right|<+\infty.$$

إذن السلسلة متقاربة مطلقا، فهي متقاربة. ومنه T معرف جيدا.
ب) خطية T واضحة.
جـ) إستمرار T. ليكن K متراصا وليكن $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. لدينا:

$$|\langle T,\varphi\rangle|=\left|\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{2m^2}\varphi''(\xi_m)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\sup_{x\in K}|\varphi''(x)|\right)\leqslant Cp_{K,2}.$$

ومنه إستمرار T.
من أ، ب وجـ نستنتج أنّ T توزيع رتبته أصغر أو تساوي 2.

2. **إثبات أنّ** $\operatorname{Supp}T=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{m}:m\in\mathbb{N}^\star\right\}$.

نضع

$$K = \left\{\frac{1}{m}; m \in \mathbb{N}^\star\right\},$$

ويكفي إثبات أنّ $\operatorname{Supp} T \subset \overline{K}$ و $K \subset \operatorname{Supp} T$.

• لنبيّن أوّلا أنّ

$$\operatorname{Supp} T \subset \overline{K}.$$

لهذا يكفي إثبات أنّ $C_{\mathbb{R}}\overline{K} \subset C_{\mathbb{R}}\operatorname{Supp} T$.

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(C_{\mathbb{R}}\overline{K})$. بما أنّ $0, \frac{1}{m} \notin C_{\mathbb{R}}\overline{K}$ فإنّ $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi\left(\frac{1}{m}\right) = 0$. ومنه $\langle T, \varphi\rangle = 0$. أي أنّ $C_{\mathbb{R}}\overline{K} \subset C_{\mathbb{R}}\operatorname{Supp} T$. وبالتالي $\operatorname{Supp} T \subset \overline{K}$.

• لنبيّن الآن أنّ

$$K \subset \operatorname{Supp} T.$$

ليكن $m \in \mathbb{N}^\star$. إثبات أنّ $\frac{1}{m} \in \operatorname{Supp} T$ يعود إلى إثبات أنّه من أجل كل مفتوح U يحوي النقطة $\frac{1}{m}$، يوجد تابع $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ بحيث $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$.

ليكن W مفتوحا يشمل $\frac{1}{m}$. يوجد $\varepsilon < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$ بحيث $U_\varepsilon = [\frac{1}{m} - \varepsilon, \frac{1}{m} + \varepsilon] \subset W$.

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ بحيث $\varphi = 1$ على U_ε و $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. نلاحظ أنّ

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi\left(\frac{1}{m}\right) \neq 0.$$

وهذا يعني أنّ $\frac{1}{m} \in \operatorname{Supp} T$. ومنه نستنتج المساواة.

تمرين 2.34

نعتبر التوزيع $T = H + \delta$ (أي مجموع توزيعي هفسايد وديراك). عيّن $\operatorname{Supp} T$.

حل التمرين 2.34

نلاحظ أنّه إذا كان $\varphi \in \mathcal{D}(]-\infty, 0[)$ فإنّ $\langle T, \varphi\rangle = 0$. هذا يعني أن $]-\infty, 0[$ محتوى في مفتوح إنعدام T. أذن $\operatorname{Supp} T \subset [0, +\infty[$.

ثم إذا كان $a \in]0, +\infty[$ فإنه يوجد $\varphi \in \mathcal{D}(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)$ موجب ويساوي 1 في $]a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}[$ حيث ε عدد صغير موجب تماما. نلاحظ عندئذ أنّ

$$\langle T, \varphi\rangle \geqslant \int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \varepsilon > 0.$$

إذن $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$. ومنه $a \in \operatorname{Supp} T$. ولذا $]0, +\infty[\subset \operatorname{Supp} T$. وبما أن $\operatorname{Supp} T$ مغلق فإن $\operatorname{Supp} T \supset \overline{]0, +\infty[} = [0, +\infty[$.

الخلاصة: $\operatorname{Supp} T = [0, +\infty[$.

تمرين 2.35

ليكن T توزيعا على $\mathbb{R}^n$ وليكن f تابعا من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}$ يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$.

1. اثبت أنّه إذا كان $fT = 0$ فإنّ

$$\operatorname{Supp} T \subset Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}.$$

2. عيّن التوابع f من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}$ بحيث $f\delta' = 0$.

حل التمرين 2.35

1. **إثبات أنّه إذا كان** $fT = 0$ **فإنّ** $\operatorname{Supp} T \subset Z(f)$.

ليكن $x \in \operatorname{Supp} T$ بحيث $x \notin Z(f)$. هذا يعني أنّ $f(x) \neq 0$ ويوجد جوار V لـ x بحيث $\forall x \in V : f(x) \neq 0$. وبما أنّ $x \in \operatorname{Supp} T$ ، يوجد $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ بحيث $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$. نضع $\psi = \dfrac{\varphi}{f}$. نلاحظ أنّ $\psi \in \mathcal{D}(V)$ و $\langle fT, \psi\rangle \neq 0$ وهذا تناقض مع الفرض $fT = 0$. وبالتالي نستنتج أنّ $x \in Z(f)$. أي أنّ $\operatorname{Supp} T \subset Z(f)$.

2. **تعيين التابع** f **من الصنف** C^∞ **على** $\mathbb{R}$ **بحيث** $f\delta' = 0$.

يكون

$$\langle f\delta', \varphi\rangle = -[f'(0)\varphi(0) + f(0)\varphi'(0)] = 0, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

إذاا $f(0) = f'(0) = 0$.

تمرين 2.36

ليكن T توزيعا على $\mathbb{R}$ و f تابعا من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}$ بحيث $f(x) = 0$ من أجل كل $x \in \operatorname{Supp} T$. هل $fT = 0$ ؟

حل التمرين 2.36

الإجابة هي: لا.

مثال مضاد: لنحسب $x\delta'$. **لاحظ أنّ** $\operatorname{Supp} \delta' = \{0\}$. ليكن φ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\langle x\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', x\varphi\rangle = -\langle \delta, (x\varphi)'\rangle = -(x\varphi)'(0) = -\varphi(0).$$

إذا كان $\varphi(0) \neq 0$ فإنّ $\langle x\delta', \varphi\rangle \neq 0$. ومنه $x\delta' \neq 0$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

وهذا المثال يبين أنّه بمعطيات التمرين، ليس لدينا دائما $fT = 0$.

تمرين 2.37

ليكن $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ حيث f لا ينعدم أبدا. حل المعادلة $fT' = 0$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

حل التمرين 2.37

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. نضع $\psi = \dfrac{\varphi}{f}$ فنلاحظ أنّ $\psi = \dfrac{\varphi}{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
ومنه

$$0 = \langle 0, \psi\rangle = \langle fT', \psi\rangle = \langle T', f\psi\rangle = \langle T', \varphi\rangle.$$

أي أنّ $\langle T', \varphi\rangle = 0$ مهما كان $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ومنه $T = c$ حيث c ثابت عقدي كيفي.

تمرين 2.38

ليكن $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

1. نفرض (هنا فقط) أنّ $T' = f$ حيث f تابع مستمر. نضع $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. عيّن $(g-T)'$. ثم عيّن الفضاء الذي ينتمي إليه T.
2. نفرض الآن أنّ امشتق الثالث لـ $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ منعدم (أي $T''' = 0$). عيّن T.

حل التمرين 2.38

ليكن $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

1. لدينا:

$$(g-T)' = g' - T' = f - f = 0.$$

ومنه $g - T = c$ حيث c ثابت كيفي. إذن $T = g - c$. بمعنى أنّ T مستمر، علما أنّ T' مستمر أيضا حسب الفرض. ومنه $T \in C^1(\mathbb{R})$.

2. نلاحظ أنّ $T''' = 0$ يؤدي إلى $T'' = c$ حيث c ثابت. ومن ثم $(T' - cx)' = 0$. إذن $(T' - cx) = a$ حث a ثابت كيفي. ومنه $(T - bx^2 - ax)' = 0$. وعليه $(T - bx^2 - ax) = d$ حيث d ثابت كيفي. وبالتالي $T = bx^2 + ax + d$ حيث a, b, d ثوابت كيفية.
وهو المطلوب.

تمرين 2.39

.1

(أ) ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi(0) = 0$.

ـ تأكد من أنّ $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t$.

ـ استنتج أنه يوجد ψ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi = x\psi$.

(ب) ليكن $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_0(0) = 1$. اثبت أنّ

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \varphi = \varphi(0)\varphi_0 + x\psi.$$

2. ليكن T توزيعا على $\mathbb{R}$.

(أ) نفرض أنّ $xT = 0$. بيّن أنّه يوجد ثابت عقدي C بحيث $T = C\delta$.

(ب) استنتج أنّه اذا كان $(x-a)T = 0$ ، فانّه يوجد ثابت عقدي α بحيث $T = \alpha\delta_a$.

(جـ) نفرض أنّه يوجد a و b ثابتين حقيقيين مختلفين بحيث $(x-a)(x-b)T = 0$. أ. اثبت أنّه يوجد ثابتين عقديين α و β بهيث $T = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$.

حل التمرين 2.39

.1

(أ) ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi(0) = 0$.

ـ **التأكد أنّ** $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t$.

هذه العلاقة قائمة من أجل $x = 0$.

لمّا $x \neq 0$ ، نقوم بتبديل المتغير ونضع $y = tx$. ومنه $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}y$. لدينا:

$$x \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}x = x\frac{1}{x}\int_0^x \varphi'(y)\mathrm{d}y = \varphi(x) - \varphi(0) = \varphi(x).$$

ـ **استنتاج أنّه يوجد** ψ **من** $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ **بحيث** $\varphi = x\psi$.

نضع $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t$. لدينا:

- $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ حسب النظرية الأساسية للتحليل.
- ψ ذو سند متراص حيث $\operatorname{Supp}\psi = \operatorname{Supp}\varphi$.

وهو المطلوب.

(ب) ليكن $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_0(0) = 1$.

ـ **إثبات أنّ** $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \varphi = \varphi(0)\varphi_0 + x\psi(x)$ **:**

بتطبيق نتيجة السؤال 1. على التابع $\varphi(x) - \varphi(0)\varphi_0(x)$ نجد المطلوب.

2. ليكن T توزيعا على $\mathbb{R}$.

(أ) نفرض أنّ $xT = 0$. **إثبات أنه يوجد ثابت** c **بحيث** $T = c\delta$.

ليكن φ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. من السؤال (ب)، لدينا:

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \varphi_0\rangle + \langle T, x\psi\rangle.$$

و

$$\langle T, x\psi\rangle = \langle xT, \psi\rangle = 0.$$

وبالتالي نستنتج أنّ $T = c\delta$ حيث $c = \langle T, \varphi_0\rangle$.

(ب) استنتاج أنّه إذا كان $(x-a)T = 0$ **فإنّه يوجد ثابت عقدي** α **بحيث** $T = \alpha\delta$.

ليكن $\varphi_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_a(a) = 1$. من أجل كل φ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، يوجد $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، بحيث:

$$\varphi(x) = \varphi(a)\varphi_a(x) + (x-a)\psi(x),$$

لدينا:

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(a)\langle T, \varphi_a\rangle + \langle (x-a)T, \psi\rangle.$$

بما أنّ $(x-a)T = 0$ ، فإنّ $T = c\delta$ مع $c = \langle T, \varphi_a\rangle$.

(جـ) نفرض أنّه يوجد a **و** b **حقيقيين مختلفين بحيث** $(x-a)(x-b)T = 0$. **اثبات أنّه يوجد ثابتين** α **و** β **بحيث** $T = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$.

ليكن $\varphi_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_a(a) = 1$ و $\varphi_a(b) = 0$ ، وليكن $\varphi_b \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_b(b) = 1$ و $\varphi_b(a) = 0$.

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ومنه يوجد $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث:

$$\varphi(x) = \varphi(a)\varphi_a(x) + \varphi(b)\varphi_b(x) + (x-a)(x-b)\psi(x).$$

لدينا:

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi(a)\varphi_a\rangle + \langle T, \varphi(b)\varphi_b\rangle + \langle T, (x-a)(x-b)\psi\rangle.$$

لدينا فرضا أنّ $(x-a)(x-b) = 0$. ومنه:

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(a)\langle T, \varphi_a\rangle + \varphi(b)\langle T, \varphi_b\rangle.$$

أي يوجد ثابتين عقديين $\alpha = \langle T, \varphi_a\rangle$ و $\beta = \langle T, \varphi_b\rangle$ ، بحيث $T = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$.
وهو المطلوب.

تمرين 2.40

1. قارن بين توزتع ديراك δ والتوزيع $e^{x^2/2}\delta$.

2. نفرض أنّ توزيعا $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ يحقق $(e^{x^2/2}T)' = \delta$. اثبت أنّه حل للمعادلة التفاضلية $T' + xT = \delta$.
3. استنتج كل حلول المعادلة $T' + xT = \delta$.

حل التمرين 2.40

1. ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\langle e^{x^2/2}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, e^{x^2/2}\varphi \rangle = 1.\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

أي أنّ $\delta = e^{1/x^2}\delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. لدين من جهة: $(e^{x^2/2}T)' = e^{x^2/2}(T' + xT)$ ومن جهة أخرى لدينا حسب السؤال السابق فإن $\delta = e^{x^2/2}\delta$. ومنه لدينا:

$$e^{x^2/2}(T' + xT) = e^{x^2/2}\delta.$$

ومنه $T' + xT = \delta$.

3. ننطلق من $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ الوارد في السؤال السابق، والذي يحقق $(e^{x^2/2}T)' = \delta = H'$. ومنه $(e^{x^2/2}T - H)' = 0$. وعليه $e^{x^2/2}T - H = c$ ، حيث c ثابت.
إذن حل المعادلة $T' + xT = \delta$ يكتب على الشكل:

$$T = e^{-x^2/2}(H + c),$$

حيث c ثابت.

تمرين 2.41

1. اوجد في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ الحل العام للمعادلة

$$T'' - 4T = 0. \tag{2.3}$$

ارشاد: فكّر في $T = e^{rx}$ مع $r \in \mathbb{C}$.

2. اوجد حلا للمعادلة

$$T'' - 4T = \delta' \tag{2.4}$$

يكتب على الشكل $T = gH$ ، حيث H هو تابع هيفيسايد و $g \in C^2(\mathbb{R})$. استنتج حل المعادلة (2.4).

حل التمرين 2.41

1. **إيجاد في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ الحل العام للمعادلة** (2.3).

نبحث عن الحل العام من الشكل $T = e^{rx}$ مع $r \in \mathbb{C}$. بالتعويض في (2.3) ، نجد:

$$e^{rx}(r^2 - 4) = 0.$$

ومنه $r = \pm 2$. وبالتالي الحل العام لـ (2.3) هو:

$$T = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

حيث C_1 و C_2 ثابتين عقديين كيفيين.

2. **تعيين حل خاص للمعادلة** (2.4).

نبحث عن حل خاص من الشكل $T_p = gH$ حيث H هو تابع هيفيسايد و $g \in C^2(\mathbb{R})$.

لدينا:

$$T = gH, T' = g'H + gH', T'' = g''H + 2g'H' + gH''.$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\langle T'', \varphi\rangle = \langle g''H, \varphi\rangle + 2\langle g'H', \varphi\rangle + \langle gH'', \varphi\rangle.$$

لدينا:

$$\langle g'H', \varphi\rangle = \langle H', g'\varphi\rangle = -\langle H, (g'\varphi)'\rangle = -\int_0^{+\infty} (g'\varphi)'(x)\ \mathrm{d}x = g'(0)\varphi(0) = g'(0)\langle\delta, \varphi\rangle.$$

أي أنّ $g'H' = g'(0)\delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ولدينا:

$$\langle gH'', \varphi\rangle = \langle H'', g\varphi\rangle = \langle H, (g\varphi)''\rangle = \int_0^{+\infty} (g\varphi)''(x)\ \mathrm{d}x = -(g\varphi)'(0) = -g'(0)\varphi(0) - g(0)\varphi'(0).$$

أي أنّ $gH'' = -g'(0)\delta + g(0)\delta'$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ومنه

$$T'' = g''H + 2g'(0)\delta - g'(0)\delta + g(0)\delta' = g''H + g'(0)\delta + g(0)\delta'.$$

وبالتالي،

$$T'' - 4T = g''H + g'(0)\delta + g(0)\delta - 4gH.$$

أي أنّ

$$(g'' - 4g)H + g'(0)\delta + g(0)\delta' = \delta'.$$

ومنه g يحقق المسألة الحدية:

$$\begin{cases} g'' - 4g = 0; \\ g'(0) = 0; \\ g(0) = 1, \end{cases}$$

حلها هو

$$g(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x).$$

ومنه $T_p = \cosh(2x)H$ حل خاص للمعادلة (2.4). ونستنتج أنّ الحل العام لـ (2.4) هو

$$T = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \cosh(2x)H.$$

تمرين 2.42

1. اوجد الحل العام في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ للمعادلة $2xT'' - T' = 0$.
إرشاد: يمكن البحث عن حل من الشكل x^r.
2. عين الحل العام للمعادلة $2xT'' - T' = \delta$.
إرشاد: يمكن البحث عن حل خاص من الشكل $a \cdot H$ حيث a ثابت حقيقي و H تابع هيفيسايد.

حل التمرين 2.42

1. **إيجاد الحل العام في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ للمعادلة** $2xT'' - T' = 0$. بإتباع الإرشاد نجد أنّ $r = 0$ أو $r = \frac{3}{2}$ ، وبالتالي فالحل المطلوب يكتب على الشكل $T = \alpha + \beta f$ حيث $f(x) = |x|^{3/2}$ و α و β ثابتان.
ملاحظة: لاحظ أنّ $f(x) = |x|^{3/2}$ تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله، و $f'(x) = |x|^{1/2}$ ، وأنّ $f''(x) = \frac{3}{4}|x|^{-1/2} \cdot \operatorname{sgn} x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2. **تعيين الحل العام للمعادلة** $2xT'' - T' = \delta$.
بالتعويض نجد $a = -\frac{1}{3}$: من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ نكتب أنّ

$$\langle 2xT'' - T', \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

ومنه

$$-a\langle \delta, x\varphi' + \varphi\rangle = (1 + a)\varphi(0),$$

أي أنّ

$$-2a\varphi(0) = (1 + a)\varphi(0),$$

ومنه القيمة $a = -\frac{1}{3}$.

وعليه فالحل العام للمعادلة المعتبرة يساوي مجموع هذا الحل الخاص $\frac{-1}{3}H$ مع الحل العام $T=\alpha+\beta f$ المحصل عليه في السؤال السابق، أي أنّ الحل المطلوب هو $T=\alpha+\beta f-\frac{1}{3}H$ حيث α و β ثابتان و $f(x)=|x|^{3/2}$.

تمرين 2.43

حل في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ المعادلات التالية:

1. $xT=c$ حيث c ثابت حقيقي.

إرشاد: استعمال أنّ $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

2. ليكن $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ حيث $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0$.

أ) $fT=0$.

ب) $fT=c$.

جـ) $f'T+fT'=0$.

3. $T'+xT=0$.

حل التمرين 2.43

1. **حل في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ **المعادلة** $xT=c$.

أوّلا، لنعيّن الحل العام للمعادلة المتجانسة $xT=0$.

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. ومنه يوجد $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi(x)=\varphi(0)\varphi_0(x)+x\psi(x)$ حيث $\varphi_0\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ مع $\varphi_0(0)=1$. لدينا:

$$\langle T,\varphi\rangle=\langle T,\varphi(0)\varphi_0+x\psi\rangle=\varphi(0)\langle T,\varphi_0\rangle+\langle xT,\psi\rangle.$$

نضع $\alpha=\langle T,\varphi_0\rangle$ ولدينا $\langle xT,\psi\rangle=0$ ، ومنه

$$\langle T,\varphi\rangle=\alpha\langle\delta,\varphi\rangle,$$

أي أنّ $T=\alpha\delta$.

نعيّن الآن حلا خاصا لـ $xT=c$.

بما أنّ $x\mathrm{vp}\frac{1}{x}=1$ ، نكتب $cx\mathrm{vp}\frac{1}{x}=c$ أي $x(c\mathrm{vp}\frac{1}{x})=c$.

إذن $T=c\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ حل خاص للمعادلة $xT=c$ ، ثم إنّ $xT=c$ يؤدّي إلى $x(T-c\mathrm{vp}\frac{1}{x})=0$ ونحن نعلم في هذه الحالة أنّ $T=\alpha\delta+c\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ حيث α و c ثابتين عقديين.

وبالتالي نستنتج أنّ الحل العام هو $T=\alpha\delta+c\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ حيث α و c ثابتين عقديين.

.2

أ ـ **حل في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ **المعادلة** $fT = 0$ **حيث** $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ **و** $\forall x : f(x) \neq 0$.

نضع $\psi = \frac{\varphi}{f}$ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ولدينا:

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, f\psi \rangle = \langle fT, \psi \rangle = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ومنه $T = 0$.

لاحظ أنّ هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا لأنّ معامل T لا ينعدم أبدا عكس المعادلة السّابقة الّتي تقبل ما لا نهاية من الحلول.

ب ـ **حل في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ **المعادلة** $fT = c$ **حيث** c **ثابت عقدي.**

لدينا

$$f\left(T - \frac{c}{f}\right) = 0 \Rightarrow T - \frac{c}{f} = 0 \Rightarrow T = \frac{c}{f}$$

جـ ـ **حل في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ **المعادلة** $f'T + fT' = 0$

لدينا:

$$f'T + fT' = 0 \Rightarrow (fT)' = 0 \Rightarrow fT = c \Rightarrow T = \frac{c}{f},$$

حيث c ثابت عقدي.

3. **حل في** $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ **المعادلة** $T' + xT = 0$.

لدينا:

$$T' + xT = 0 \Rightarrow (xT)' = 0 \Rightarrow xT = c \Rightarrow T = \alpha\delta + \mathrm{vp}\frac{1}{x},$$

حيث α و c ثابتان عقديان.

باب 3

فضاءات سوبولاف Espaces de Sobolev

فضاءات سوبولاف هي فضاءات شعاعية نظيمية تستعمل في حل العديد من المسائل في المعادلات التفاضلية الجزئية.
في كل ما يأتي نرمز بـ Ω لمفتوح غير خال من $\mathbb{R}^n$.

تعريف 3.1 [تعريف فضاءات سوبولاف]
ليكن $m \in \mathbb{N}$. نعرف $H^m(\Omega)$ بـ

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) : |\alpha| \leqslant m\}.$$

تعميم :
نرمز بـ $W_p^m(\Omega)$ أو بـ $W^{m,p}(\Omega)$ للفضاء المعرف بـ:

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) : |\alpha| \leqslant m\},$$

حيث $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.
وبصفة خاصة لدينا:

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

لاحظ أنّه من أجل $m = 0$ ، الفضاء $W^{m,p}$ هو فضاء لوبيغ $L^p(\Omega)$.
نرمز بـ $(\cdot|\cdot)$ للجداء السلمي في $L^2(\Omega)$:

$$(u|v)_{L^2} = \int_\Omega u\overline{v} \ \mathrm{d}x,$$

وبـ $||\cdot||_{L^p}$ للنظيم على $L^p(\Omega)$:

$$||u||_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

لدينا المبرهنة التّالية:

مبرهنة 3.1 [بنية فضاء شعاعي]
الفضاءات $H^m(\Omega)$ فضاءات هيلبرتية لما نزودها بالجداء السلمي

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

نعرف النظيم الطبيعي على $W^{m,p}(\Omega)$ بـ:

$$||u||_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha u||_{L^p}^p\right)^{1/p} & : 1 \leqslant p < +\infty, \\ \displaystyle\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha u||_{L^\infty} & : p = +\infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

مزودا بهذا النظيم ، يكون الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ فضاء لبناخ.
يمكن اثبات أنّ النظيم

$$||u||_{m,p} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha u||_{L^p} & : 1 \leqslant p < +\infty; \\ \displaystyle\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha u||_{L^\infty} & : p = +\infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

مكافيء للنظيم المعرف في (3.1) ، وهذا نتيجة لتكافؤ النظيمات في $\mathbb{R}^q$ حيث $q = \mathrm{card}(\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| < m\})$.
الفائدة من النظيم المعرف في (3.1) هي أنّه في حالة $p = 2$ ، يعطي لـ H^m البنية الهلبرتية. وهذا الشيء غير ممكن مع النظيم المعرف في (3.2).

ملاحظة 3.1 [فضاءات سوبولاف والإستمرار]
في البعد 1 ($n = 1$)، مع $a, b \in \mathbb{R},\ a < b, 1 \leqslant p \leqslant +\infty$ ، لكل عنصر من $W^{1,p}(]a,b[)$ الذي هو عبارة عن صنف تكافؤ، ممثل مستمر وحيد. والسبب أنّه في البعد 1 ، يمكن كتابة كل u من $W^{1,p}(]a,b[)$ على شكل تكامل مشتقه

$$u \in W^{1,p}(]a,b[) \Rightarrow \{\exists \tilde{u} \in \mathcal{C}([a,b]), \exists v \in L^p(]a,b[); u = \tilde{u} \text{ ش.ك},\ \ \tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x v(s)\mathrm{d}s\}.$$

(انظر التمرين (3.1)).
هذا غير صحيح في البعد $n > 1$. وبصفة خاصة $H^1(\Omega) \not\subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. يمكننا رؤية هذا في المثال

ليكن

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, \;\; i = 1,2 \right\},$$

و u التابع المعرف على Ω بـ $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$ مع $\gamma \in]0, 1/2[$.
لدينا $u \in H^1(\Omega)$ لكن $u \notin L^\infty(\Omega)$. ومنه بصفة خاصة، $u \notin \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. (انظر التمرين (3.12)).

مبرهنة 3.2
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ كثيف $H^m(\mathbb{R}^n)$.

وهذا يعني أنّه من أجل كل عنصر u من $H^m(\mathbb{R}^n)$ ، توجد متتالية (φ_n) من $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\varphi_n \to u$ في $H^m(\mathbb{R}^n)$. ونكتب

$$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}^{H^m(\mathbb{R}^n)} = H^m(\mathbb{R}^n).$$

ملاحظة 3.2
عموما، $\mathcal{D}(\Omega)$ ليس كثيفا في $H^m(\Omega)$.

تعريف 3.2 [تعريف الفضاء $H_0^m(\Omega)$]
نرمز بـ $H_0^m(\Omega)$ للملاصقة $\mathcal{D}(\Omega)$ في $H^m(\Omega)$:

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)} = H_0^m(\Omega).$$

ملاحظة 3.3
لدينا $H_0^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$. وعموما $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$.

لنعرف الآن فضاءات سوبولاف ذات رتبة سالبة.

تعريف 3.3
ليكن $m \in \mathbb{N}$. $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ إذا وفقط إذا كان:
1 - $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
2 - $\exists C \geqslant 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : |\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| \leqslant C ||\varphi||_{H^m(\mathbb{R}^n)}$.

حسب هذا التعريف توجد علاقة بين $H^m(\mathbb{R}^n)$ و $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ ، حيث $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ يعني أنّ u شهكل خطي مستمر على $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ مزودا بالطبولوجيا المستنتجة من طوبولوجيا $H^m(\mathbb{R}^n)$. وهذا ما يسمح لنا بتمديد قوس الثنوية $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ إلى $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-m},H^m}$.

نظرية 3.1 [نظرية تمديد الثنوية]

1 - ليكن $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. إنّ التطبيق

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \end{array}$$

يمدد بطريقة وحيدة إلى شكل خطي ومستمر على $H^m(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{rcl} H^m(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{C} \\ v & \mapsto & \langle u, v \rangle_{H^{-m},H^m}. \end{array}$$

من المهم الإشارة إلى تعريف $\langle u, v \rangle_{H^{-m},H^m}$ بفضل المبرهنة **3.1** :

$$u \in H^{-m}(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

$$v \in H^m(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists \varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_j \xrightarrow{H^m} v.$$

ومنه لدينا:

$$\langle u, v \rangle_{H^{-m},H^m} := \lim_{j \to +\infty} \langle u, \varphi_j \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

2 - يسمح التمديد المعرف آنفا بمطابقة الفضاء $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ بثنوي الفضاء $H^m(\mathbb{R}^n)$. أي أنّ

$$\forall L \in (H^m(\mathbb{R}^n))', \exists! u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n), \forall v \in H^m(\mathbb{R}^n) : L(v) = \langle u, v \rangle_{H^{-m},H^m}.$$

ملاحظة 3.4

نلاحظ أنّ

$$\ldots \subset H^2 \subset H^1 \subset H^0 \equiv L^2 \subset H^{-1} \subset H^{-2} \subset \ldots \subset H^{-m} \subset \ldots$$

تعميم: من أجل كل $p > 1$ فإن ثنوي الفضاء $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ هو الفضاء $W^{-m,p'}$ حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

إليك النتيجة المهمة التالية التي تميز عناصر الفضاء الثنوي $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

نظرية 3.2
ليكن $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.
يوجد عدد منته من العناصر $(f_\alpha)_{|\alpha|\leqslant m} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ، بحيث $u = \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha f_\alpha$.
هذا يعني أن كل عنصر من الفضاء الثنوي $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ يكتب على شكل مجموع منته من مشتقات دوال مربعاتها قابلة للمكاملة.

مثال:
ليكن $u \in H^{-1}(\mathbb{R})$. حسب النظرية، يوجد $f_0, f_1 \in L^2(\mathbb{R})$ بحيث $u = f_0 + f_1'$.

نعتبر في $\mathbb{R}^n$ المعادلة التفاضلية ذات المشتقات الجزئية التّالية:

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}D_ju) - \lambda u = Au - \lambda u = f,$$

حيث $\lambda > 0$ ، $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ توابع حقيقية محدودة مع $a_{ij} = a_{ji}$ من أجل كل i و j و تحقق:

$$\exists C \geqslant 0, \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j} \geqslant C|\xi|^2.$$

ونقول أنّ المصفوفة (a_{ij}) موجبة بانتظام.
مثلا، يمكننا اعتبار $a_{ij} = \delta_{ij}$ حيث يشير δ_{ij} لرمز كرونيكر (Kronecker). فنحصل على المعادلة $\Delta u - \lambda u = f$.
لدينا المبرهنة التّالية:

مبرهنة 3.3
لكل $\lambda > 0$ ولكل $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ ، يوجد $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ وحيد، بحيث $(A - \lambda)u = f$.

الإثبات:
لإثبات المبرهنة، نحتاج إلى التوطئة التّالية:

توطئة 3.1
التطبيق

$$\begin{array}{rcl} H^1(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{C} \\ (u,v) & \mapsto & (u,v)_* \end{array}$$

حيث

$$(u,v)_* = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}(x)D_iu\overline{D_jv}\mathrm{d}x + \lambda\int_{\mathbb{R}^n} u\overline{v}\mathrm{d}x,$$

يمثل جداء سلميا على $H^1(\mathbb{R}^n)$ نظيمه يكافيء النظيم المعتاد على $H^1(\mathbb{R}^n)$.

ليكن $f\in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$.
نعتبر الشكل الخطي:

$$\begin{array}{rcl} H^1(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{C} \\ v & \mapsto & \langle f,v\rangle_{H^{-1},H^1}. \end{array}$$

لدينا من نظرية تمثيل ريس (Riesz) ، أنّ:

$$\exists! w\in H^1(\mathbb{R}^n), \forall v\in H^1(\mathbb{R}^n): \langle f,v\rangle_{H^{-1},H^1} = (w,v)_*.$$

بصفة خاصة، لدينا من أجل كل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1},H^1} &= \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iw(x)\overline{D_j\varphi}\ \mathrm{d}x + \lambda\int_{\mathbb{R}^n} w\overline{\varphi}\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x)D_iw)\overline{\varphi}\ \mathrm{d}x + \lambda\int_{\mathbb{R}^n} w\overline{\varphi}\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

أي أنّ

$$\langle f,\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \left(-\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x)D_iw) + \lambda w, \varphi\right)_{L^2,L^2}.$$

بوضع $u=-w$ ، نجد:

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x)D_i) - \lambda u = f.$$

ومنه الوجود والوحدانية. □

لدينا نتيجة أخرى خاصة بالمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة $2m$.

مبرهنة 3.4

ليكن $m \in \mathbb{N}^\star$ كيفيا. المؤثر التفاضلي

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}: H^m(\mathbb{R}^n) &\to H^{-m}(\mathbb{R}^n)\\ u &\mapsto Au,\end{aligned}$$

تقايس تقابلي.

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.5

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ كثيف $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

اثبات المبرهنة:

ليكن $T \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. يوجد $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ وحيد بحيث $Au = T$ (حيث يرمز بـ A للمؤثر التفاضلي $\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}$). وبما أنّ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^m(\mathbb{R}^n)$ ، فإنّه توجد متتالية (φ_j) من $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\varphi_j \to u$ في $H^m(\mathbb{R}^n)$. وبما أنّ A مستمر، فإنّ $A\varphi_j \to Au$ في $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ علما أنّ $A\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. وهو المطلوب. □

ملاحظة:

تظل هذه المبرهنة قائمة لكل $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ، على الرغم من أنّه على العموم، $\mathcal{D}(\Omega)$ ليس كثيفا في $H^m(\Omega)$ لـمّا $m \in \mathbb{N}^\star$.

3.1 تمارين محلولة

تمرين 3.1

ليكن $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ و $u \in W^{1,p}(]0,1[,\mathbb{R})$.

أ - أثبت أنّه يوجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث $u(x) = c + \int_0^x u'(t)\ \mathrm{d}t$ ، من أجل تقريبا كل $x \in]0,1[$.

ثم استنتج أنّ $u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (بمعنى أنّه يوجد $v \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ بحيث $u = v$ على شك على $]0,1[$) وبمطابقة u و v يمكننا استنتاج أنّ $W^{1,p}(]0,1[) \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

ب - أثبت أنّ $||u||_\infty \leqslant ||u||_{W^{1,p}(]0,1[)}$.

جـ ـ أثبت أنّه لمّا $p > 1$ فإنّ u تابع لهولدر أسّه $1 - \frac{1}{p}$.

2. ليكن $u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

نفرض أنّه يوجد $w \in L^p(]0,1[)$ بحيث $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)\ \mathrm{d}t$ ، من أجل كل $x \in]0,1[$.

أثبت أنّ $u \in W^{1,p}(]0,1[)$. و $u' = w$

حل التمرين 3.1

.1

أ ـ ليكن $x \in [0,1]$. نضع $F(x) = \int_0^x u'(t)\ \mathrm{d}t$.

بما أنّ $u' \in L^1(]0,1[)$ فإنّ $F \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. لنبيّن الآن أنّ $F' = u'$.

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. لدينا

$$\langle F', \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_0^1 F(x)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(\int_0^1 1_{]0,x[}(t) u'(t)\ \mathrm{d}t \right) \varphi'(x)\ \mathrm{d}x.$$

بملاحظة أنّ $1_{]0,x[}(t) = 1_{]t,1[}(x)$ من أجل كل $t, x \in]0,1[$ و بإستخدام نظرية فوبيني، نجد

$$\langle F', \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_0^1 (\int_0^1 1_{]t,1[}(x)\varphi'(t)\ \mathrm{d}x) u'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t) u'(t)\ \mathrm{d}t,$$

وهذا ما يبيّن أنّ $F' \overset{\mathcal{D}'}{=} u'$.

ومنه لدينا $(u - F)' = 0$. إذن يوجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث $u - F = c$ شبه كليا. أي أنّ

$u(x) = c + \int_0^x u'(t)\ \mathrm{d}t$ شبه كليا من أجل كل $x \in]0,1[$.

ب ـ نختار لـ u ممثل مستمر. ومنه لدينا من أجل كل $x \in [0,1]$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\ \mathrm{d}t.$$

ومنه لدينا كذلك من أجل كل $x, y \in [0,1]$

$$u(x) = u(y) + \int_y^x u'(t)\ \mathrm{d}t,$$

ومنه نستنتج أنّ

$$|u(x)| \leqslant |u(y)| + \int_0^1 |u'(t)|\ \mathrm{d}t.$$

بمكاملة طرفي هذه المتباينة على $[0,1]$ (بالنسبة لـ y)، نجد من أجل كل $x \in [0,1]$

$$|u(x)| \leqslant ||u||_{L^1} + ||u'||_{L^1} = ||u||_{W^{1,1}},$$

ومنه بأخذ الأعلى على x وباستخدام متباينة هولدر، نجد

$$||u||_{L^\infty} \leqslant ||u||_{L^1} + ||u'||_{L^1} \leqslant ||u||_{L^p} + ||u'||_{L^p} = ||u||_{W^{1,p}}.$$

جـ ـ نختار ممثلا مستمرا لـ u. ليكن $x, y \in [0,1] : y > x$. لدينا

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)\ \mathrm{d}t,$$

ومنه باستخدام متباينة هولدر نجد

$$|u(y) - u(x)| \leqslant \left(\int_x^y |u'(t)|^p\ \mathrm{d}t\right)^{1/p} |y-x|^{1-\frac{1}{p}} \leqslant ||u||_{W^{1,p}}|y-x|^{1-\frac{1}{p}}.$$

2. واضح أنّ $u \in L^p(]0,1[)$. لإثبات أنّ $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ يكفي إثبات أنّ $u' = w$ أي أنّ

$$\langle u', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_0^1 w(t)\varphi(t)\ \mathrm{d}t,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)).$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. لدينا

$$\langle u', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_0^1 u(t)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^1 (\int_0^t w(x)\ \mathrm{d}x)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^1 (\int_0^1 1_{]0,t[}(x)w(x)\ \mathrm{d}x)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t.$$

نستخدم مرة أخرى نظرية فوبيني و المساواة $1_{]0,t[}(x) = 1_{]x,1[}(t)$ (من أجل كل $x, t \in]0,1[$)، نجد

$$\langle u', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_0^1 (\int_0^1 1_{]x,1[}(t)\varphi'(t))w(x)\ \mathrm{d}x)\mathrm{d}t = -\int_0^1 (\int_x^1 \varphi'(t)\ \mathrm{d}t)w(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi(x)w(x)\ \mathrm{d}x.$$

ومنه نستنتج أنّ $u' = w$.

تمرين 3.2

1. هل $\delta \in L^2(\mathbb{R})$ ؟

ارشاد: يمكن استعمال المتتالية φ_j المعرفة بـ $\varphi_j(x) = \varphi(jx)$ مع $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ حيث $\varphi(0) = 1$.

2. هل $\delta \in H^{-1}(\mathbb{R})$ ؟

إرشاد: استعمل أنّه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، لدينا:

$$(\varphi(x))^2 = \int_{-\infty}^x 2\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

حل التمرين 3.2

1. هل $\delta \in L^2(\mathbb{R})$ ؟

لو كان $\delta \in L^2(\mathbb{R}) \equiv H^0(\mathbb{R})$ لكان:

- $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- $\exists c \geqslant 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : |\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leqslant c||\varphi||_{H^0(\mathbb{R})}$.

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi(0) = 1$. نضع $\varphi_j(x) = \varphi(jx)$.
لدينا في هذه الحالة:

$$\forall j,\ \ |\varphi_j(0)| = 1 \leqslant c||\varphi_j||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

إذن

$$1 \leqslant c \int_{\mathbb{R}} (\varphi(jx))^2 \ \mathrm{d}x,$$

حيث c ثابت حقيقي.
بتبديل المتغير $y = jx$ نجد:

$$1 \leqslant \frac{c}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(y)\mathrm{d}y,$$

أي أنّ

$$j \leqslant c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(y)\mathrm{d}y,\ \ \forall j.$$

هذا يعني أنّ مجموعة الأعداد الطبيعية محدودة بنفس الثابت. وهذا غير ممكن. ومنه $\delta \notin L^2(\mathbb{R})$.

- هل $\delta \in H^{-1}(\mathbb{R})$ ؟

إثبات أنّ $\delta \in H^{-1}(\mathbb{R})$ يعود ذلك إلى إثبات أنّه

$$\exists c \geqslant 0 : (\varphi(0))^2 \leqslant c||\varphi||^2_{H^1(\mathbb{R})} = c(||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||\varphi'||^2_{L^2(\mathbb{R})}).$$

لدينا

$$(\varphi(x))^2 = \int_{-\infty}^{x} 2\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

ومنه

$$|(\varphi(0))^2| \leqslant 2 \int_{-\infty}^{0} |\varphi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

ومن ثمّ

$$|(\varphi(0))^2| \leqslant 2 \left(||\varphi||^2_{L^2} + ||\varphi'||^2_{L^2}\right).$$

إذن $\delta \in H^{-1}(\mathbb{R})$.

تمرين 3.3

ليكن التابع الحقيقي المعرف بـ $u(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$.

1. اثبت أنّ $u \in H^1(]-1,1[)$.
2. اثبت أنّ $u \notin H^2(]-1,1[)$.
3. هل $u \in H^1(\mathbb{R})$.

حل التمرين 3.3

1. يمكن القول إنّ $u(x) = x$ في المجال $]0,1[$ و $u(x) = 0$ في المجال $]-1,0[$. وهو ما يبيّن أنّ $u \in L^2(I)$. ثم إنه من الواضح أنّ

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & x \in]0,1[, \\ 0 & x \in]-1,0[. \end{cases}$$

وهو مايبين أن $u' \in L^2(I)$. إذن $u \in H^1(I)$.

2. ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\langle u'', \varphi \rangle = -\langle u', \varphi' \rangle = -\int_0^1 \varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

ولما كان $\delta \notin L^2(\Omega)$ فإنّ $u'' \notin L^2(\Omega)$. أي أنّ $u \notin H^2(\Omega)$.

3. نعلم من السؤال الأول أن $u' = H$ ، حيث H هو تابع هيفيسايد. ونلاحظ أن $H \notin L^2(\mathbb{R})$. ولذا فإن $u \notin H^1(\mathbb{R})$.

تمرين 3.4

1. هل التابعان التاليان في $H^1(\mathbb{R})$ ؟

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & : |x| \leqslant 1, \\ 0 & : |x| > 1. \end{cases}$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x+1 & : -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x+1 & : 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & : x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$$

2. هل التابع المعرف بـ

$$h(x) = \begin{cases} 1 & : x \in]0,1[; \\ 0 & : x \in]-1,0[, \end{cases}$$

ينتمي إلى $H^2(]-1,1[)$ ؟

3. نعتبر التابع $x \mapsto \eta(x) = x^\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$. عيّن قيم α التي من أجلها يكون التابع في $H^2(]0,1[)$ ، ثم في $H^2(]1,+\infty[)$.

حل التمرين 3.4

1 ـ

• نقول إنّ $f \in H^1(\mathbb{R})$ إذا وفقط إذا كان $f \in L^2(\mathbb{R})$ و $f' \in L^2(\mathbb{R})$ بمفهوم التوزيعات.
لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \, \mathrm{d}x = 2 < +\infty.$$

ومنه $f \in L^2(\mathbb{R})$.

من جهة أخرى، نلاحظ أنّ f له قفزة عند $x = 1$ وقفزة عند $x = -1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) - \lim_{x\to -1^-} f(x) = 1.$$

ومنه

$$(T_f)' = T_{f'} - \delta_1 + \delta_{-1}.$$

وبما أنّ $f' = 0$ فإنّ $T_{f'} = 0$. وبما أنّ $(T_f)' = -\delta_1 + \delta_{-1} \notin L^2(\mathbb{R})$ فإنّ $f \notin H^1(\mathbb{R})$.

• لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (-x+1)^2 \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

ومنه $g \in L^2(\mathbb{R})$.

من جهة أخرى، نلاحظ أنّ g ليست لديه قفزات.
ومنه $(T_g) = T_{g'}$ ، حيث

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & : -1 < x < 0, \\ -1 & : 0 < x < 1, \\ 0 & : x \in]-\infty, -1[\subset]1, +\infty[. \end{cases}$$

وعليه $g' \in L^2(\mathbb{R})$. وبالتّالي نستنتج أنّ $g \in H^1(\mathbb{R})$.

2 ـ واضح أنّ $h \in L^2(]-1,1[)$ ، و $h'(x) = 0$ شك.

من جهة أخرى، نلاحظ أنّ h لديه قفزة عند النقطة $x = 0$.
ولدينا $\lim_{x\to 0^+} h(x) - \lim_{x\to 0^-} h(x) = 1$. ومنه $(T_h)' = T_{h'} + \delta = \delta \notin L^2(]-1,1[)$.

وبالتّالي نستنتج أنّ $h \notin H^2(]-1,1[)$.

3 ـ

تعيين قيم α **التي من أجلها يكون** $\eta \in H^2(]0,1[)$. لدينا:

$$\eta \in H^2(]0,1[) \Leftrightarrow \eta \in L^2(]0,1[),\ \ \eta' \in L^2(]0,1[),\ \ \eta'' \in L^2(]0,1[).$$

- لمّا $\alpha \neq -\dfrac{1}{2}$:

$$\eta \in L^2(]0,1[) \Leftrightarrow \int_0^1 |\eta(x)|^2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2\alpha}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} < +\infty \Leftrightarrow 2\alpha+1 > 0.$$

ومنه

$$\eta \in L^2(]0,1[) \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}.$$

- لدينا $\eta'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. ومنه باعتبار $\alpha > \dfrac{1}{2}$ و $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$:

$$\int_0^1 |\eta'(x)|^2\ \mathrm{d}x = \alpha^2 \int_0^1 x^{2(\alpha-1)}\ \mathrm{d}x = \alpha^2 \left[\frac{x^{2(\alpha-1)+1}}{2(\alpha-1)+1}\right]_0^1 < +\infty \Leftrightarrow 2(\alpha-1)+1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}.$$

ومنه

$$\eta' \in L^2(]0,1[) \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}.$$

- لدينا $\eta''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. ومنه

$$\int_0^1 |\eta''(x)|^2\ \mathrm{d}x = \alpha^2(\alpha-1)^2 \int_0^1 x^{2(\alpha-1)}\ \mathrm{d}x = \alpha^2(\alpha-1)^2 \left[\frac{x^{2(\alpha-1)+1}}{2(\alpha-1)+1}\right]_0^1 < +\infty \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{2}.$$

وبالتّالي نستنتج أنّ $\eta \in H^2(]0,1[)$ إذا $\alpha \in \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

تعيين قيم α **التي من أجلها يكون** $\eta \in H^2(]1,+\infty[)$.

نذكر بمقياس ريمان:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\ \mathrm{d}x < +\infty \Leftrightarrow a > 1.$$

لدينا:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{2\alpha}\ \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-2\alpha}}\ \mathrm{d}x < +\infty \Leftrightarrow -2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2}$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \alpha^2 x^{2(\alpha-1)}\ \mathrm{d}x = \alpha^2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-2(\alpha-1)}}\ \mathrm{d}x < +\infty \Leftrightarrow -2(\alpha-1) > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \alpha^2(\alpha-1)^2 x^{2(\alpha-2)}\ \mathrm{d}x = \alpha^2(\alpha-1)^2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-2(\alpha-2)}}\ \mathrm{d}x < +\infty \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$.

ومنه نستنتج أنّ $\eta \in H^2(]1,+\infty[)$ إذا $\alpha \in]-\infty, -\dfrac{1}{2}[$.

تمرين 3.5

نعتبر المجال $I =]-1,1[$. من أجل أي قيم لـ p من $[1,+\infty[$ يكون التابع $x \mapsto f(x) = |x|$ ينتمي إلى الفضاء $W^{1,p}(I)$ ؟ ومن أجل أي قيم q من $[1,+\infty[$ يكون التابع f ينتمي إلى $W^{2,q}(I)$ ؟

حل التمرين 3.5

- **تعيين قيم p التي من أجلها يكون $f \in W^{1,p}(I)$.**

لدينا:

$$f \in W^{1,p}(I) \Leftrightarrow f \in L^p(I) \text{ و } f' \in L^p(I).$$

- $\int_{-1}^{1} |f|^p \, dx = 2\int_{0}^{1} x^p \, dx = +2\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 < +\infty \Leftrightarrow p > -1$.
- $\int_{-1}^{1} |f'|^p \, dx = 2\int_{0}^{1} 1^p \, dx = 2 < +\infty, \ \forall p$.

وبالتّالي قيم p التي من أجلها يكون $f \in W^{1,p}(I)$ هي $p \in]-1,+\infty[$.

- **تعيين قيم q من $[1,+\infty[$ التي من أجلها يكون $f \in W^{2,q}(I)$.**

لدينا:

$$\begin{aligned} f \in W^{2,q}(I) &\Leftrightarrow f \in L^q(I),\ f' \in L^q(I) \wedge f'' \in L^q(I) \\ &\Leftrightarrow f \in W^{1,q}(I) \wedge f'' \in L^q(I). \end{aligned}$$

لدينا

$$(T_f)'' = T_{f''} + 2\delta = 2\delta \notin L^q(I).$$

ومنه لا توجد أيّة قيمة لـ q من $[1,+\infty[$ يكون من أجلها $f \in W^{2,q}(I)$.

تمرين 3.6

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ وليكن $u_n, v_n \in \mathcal{D}(I)$. نفرض أنّ $u_n \to u$ في $H^1(I)$ و $v_n \to v$ في $H^1(I)$.

1. اثبت أنّ $u_n v_n \to uv$. في $L^2(I)$
2. اثبت أنّ $(u_n v_n)' \to (uv)'$. في $L^2(I)$

حل التمرين 3.6

1. لدينا

$$u_nv_n - uv = u_n(v_n - v) + (u_n - u)v.$$

نلاحظ أنّ

$$||u_n(v_n - v)||_{L^2} \leqslant ||u_n||_{L^\infty ||v_n - v||_{L^2}} \to 0,$$

و

$$||(u_n - u)v||_{L^2} \leqslant ||v||_{L^\infty ||u_n - u||_{L^2}} \to 0,$$

ومنه المطلوب.

2. لدينا

$$(u_nv_n)' = u_nv_n' + u_n'v_n.$$

u_n متقاربة نحو u في $H^1(I)$ فهي متقابة في $L^\infty(I)$ (لأننا في البعد 1) و v_n متقاربة نحو v في $H^1(I)$ ومنه v_n' تتقارب نحو v' في $L^2(I)$.

ومنه نستنتج أنّ u_nv_n' تتقارب نحو uv' في $L^2(I)$. (ونعاود نفس العملية بالتبديل بين u_n و v_n).

وبالتالي، $(u_nv_n)'$ متقاربة نحو $(uv)'$ في $L^2(I)$.

تمرين 3.7

1. اثبت أنّ

$$\exists C \geqslant 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leqslant C||\varphi||_{H^1(\mathbb{R})}.$$

ارشاد: استعمل العلاقة التالية:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), (\varphi(x))^2 = 2\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

2. ليكن $u \in H^1(\mathbb{R})$. ومنه توجد متتالية $(\varphi_j) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_j \to u$ في $H^1(\mathbb{R})$.

أ) اثبت أنّ

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}), ||u||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant ||u||_{H^1(\mathbb{R})}.$$

ب) بيّن أنّ (φ_j) تتقارب نحو u بانتظام ثم استنتج أنّ u مستمر.

3. ليكن I مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$. بيّن نتيجة مماثلة للسؤال 2. من أجل كل u من $H_0^1(I)$.

4. اثبت أنّ

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}), \lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0.$$

حل التمرين 3.7

1. ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$(\varphi(x))^2 = 2\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

بتطبيق نظرية كوشي - شوارتز ثم متباينة يونغ، نجد:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^2 &\leqslant 2||\varphi||_{L^2(\mathbb{R})}||\varphi'||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant ||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||\varphi'||^2_{L^2(\mathbb{R})} = ||\varphi||^2_{H^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

إذن

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leqslant ||\varphi||_{H^1(\mathbb{R})}.$$

2. ليكن $u \in H^1(\mathbb{R})$ ومنه توجد متتالية (φ_j) من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $u \to \varphi_j$ في $H^1(\mathbb{R})$.
أ) بما أنّ $u \to \varphi_j$ في $H^1(\mathbb{R})$ فإنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_j(x) \to u(x).$$

لدينا من السؤال 1 أنّه من أجل كل x مثبت من $\mathbb{R}$ ، لدينا:

$$|\varphi_j(x)| \leqslant ||\varphi_j||_{H^1}.$$

وبالمرور إلى النهاية على j ، نجد:

$$|u(x)| \leqslant ||u||_{H^1}.$$

ومنه

$$||u||_\infty \leqslant ||u||_{H^1}.$$

ب) لدينا من السؤال 2 ، أنّ:

$$||\varphi_j - u||_\infty \leqslant ||\varphi_j - u||_{H^1}.$$

ومنه نستنتج أنّ φ_j متقاربة بانتظام نحو u. وبما أنّ التقارب المنتظم يحافظ على الاستمرار، نستنتج أنّ u مستمر.

3. ليكن I مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$ وليكن $u \in H_0^1(I)$. من كثافة $\mathcal{D}(I)$ في $H_0^1(I)$ نستنتج أنّ

$$||u||_{L^\infty} \leqslant ||u||_{H_0^1(I)}.$$

4. ليكن $u \in H^1(\mathbb{R})$. من كثافة $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ في $H^1(\mathbb{R})$ ، توجد متتالية (φ_j) من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_j \to u$ في $H^1(\mathbb{R})$ وحسب السؤال 2 ، $\varphi_j \to u$ بانتظام.
أي أنّ:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall j \geqslant j_0 : |u(x) - \varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon.$$

بما أنّ (φ_j) ذو سند متراص، فإنّه يوجد $a > 0$ بحيث $\varphi_j(x) = 0$ إذا $|x| > a$. ومنه $\forall |x| > a, |u(x)| \leqslant \varepsilon$. أي أنّ $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |u(x)| = 0$
وهو المطلوب.

تمرين 3.8

نضع $f(x) = \ln(|x|)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ حيث يرمز $|\cdot|$ للنظيم الإقليدي.

1 ـ اثبت أنّ $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ وأنّ $\Delta f = 0$ (بالمفهوم الكلاسيكي) في $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

2 ـ استنتج أنّ $\Delta f = 0$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ وأعط عبارة Δf في $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

3 ـ اثبت أنّ $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ من أجل كل $p < +\infty$ وأنّ $\partial_i f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ من أجل $i = 1, 2$ لما $1 \leqslant p < 2$.

4 ـ نضع $D = \left\{(r, \theta), \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, r \in]0, 1[\right\}$. اثبت أنّ

$$u \in L^2(D), \Delta u \in H^{-1}(D) \nRightarrow u \in H^1((D).$$

حل التمرين 3.8

1 ـ $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ لأنه عبارة عن تركيب تابعين من الصنف $C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$.

لنبيّن الآن أنّ $\Delta f = 0$ بالمفهوم الكلاسيكي في $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. ليكن $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. لاحظ أنّ $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
تعريفا:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}[\ln(\sqrt{x_1^2+x_2^2})] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{1}{2}2x_1\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

ومنه $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$.

وبنفس الطريقة نجد أنّ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}$. ومنه $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{-x_1^2+x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{-x_2^2+x_1^2}{x_1^2+x_2^2}$.

وبالتّالي $\Delta f = 0$.

2 ـ لدينا

$\Delta = 0$ شك على $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

3 ـ واضح أنّ $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$. بقي إثبات أنّ $|f|^p$ كمول في جوار الصفر، مثلا على كرة الوحدة. باستعمال الإحداثيات القطبية نجد:

$$\int_{B(0,1)} |f|^p \ \mathrm{d}x_1 \ \mathrm{d}x_2 = \int_{B(0,1)} |\ln|x||^p \ \mathrm{d}x_1 \ \mathrm{d}x_2 = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 |\ln|r||^p \mathrm{d}r\right) \ \mathrm{d}\theta, \forall p < +\infty.$$

لدينا

$$\partial_1 f = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}.$$

باستعمال الإحداثيات القطبية، نجد:

$$\partial_1 f = \frac{r\cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{r}\cos(\theta).$$

ومنه حسب ريمان،

$$\int_{B(0,1)} |\partial_1 f|^p \ \mathrm{d}x_1 \ \mathrm{d}x_2 = \int_{B(0,1)} \frac{1}{r^p}|\cos\theta|^p r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta < +\infty, \ \ \forall 1 \leqslant p < 2.$$

4 ـ حسب الأسئلة $f \in L^2(D)$ و $\Delta f \in H^{-1}(D)$ ، لكن $f \notin H^1(D)$.
وهو المطلوب.

تمرين 3.9
ليكن $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

1 ـ إنّ المعادلة $\Delta u - u = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ تقبل حلا وحيدا $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. لماذا؟

2 ـ تأكد من وجود ثابت $C \geqslant 0$ بحث $||u||_{H^1} \leqslant C||f||_{L^2}$.

3 ـ اثبت وجود $M \geqslant 0$ بحيث من أجل كل $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ ، يكون

$$||u||_{H^2} \leqslant M(||u||_{L^2} + ||\Delta u||_{L^2}).$$

حل التمرين 3.9

ليكن $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
نعتبر المعادلة

$$\Delta u - u = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{3.3}$$

1 ـ نضع $g = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. ولدينا حسب المبرهنة 3.3 ، أن

$$g \in H^{-1}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \exists! u \in H^1 : \Delta u - \lambda u = g.$$

ومنه (3.3) تقبل حلا وحيدا $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

ملاحظة: يمكن الإجابة عن هذا السؤال عن طريق التحقق من شروط نظرية لاكس ـ ميلغرام.

2 ـ الصيغة التغايرية المرفقة بـ (3.3) معطاة بـ:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v \ \mathrm{d}x, \ \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

بوضع $u = v$ في (3.4) نجد:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} u^2 \ \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \mathrm{d}x.$$

أي أنّ:

$$||\nabla u||_{L^2}^2 + ||u||_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \mathrm{d}x.$$

من تعريف النظيم على $H^1(\mathbb{R}^n)$ ، نعلم أنّ:

$$||u||_{H^1}^2 = ||\nabla u||_{L^2}^2 + ||u||_{L^2}^2.$$

ومنه من متباينة كوشي ـ شفارتز، لدينا:

$$||u||_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \mathrm{d}x \leqslant ||f||_{L^2} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{L^2}.$$

ومنه

$$||u||_{H^1} \leqslant ||f||_{L^2}.$$

وهو المطلوب.

3 ـ نضع $\Delta u - u = f$. لاحظ أنّ $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. بوضع $w = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ نحصل على المعادلة $\Delta w - w = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

حسب السؤال 2 ، لدينا

$$\exists C > 0 : ||w||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.5}$$

نكتب (3.5) على الشكل:

$$||w||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||\Delta u - u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

إذن

$$\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\left(||\Delta u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right).$$

ومنه

$$\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(||\Delta u||_{L^2} + ||u||_{L^2})^2.$$

وعليه

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} C(||\Delta u||_{L^2} + ||u||_{L^2})^2.$$

بالتالي يوجد ثابت $C_1 \geqslant 0$ بحيث

$$||\nabla u||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1(||\Delta u||_{L^2} + ||u||_{L^2})^2,$$

ومن جهة أخرى

$$||u||^2_{L^2} \leqslant (||\Delta u||_{L^2} + ||u||_{L^2})^2.$$

ومن ثمّ يوجد ثابت $M \geqslant 0$ بحيث

$$||u||_{H^2} = ||\nabla u||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant M\left(||\Delta u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right).$$

وهو المطلوب.

تمرين 3.10

ليكن $f \in H^{-2}(\mathbb{R}^n)$.

اثبت وجود و وحدانية الحل في $H^2(\mathbb{R})$ للمعادلة

$$u + \Delta^2 u = f,$$

إرشاد: فكر في نظرية لاكس ميلغرام واستعمل التمرين 3.6.

حل التمرين 3.10

نعتبر الصيغة التغايرية المرفقة بالمعادلة:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \ \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \Delta v \ \mathrm{d}x = \langle f, v \rangle_{H^{-2}, H^2}, \ \ \forall v \in H^2(\mathbb{R}^n). \tag{3.6}$$

نضع

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \ \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \Delta v \ \mathrm{d}x.$$

- **ثنائية الخطية لـ** a. واضحة.
- **إستمرار** a. لدينا من أجل كل u و v من $H^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} uv \ \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \Delta v \ \mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant ||u||_{L^2} ||v||_{L^2} + ||\Delta u||_{L^2} ||\Delta v||_{L^2} \\
&\leqslant (||u||_{L^2} + ||\Delta u||_{L^2}) \cdot (||u||_{L^2} + ||\Delta u||_{L^2}) \\
&\leqslant ||u||_{H^2} ||v||_{H^2}.
\end{aligned}$$

ومنه يأتي إستمرار a.

- **ناقصية** a **(القصرية).** هذا يعود إلى إثبات أنّ

$$\exists M > 0, a(u,u) \geqslant M ||u||^2_{H^2}.$$

باستعمال نتيجة التمرين 3.6 يتبين أنّه يوجد ثابتان موجبان تماما C و M بحيث:

$$a(u,u) = ||u||^2_{L^2} + ||\Delta u||^2_{L^2} \geqslant c(||u||_{L^2} + ||\Delta u||_{L^2})^2 \geqslant M ||u||^2_{H^2}.$$

إذن $a(u,u) \geqslant M ||u||^2_{H^2}$ مهما كان $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. ومنه a ناقصية.

نعتبر التطبيق الخطي والمستمر

$$\begin{aligned} f : H^2(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle f, v\rangle_{H^{-2},H^2}. \end{aligned}$$

حسب نظرية لاكس ـ ميلغرام،

$$\exists! u \in H^2(\mathbb{R}^n), a(u,v) = \langle f, v\rangle_{H^{-2},H^2}, \ \forall v \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

وعليه

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \ \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \Delta \varphi \ \mathrm{d}x = \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

ومنه

$$\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle \Delta^2 u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

إذن:

$$u + \Delta^2 u = f. \text{ في } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

وهو المطلوب.

تمرين 3.11

ليكن $\theta \in \mathcal{D}\left(]a,b[\right)$ **بحيث** $\int_a^b \theta(t)\mathrm{d}t = 1$.

من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}\left(]a,b[\right)$ ، **نضع** $\lambda_\varphi = \int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$.

1. احسب $\int_a^b \left(\varphi(t) - \lambda_\varphi \theta(t)\right)\mathrm{d}t$ ، وبيّن أنّه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}\left(]a,b[\right)$ ، يوجد $\psi \in \mathcal{D}\left(]a,b[\right)$ **بحيث** $\varphi = \psi' + \lambda_\varphi \theta$.

ارشاد: يمكن إستخدام النتيجة التالية: ليكن $\varphi \in \mathcal{D}\left(]a,b[\right)$. إذا كان $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t = 0$ فإنّه يوجد $\psi \in \mathcal{D}\left(]a,b[\right)$ **بحيث** $\psi' = \varphi$.

2. لدينا

$$H^1\left(]a,b[\right) \subset \left\{T \in \mathcal{D}'\left(]a,b[\right) : T' \in L^2\left(]a,b[\right)\right\}.$$

لماذا؟

3. ليكن $T \in \mathcal{D}'\left(]a,b[\right)$ **بحيث** $T' \in L^2\left(]a,b[\right)$.

أ) اثبت وجود ثابت c **يحقق** $|\lambda_\phi| \leqslant c||\varphi||_{L^2}$ مهما كان $\varphi \in \mathcal{D}\left(]a,b[\right)$.

ب) بإعتبار العلاقة $\varphi = \psi' + \lambda_\varphi \theta$ ، اثبت وجود ثابت M **يحقق:** $||\psi||_{L^2} \leqslant M||\varphi||_{L^2}$ ، ثم $|\langle T, \psi'\rangle| \leqslant M||\varphi||_{L^2}$ ، **وأخيرا** $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant M||\varphi||_{L^2}$ ، وهذا من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}\left(]a,b[\right)$. استنتج أنّ

$$H^1(]a,b[)=\left\{T\in\mathcal{D}'\left(]a,b[\right):T'\in L^2\left(]a,b[\right)\right\}$$

4. هات مثالا مضادا يبيّن عدم صحة المساواة:

$$H^1(]1,+\infty[)=\{T\in\mathcal{D}'(]1,+\infty[):T'\in L^2(]1,+\infty[)\}.$$

حل التمرين 3.11

1. من الواضح أنّ:

$$\int_a^b(\varphi(t)-\lambda_\varphi\theta(t))\mathrm{d}t=\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t-\lambda_\varphi\int_a^b\theta(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t-\lambda_\varphi.1=0.$$

بما أنّ التابع $f=\varphi-\lambda_\varphi\theta$ يحقق $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0$ ، فإنّ ما ورد في الإرشاد يثبت المطلوب (أي وجود $\psi\in\mathcal{D}(]a,b[)$ يحقق $f=\psi'$).

2. لأنّ:

$$T\in L^2(]a,b[)\Rightarrow T\in L^1_{loc}(]a,b[)\Rightarrow T\in\mathcal{D}'(]a,b[).$$

3. ليكن $T\in\mathcal{D}'(]a,b[)$ بحيث $T'\in L^2(]a,b[)$.

أ) لدينا:

$$|\lambda_\varphi|^2\leqslant(\int_a^b|\varphi(t)|\mathrm{d}t)^2\leqslant\int_a^b 1\mathrm{d}t\times\int_a^b|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant(b-a)||\varphi||^2_{L^2}.$$

ومنه المطلوب حيث يمكن اختيار $c=\sqrt{b-a}$.

ب) لدينا: $\psi(x)=\int_a^b\psi'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b(\varphi(t)-\lambda_\varphi\theta(t))\mathrm{d}t$. وبالتالي،

$$|\psi(x)|^2\leqslant(\int_a^b\left(|\varphi(t)|+|\lambda_\varphi||\theta(t)|\right)\mathrm{d}t)^2\leqslant 2\left(||\varphi||^2_{L^2}+||\theta||^2_{L^2}|\lambda_\varphi|^2\right).$$

بالاستفادة من السؤال السابق يأتي:

$$|\psi(x)|^2\leqslant c||\varphi||^2_{L^2}.$$

ثم بمكاملة الطرفين نحصل على:

$$||\psi||_{L^2}\leqslant c'||\varphi||_{L^2}.$$

ثانيا: نستفيد من كون $T'\in L^2(]a,b[)$ ومن السؤال السابق ومن تعريف H^{-m} بإعتبار $m=0$:

$$|\langle T,\psi'\rangle|=|\langle T',\psi\rangle|\leqslant c''||\psi||_{L^2}\leqslant c'''||\varphi||_{L^2}.$$

ثالثا: بالإستفادة من الأسئلة السابقة نجد:

$$|\langle T,\varphi\rangle| = |\langle T,\psi'\rangle + \lambda_\varphi\langle T,\theta\rangle| \leqslant |\langle T,\psi'\rangle| + |\langle T,\theta\rangle||\lambda_\varphi| \leqslant c'''||\varphi||_{L^2} + c''''||\varphi||_{L^2} \leqslant M'||\varphi||_{L^2}.$$

وعليه $|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant M||\varphi||_{L^2}$, امث $M = C' + C''' + M'$.

نستخلص أيضا أنّ $||\psi||_{L^2} \leqslant M||\varphi||_{L^2}$ و $|\langle T,\psi'\rangle| \leqslant M||\varphi||_{L^2}$.

إن العلاقة $|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant ||\varphi||_{L^2}$ المحققة مهما كان $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ تعني (حسب تعريف H^{-m} من أجل $m=0$) أنّ $T \in L^2(]a,b[)$. ولما كان الفرض يقول إنّ $T' \in L^2(]a,b[)$ فهذا يعني أنّ $T \in H^1(]a,b[)$. ذلك ما يثبت صحة المساواة:

$$H^1(]a,b[) = \{T \in \mathcal{D}'(]a,b[) : T' \in L^2(]a,b[)\}.$$

4. المثال: على $I =]1,+\infty[$ نضع $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. لدينا $f \in \mathcal{D}'(I)$ و $f' \in L^2(I)$. لكن $f \notin L^2(I)$ ، ولذا $f \notin H^1(I)$.

وهو المطلوب.

تمرين 3.12

ليكن $\Omega = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \dfrac{1}{2}, i = 1,2\}$ ، $\gamma \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ و $u : \Omega \to \mathbb{R}$ معرفا بـ $u(x) = (-\ln(|x|))^\gamma$.

اثبت أنّ $u \in H^1(\Omega)$. استنتج أنّ $H^1(\Omega) \not\subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

حل التمرين 3.12

التابع u من الصنف C^∞ على $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$.

المشتقات بالمفهوم الكلاسيكي معرفة من أجل كل $x = (x_1,x_2) \neq 0$ بـ

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\gamma(-\ln(|x|))^{\gamma-1}\frac{x_i}{|x|^2},\ \ i = 1,2.$$

واضح أنّ $u \in L^2(\Omega)$ (وحتى أنّ $u \in L^p(\Omega)$ من أجل $1 \leqslant p < +\infty$). بما أنّ $\gamma < \dfrac{1}{2}$ ، يمكن كذلك اثبات أنّ المشتقات بالمفهوم الكلاسيكي لـ u هي في $L^2(\Omega)$. يكفي لذلك ملاحظة أنّه، من أجل $a > 0$ ،

$$\int_0^a \frac{1}{r|\ln(r)|^{2(1-\gamma)}}\ \mathrm{d}r < +\infty.$$

لاثبات أنّ $u \in H^1(\Omega)$ يكفي إثبات أنّه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ و $i = 1,2,$ لدينا

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

لنبيّن العلاقة (3.7) من أجل $i = 1$ (الحالة $i = 2$ تعالج بنفس الطريقة). ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ و $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$. نضع $L_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-1/2, 1/2]$.
بالمكاملة بالتجزئة وبإستخدام كون $u(\varepsilon, x_2) = u(-\varepsilon, x_2)$ نجد

$$\int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\ \mathrm{d}x = -\int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \varphi(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))\ \mathrm{d}x_2. \tag{3.8}$$

من نظرية التقارب بالهيمنة لدينا

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\ \mathrm{d}x,$$

و بالتالي

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus L_\varepsilon} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

بقي إثبات أنّ الطرف الأيمن لـ (3.8) يتقارب نحو 0. وهذا بملاحظة أنّ التابع φ أملس، ويوجد ثابت يتعلق بـ φ بحيث

$$\left| \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))\ \mathrm{d}x_2 \right| \leqslant |\ln(\varepsilon)|^\gamma C \varepsilon.$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1/2}^{1/2} u(\varepsilon, x_2)(\varphi(\varepsilon, x_2) - \varphi(-\varepsilon, x_2))\ \mathrm{d}x_2 = 0,$$

وهذا ما ينهي إثبات (3.7) من أجل $i = 1$.
وبالتالي $u \in H^1(\Omega)$ ونعلم أنّ $u \notin \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ ومنه نستنتج أنّ $H^1(\Omega) \not\subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

تمرين 3.13

1. ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
أ ـ اثبت أنّ

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2} ||\varphi'||_{L^1(\mathbb{R})}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

ب ـ استنتج أنّ

$$||\varphi||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant ||\varphi||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})} ||\varphi'||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}$$

2. ليكن $u \in H^1(\mathbb{R})$. اثبت أنّ

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant ||u||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}||u'||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}.$$

حل التمرين 3،13

1. ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ومنه يوجد $a > 0$ بحيث $\text{Supp } \varphi \subset [-a, a]$.

أ ـ لدينا:

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x} \varphi'(t)\ \mathrm{d}t,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

و

$$-\varphi(x) = \int_{x}^{a} \varphi'(t)\ \mathrm{d}t,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

ومنه،

$$2|\varphi(x)| = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)\ \mathrm{d}t, \forall x \in \mathbb{R}.$$

أي أنّ

$$|\varphi(x)| = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)\ \mathrm{d}t.$$

وبالتالي،

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2}||\varphi'||_{L^1(\mathbb{R})},\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

ب ـ لدينا

$$(\varphi^2)' = 2\varphi\varphi'.$$

ومنه،

$$||\varphi^2||_{L^\infty} \leqslant \frac{'}{1}2||(\varphi^2)'||_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}||2\varphi\varphi'||_{L^1(\mathbb{R})} = ||\varphi\varphi'||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

بإستخدام متباينة كوشي ـ شفارتز، نجد

$$||\varphi^2||_{L^\infty} \leqslant ||\varphi||_{L^2}||\varphi'||_{L^2}.$$

وبالتالي،

$$||\varphi||_{L^\infty} \leqslant ||\varphi||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}||\varphi'||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}.$$

وهو المطلوب.

2. ليكن $u \in H^1(\mathbb{R})$. بما أنّ $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ كثيفة في $H^1(\mathbb{R})$ ، يوجد متتالية $(\varphi_j) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_j \to u$ في $H^1(\mathbb{R})$.

لدينا من السؤال 1 ـ ب، أنّ

$$||\varphi_j||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant ||\varphi_j||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}||\varphi_j'||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})} \tag{3.9}$$

بالمرور إلى النهاية في (3.9) لمّا $j \to +\infty$ ، نجد

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant ||u||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}||u'||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}.$$

وهو المطلوب.

باب 4

جداء التزاوج Convolution

ليكن $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. جداء التزاوج $h = f \star g$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^n)$ ، وهو معرف من أجل تقريبا كل x من $\mathbb{R}^n$ بـ:

$$h(x) = f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

نقدم الآن مبرهنتين، أوّلاهما خاصة بالإشتقاق والثانية خاصة بالمكاملة. مع التذكير أنّ $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \equiv C^\infty(\mathbb{R}^n)$ و $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ يرمز لثنوي $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ وهو فضاء التوزيعات المتراصة الحامل.

مبرهنة 4.1 [مبرهنة الإشتقاق]
ليكن $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{p+q})$ والتوزيع $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^p)$. إن التابع المعرف بـ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^q &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto f(y) = \langle T(x), \varphi(x,y) \rangle, \end{aligned}$$

من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$ على $\mathbb{R}^q$. ولدينا:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^q, D^\alpha f(y) = \left\langle T(x), D_y^\alpha \varphi(x,y) \right\rangle.$$

مبرهنة 4.2 [مبرهنة المكاملة]
ليكن $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{p+q})$ والتوزيع $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)$. لتكن P بلاطة من $\mathbb{R}^q$. لدينا:

$$\left\langle T, \int_P \varphi(x,y)\ \mathrm{d}y \right\rangle = \int_P \langle T(y), \varphi(x,y) \rangle\ \mathrm{d}y.$$

نمر الآن إلى تعريف المجموعات المتزاوجة.

تعريف 4.1 [المجموعات المتزاوجة]
ليكن F و G مغلقين من $\mathbb{R}^n$. نقول عن F و G أنهما متزاوجان إذا: من أجل كل $R > 0$ ، يوجد $\rho > 0$ بحيث

$$x \in F, y \in G : ||x+y|| < R \Rightarrow ||x|| < \rho \quad \wedge \quad ||y|| < \rho.$$

ملاحظة 4.1
في هذا التعريف، يكفي إثبات وجود $\rho > 0$ يحقق $||x|| < \rho$ لأن ذلك يستلزم أنّ العدد $\rho' = \rho + R$ يحقق $||x|| < \rho'$ و $||y|| < \rho'$ ، إذ أنّ المتباينة $||x+y|| < R$ تؤدي إلى

$$||y|| < R + ||x|| < \rho'.$$

تعميم التعريف:
لتكن $(F_j)_{j \in J}$ مجموعة مغلقات من $\mathbb{R}^n$. نقول عن $(F_j)_{j \in J}$ أنّها متزاوجة إذا كان لكل مجموعة جزئية $I \subset J$ ، ولكل $R > 0$ ، يوجد $\rho > 0$ بحيث:

$$(x_i)_{i \in I} \in F_i : \left\| \sum_{i \in I} x_i \right\| < R \Rightarrow ||x_i|| < \rho, \ i \in I.$$

أمثلة:

1. ليكن F متراصا من $\mathbb{R}^n$ و G مغلقا من $\mathbb{R}^n$. عندئذ يكون (F, G) متزاوجين.
بالفعل، بما أنّ F متراص فهو محدود. أي أنّ: $\exists M > 0, \forall x \in F : ||x|| \leqslant M$.
ليكن $x \in F$ ، $y \in G$ و $R > 0$ بحيث $||x+y|| < R$. عندئذ:

$$||y|| < R + ||x|| < R + M = \rho.$$

أي أنّه يوجد $\rho > 0$ بحيث $||x|| < \rho$ و $||y|| < \rho$. وبالتالي (F, G) متزاوجان. وهو المطلوب.
ملاحظة: بالنسبة لـ n مجموعة مغلقة، يكفي أن تكون $n-1$ منها متراصة حتّى تكون الـ n مجموعة متزاوجة.

2. ليكن $a, b \in \mathbb{R}$. نضع $F = [a, +\infty[$ و $G =]-\infty, b[$. F و G غير متزاوجتين.
بالفعل، ليكن $x \in F$. ، $y \in G$ و $R > 0$ نفرض أنّ

$$||x+y|| = |x+y| < R.$$

لو نختار $x = n$ و $y = -n$ مع $n \in \mathbb{N}$ ، يكون لدينا مهما كان n :

$$|x + y| = |n - n| = 0 < R.$$

لا يوجد $\rho > 0$ بحيث $n = |x| < \rho$ ، لأنّه لو كان موجودا لكانت مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ محدودة وهذا غير ممكن. وبالتالي (F, G) غير متزاوجين. وهو المطلوب.

لدينا القضية التّالية:

قضية 4.1
ليكن F و G مغلقين من $\mathbb{R}^n$. إذا كان (F, G) متزاوجين فإنّ $F + G$ مغلق.

اثبات القضية:

ليكن F و G مغلقين من $\mathbb{R}^n$ بحيث (F, G) متزاوجان. لإثبات أنّ $F + G$ مغلق، يكفي إثبات أنّ كل متتالية متقاربة من $F + G$ ، نهايتها في $F + G$.

لتكن (z_n) متتالية من $F + G$. أي أنّ $z_n = x_n + y_n$ مع $x_n \in F$ و $y_n \in G$. نفرض أنّ (z_n) متقاربة في $F + G$ ونرمز لنهايتها بـ z فهي محدودة من الأعلى. أي أنّه يوجد $R > 0$ بحيث:

$$||z_n|| = ||x_n + y_n|| < R.$$

وبما أنّ (F, G) متزاوجان، فإنّه يوجد $\rho > 0$ بحيث:

$$||x_n|| < \rho.$$

بما أنّ (x_n) محدودة في F الذي هو مغلق، يمكن استخراج متتالية جزئية (x_{n_j}) متقاربة نحو x من F. وإنّ (y_{n_j}) محدودة، ولذا نستخرج من هذه المتتالية (المستخرجة) متتالية مستخرجة أخرى y_{m_j} متقاربة نحو نهاية نرمز لها بـ y. ثم نعتبر المتتالية $z_{m_j} = x_{m_j} + y_{m_j}$ ، حيث

$$z_{m_j} = x_{m_j} + y_{m_j} \overset{n_j \to +\infty}{\longrightarrow} x + y = z \in F + G,$$

وإذا تقاربت متتالية فإنّ كل متتالياتها الجزئية متقاربة نحو نفس النهاية. أي أنّ

$$z_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} z = x + y \in F + G.$$

وبالتالي $F + G$ مغلق. وهو المطلوب. □

لنوضح من خلال المبرهنة المجردة التالية، كيفية الإستفادة من المجموعات المتزاوجة.

مبرهنة 4.3
ليكن $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاءين شعاعيين من $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ مستقرين بالنسبة للضرب في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (أي لكل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ و $u \in \mathcal{A}$ و $v \in \mathcal{B}$ ، لدينا $\varphi \cdot u \in \mathcal{A}$ و $\varphi \cdot v \in \mathcal{B}$)، وليكن

$$\begin{aligned} f : (\mathcal{A} \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)) \times (\mathcal{B} \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)) &\longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \\ (u, v) &\mapsto f(u, v). \end{aligned}$$

تطبيقا ثنائي الخطية يحقق

$$\operatorname{Supp} f \subset \operatorname{Supp} u + \operatorname{Supp} v. \tag{4.1}$$

عندئذ يمكن تمديد التطبيق f إلى الثنائيات $(u, v) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ذات الحوامل المتزاوجة (صورة التمديد تكون $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ بدل $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) ونبقى نحافظ على العلاقة (4.1).

ملاحظة 4.2
عمليا، غالبا ما يؤخذ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$: $L^1_{loc}, \mathcal{E}, \mathcal{D}'$.

4.1 تزاوج توزيع و تابع إختباري

تذكير (تزاوج تابع L^1 وتابع إختباري).
نعرف جداء تزاوج تابع $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ وتابع $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ كما يلي:

$$f \star \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \tau_x \check{\varphi}(y) \mathrm{d}y,$$

حيث $\check{\varphi}(y) = \varphi(-y)$ و $\tau_x \check{\varphi}(y) = \check{\varphi}(y-x) = \varphi(-(y-x)) = \varphi(x-y)$ ؛ أي أنّ:

$$f \star \varphi(x) = \langle f(y), \tau_x \check{\varphi}(y) \rangle .$$

إعتمادا على هذا التعريف، نعمم جداء تزاوج تابع كمول وتابع إختباري إلى جداء تزاوج توزيع متراص الحامل وتابع إختباري.

تعريف 4.2 [تزاوج توزيع متراص الحامل و تابع إختباري]
ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. نعرف جداء التزاوج $T \star \varphi$ عند كل نقطة $x \in \mathbb{R}^n$ بـ:

$$T \star \varphi(x) = \langle T(y), \tau_x \check{\varphi}(y) \rangle_{\mathcal{E}',\mathcal{D}}.$$

نقدم في المبرهنة التالية بعض خصائص جداء التزاوج لتوزيع متراص الحامل وتابع إختباري.

مبرهنة 4.4
ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. لدينا:
1. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha(T \star \varphi) = T \star D^\alpha \varphi = D^\alpha T \star \varphi$.
2. $\mathrm{Supp}(T \star \varphi) \subset \mathrm{Supp}\, T + \mathrm{Supp}\, \varphi$.
3. $T \star \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

تتعلق النتيجة التالية بخاصية التجميع.

مبرهنة 4.5
ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. لدينا
1. $(T \star \varphi) \star \psi = T \star (\varphi \star \psi)$.
2. $\langle T \star \varphi, \psi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \star \psi \rangle$.

اثبات المبرهنة:
1. **اثبات أنّ** $(T \star \varphi) \star \psi = T \star (\varphi \star \psi)$.
لدينا باستعمال المبرهنة 4.2 :

$$\begin{aligned}
(T \star (\varphi \star \psi))(x) &= \langle T(y), \tau_x((\widetilde{\varphi \star \psi})(y)) \rangle \\
&= \left\langle T(y), (\widetilde{\varphi \star \psi})(y - x) \right\rangle \\
&= \langle T(y), (\varphi \star \psi)(x - y) \rangle \\
&= \left\langle T(y), \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \check{\varphi}(z - (x - y))\ \mathrm{d}z \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle T(y), \varphi((x - z) - y) \rangle \psi(z)\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (T \star \varphi)(x - z) \psi(z)\ \mathrm{d}z \\
&= (T \star \varphi) \star \psi(z).
\end{aligned}$$

2. **إثبات أنّ** $\langle T\star\varphi,\psi\rangle=\langle T,\check{\varphi}\star\psi\rangle$.
لدينا:

$$\begin{aligned}
\langle T,\check{\varphi}\star\psi\rangle &= \langle T(x),\check{\varphi}\star\psi(x)\rangle\\
&= \left\langle T(x),\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\check{\varphi}(x-y)\mathrm{d}y\right\rangle\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\langle T(x),\varphi(y-x)\rangle\psi(y)\ \mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(T\star\varphi)(y)\psi(y)\mathrm{d}y\\
&= \langle T\star\varphi,\psi\rangle.
\end{aligned}$$

وهو المطلوب. □

سوف نقوم الآن بتعميم التعريف السابق إلى جداء تزاوج تابع كيفي بتوزيع كيفي لما يكون حاملاهما متزاوجين. لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 4.6
ليكن $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\operatorname{Supp}T$ و $\operatorname{Supp}\varphi$ متزاوجان. عندئذ، يمكن تعريف جداء التزاوج $T\star\varphi$ بكيفية التمديد المبينة في المبرهنة 4.3 ، ولدينا:
1. $T\star\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.
2. $\operatorname{Supp}(T\star\varphi)\subset\operatorname{Supp}T+\operatorname{Supp}\varphi$.

بالفعل، نطبق المبرهنة 4.3 بعد وضع $\mathcal{A}=\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ و $\mathcal{B}=\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ و $f(u,v)=u\star v$. مع الملاحظة أنّ $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)=\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

التزاوج والإنسحاب

لدينا القضية التالية:

قضية 4.2
ليكن $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. لدينا
1. $\tau_a(T\star\varphi)=\tau_aT\star\varphi=T\star\tau_a\varphi$
2. $\langle T,\varphi\rangle=(T\star\check{\varphi})(0)$.

اثبات القضية:
ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
1. لتكن $x \in \mathbb{R}^n$. لدينا

$$(\tau_a T \star \varphi)(x) = \langle \tau_a T(y), \tau_x \check{\varphi}(y) \rangle = \langle T(y), \tau_{-a}\tau_x \check{\varphi} \rangle = \langle T(y), \tau_{x-a}\check{\varphi}(y) \rangle,$$

$$\begin{aligned}
(T \star \tau_a \varphi)(x) &= \langle T(y), \tau_x(\widetilde{\tau_a \varphi})(y) \rangle \\
&= \langle T(y), \widetilde{\tau_a \varphi}(y-x) \rangle \\
&= \langle T(y), \tau_a \varphi(x-y) \rangle \\
&= \langle T(y), \varphi(x-a-y) \rangle \\
&= \langle T(y), \tau_{x-a}\check{\varphi}(y) \rangle.
\end{aligned}$$

ومنه المساواة. □

ملاحظة 4.3
نفس التعاريف ونفس الخصائص تبقى قائمة في حالة $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. ولدينا $T \star \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

4.2 جداء التزاوج بين توزيعين

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 4.7 [جداء توزيعين من $\mathcal{E}'$]
ليكن T و S عنصرين من $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.
1. يوجد توزيع وحيد w من $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ يحقق

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : T \star (S \star \varphi) = w \star \varphi.$$

يسمى w بجداء التزاوج بين T و S ونكتب $w = T \star S$.
2. لدينا $\mathrm{Supp}(T \star S) \subset \mathrm{Supp}\, T + \mathrm{Supp}\, S$.

السؤال الآن هو هل نستطيع تعريف جداء توزيعين من $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ؟ الإجابة هي نعم بشرط أن يكون حاملي التوزيعين متزاوجين. لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 4.8 [جداء توزيعين من $\mathcal{D}'$]
ليكن T و S عنصرين من $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ بحيث حامليهما $\operatorname{Supp} T$ و $\operatorname{Supp} S$ متزاوجين. عندئذ تسمح كيفية التمديد المقدمة في المبرهنة المجردة بتعريف جداء التزاوج بين T و S . لدينا

1. $T \star S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
2. $\operatorname{Supp}(T \star S) \subset \operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S$.

فيما يتعلق بخاصيتي التجميع والتبديل لجداء التزاوج بين توزيعين، لدينا النتيجة التالية:

قضية 4.3
1. لتكن u ، v و w توزيعات ذات حوامل متزاوجة. لدينا
$$(u \star v) \star w = u \star (v \star w).$$
2. إذا كان u و v توزيعين حامليهما متزاوجان، فإنّ
$$u \star v = v \star u.$$

مثال:
قارن بين $(1 \star \delta') \star H$ و $1 \star (\delta' \star H)$ ، حيث H هو تابع هيفيسايد و δ هو توزيع ديراك.
الحل:
لدينا:
$$\operatorname{Supp} H = \mathbb{R}_+, \ \operatorname{Supp} 1 = \mathbb{R}, \ \operatorname{Supp} \delta = \{0\}.$$

- $\operatorname{Supp} H$ و $\operatorname{Supp} \delta$ متزاوجان لأنّ أحدهما متراص.
- $\operatorname{Supp} 1$ و $\operatorname{Supp} \delta$ متزاوجين لأنّ حامليهما متراصين.
- $\operatorname{Supp} H$ و $\operatorname{Supp} 1$ غير متزاوجين.

وهذا لا يكفي لتكون لدينا خاصية التبديل. بالفعل، لدينا من جهة
$$(1 \star \delta') \star H = (1' \star \delta) \star H = 0 \star H = 0.$$
ولدينا من جهة أخرى:
$$1 \star (\delta' \star H) = 1 \star (\delta \star H') = 1 \star (\delta \star \delta) = 1 \star \delta = 1.$$
أي أنّ $(1 \star \delta') \star H \neq 1 \star (\delta' \star H)$.

نختم هذه الفصل بالنتيجة الحسابية التالية:

قضية 4.4
ليكن $u,v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ و $a \in \mathbb{R}^n$. لدينا:
1. $\delta \star u = u$.
2. $\delta_a \star u = \tau_a u$.
3. $D^\alpha \delta \star u = D^\alpha u$.

إذا كان $\mathrm{Supp}\, u$ و $\mathrm{Supp}\, v$ متزاوجين، فإنّه لدينا
4. $\tau_a(u \star v) = \tau_a u \star v = u \star \tau_a v$.
5. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha(u \star v) = D^\alpha u \star v = u \star D^\alpha v$.

4.3 المعادلات التزاوجية

نبدء بتعريف معادلة تزاوج.

تعريف 4.3 [تعريف معادلة تزاوج]
نسمّي معادلة تزاوجية كل معادلة من الشكل $A \star u = f$ حيث A و f توزيعان معلومان، و u توزيع مجهول.

أمثلة:
1. نعتبر المعادلة التفاضلية في $\mathbb{R}$:

$$-u' + u = f.$$

يمكن كتابة هذه المعادلة على شكل معادلة تزاوجية $A \star u = f$ ، حيث $A = -\delta' + \delta$.
بالفعل، لدينا:

$$\begin{aligned} A \star u &= (-\delta' \star \delta) \star u \\ &= -\delta' \star u + \delta \star u \\ &= -\delta \star u' + \delta \star u \\ &= -u' + u' \\ &= f. \end{aligned}$$

2. نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية في $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha u = f,$$

ذات المعاملات الثابتة.

يمكن كتابتها على شكل معادلة تزاوج $A\star u=f$ ، حيث $A=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha\delta$ مع العلم أنّ δ هو توزيع ديراك.

بالفعل، لدينا:

$$\begin{aligned} A\star u &= \sum_{|\alpha|\leqslant m}(a_\alpha D^\alpha \delta)\star u \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant m} \delta\star a_\alpha D^\alpha u \\ &= \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha u\right)\star\delta \\ &= f\star\delta \\ &= f. \end{aligned}$$

لمعالجة معادلة تزاوجية، نحتاج إلى مفهوم الحل الأساسي أو الأولي.

تعريف 4.4 [الحل الأولي]

ليكن $f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. نقول عن توزيع $w\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ إنّه حل أولي (أو أساسي) لـ A (أو للمعادلة $A\star w=f$)، إذا كان يحقق $A\star w=\delta$.

ملاحظة 4.4

1– عموما، الحل الأولي ليس موجودا دائما، إذ أنّ وجوده مرتبط بخواص التوزيع A. مثال على ذلك: نفرض أنّ $A\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. لو كان الحل الأولي w موجودا لكان في $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. لكن نلاحظ أنّ $\operatorname{Supp} A$ و $\operatorname{Supp} w$ متزاوجان، ومنه $A\star w\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. لكن $\delta\notin\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. ومن ثم فإنّ w غير موجود.

1– نفرض أنّ w_1 و w_2 حلان أوليان لـ A. عندئذ:

$$A\star(w_1-w_2)=\delta-\delta=0.$$

وبالتالي، للحصول على كافة الحلول الأولية، يكفي إضافة حل أولي خاص للحل العام للمعادلة $A\star u=0$.

تظهر أهمية مفهوم الحل الأولي من المبرهنة التالية، حيث إنّه يسمح بكتابة حل المعادلة $A\star u=f$ بدلالة w و f.

مبرهنة 4.9
ليكن $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. نفترض أنّ لـ A حلا أوليا w. عندئذ:
1- لكل $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ يوجد $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ بحيث $A \star u = f$. أي أنّ $u = w \star f$.
2- ليكن $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. إذا وجد حل $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ للمعادلة $A \star u = f$ ، فهو وحيد، ولدينا $u = w \star f$.

إثبات المبرهنة.
ليكن $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ وليكن $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.
1- إثبات وجود حل على الأقل للمعادلة $A \star u = f$. نفرض أنّ لـ A حلا أساسيا $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. هذا يعني أنّ $A \star w = \delta$. ولنبيين أنّه يوجد $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ بحيث $A \star u = f$.
بما أنّ $\operatorname{Supp} A$ و $\operatorname{Supp} f$ متراصان، فإنّ $\operatorname{Supp} A$ و $\operatorname{Supp} f$ و $\operatorname{Supp} w$ متزاوجة. ومنه لدينا:

$$A \star (w \star f) = (A \star w) \star f = \delta \star f = f.$$

إذن $A \star w$ حل للمعادلة المعطات.
2- إثبات الوحدانية. هذا يعود إلى إثبات أنّ $u = w \star f$ هو الحل الوحيد الذي يحقق $A \star u = f$. لدينا

$$u = \delta \star u = (A \star w) \star u = (w \star A) \star u \star u) = w \star f.$$

وهذا ما يثبت وحدانية $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ عند وجوده. □

4.4 تمارين محلولة

تمرين 4.1
لتكن المجموعتان

$$A = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}_+^\star \right\} \text{ و } B = \left\{ (0, x) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 0 \right\}.$$

هل A و B مغلقتان؟ هل $A + B$ مغلق؟

حل التمرين 4.1
- نعتبر المجموعة

$$A = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}_+^\star \right\}.$$

يمكن أن نكتب

$$A = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : uv = 1, u > 0\right\}.$$

نعرف التطبيق $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto uv$ وهو مستمر كما نلاحظ أنّ $A = f^{-1}(\{1\})$ ، أي أنّ A هي الصورة العكسية للمغلق $\{1\}$ بتابع مستمر. ومنه A مغلق.

- نعتبر المجموعة

$$B = \left\{(0,x) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 0\right\}.$$

يمكن أن نكتب

$$B = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = 0 \text{ و } v \leqslant 0\right\}.$$

ليكن التطبيق المطابق $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a,b) \mapsto (a,b),$ ونلاحظ أنّ $B = \pi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}_-)$ أي أنّ B هي الصورة العكسية للمغلق $\{0\} \times \mathbb{R}_-$ بالتابع المستمر π ، ومنه B مغلق.

- هل $A + B$ مغلق؟

لدينا

$$(x,y) \in A + B \Leftrightarrow (x,y) = \left(x, \frac{1}{x} + z\right) : x > 0, z \leqslant 0.$$

بما أنّ $z \leqslant 0$ فإنّ نقاط $A+B$ هي كل النقاط تحت منحى $\left(x, \frac{1}{x}\right) : x > 0$.

ليكن $n \in \mathbb{N}^\star$. نعتبر المتتالية $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$. لدينا

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left(\frac{1}{n}, n - n\right) \in A + B,$$

ولدينا

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = (0,0) \notin A + B.$$

ومنه نستنتج أنّ $A+B$ ليس مغلقا.

تمرين 4.2

احسب جداء التزاوج في كل من الحالات التالية

1. $\delta_a \star H, \ \ a \in \mathbb{R}$.
2. $\delta' \star 1$.
3. $T \star 1, \ \ T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.
4. $T \star \exp x, \ \ T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

حل التمرين 4.2

1. **حساب** $\delta_a \star H$ ، $a \in \mathbb{R}$.
لدينا:

$$\delta_a \star H = \tau_a H,$$

حيث

$$\tau_a H(x) = \begin{cases} 1, & x > a, \\ 0, & x \leqslant a. \end{cases}$$

2. **حساب** $\delta' \star 1$.
$\delta' \star 1 = \delta \star 1' = \delta \star 0 = 0.$

3. **حساب** $T \star 1$ **مع** $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.
النظرية تقول إنّه إذا كان $\operatorname{Supp} T$ و $\operatorname{Supp} \varphi$ متزاوجين و $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ، فإنّ $T \star \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
ونحن في هذه الحالة لأنّ T متراص الحامل. إذا وضعنا $f = T \star 1$ فإنّ

$$f' = T \star 1' = T \star 0 = 0.$$

وهكذا فإنّ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ و $f' = 0$.
إذن $f = c$ حيث c ثابت. بمعنى أنّ $T \star 1$ تابع ثابت يتعلق بـ T.

4. **حساب** $T \star e^x$ **مع** $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.
بنفس الطريقة السابقة نضع

$$f(x) = T \star \exp(x),$$

ونشتق فنلاحظ:

$$f'(x) = T \star (\exp(x))' = T \star \exp(x) = f(x).$$

وبالتالي

$$f' = f.$$

إذن

$$f(x) = c \exp(x),$$

حيث c ثابت يتعلق بـ T.
مثلا إذا كان $T = 2022.\delta$ نلاحظ أنّ $f(x) = 2022.\exp(x)$.

تمرين 4.3

1. عيّن $\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ ، حيث أنّ $\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ توزيع عرف في الفصل الثاني.
2. أثبت أنّ $H\star\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ معرف جيدا.
3. احسب مشتق $H\star\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$.

حل التمرين 4.3

نذكر بالتعريف التالي:

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \ \langle\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right),\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{x>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\varphi(0)\ln\varepsilon\right).$$

1. **تعيين** $\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$. التوزيع $\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ معرف بـ

$$\left\langle\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right),\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left[\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\varphi(0)\ln(\varepsilon)\right].$$

نلاحظ أنّ $\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)\subset\mathbb{R}_+$ لأنّ $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^-),\left\langle\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right),\varphi\right\rangle=0$.

لنبيّن أنّ $\mathbb{R}_+\subset\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$.

ليكن $x_0\in]0,+\infty[$ و V جوارا لـ x_0. من تعريف الجوار فإنّ:

$$\exists a>0,]x_0-a,x_0+a[=U\subset V,$$

حيث أن U مفتوح من $\mathbb{R}^\star$.

ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ تابعا موجبا على المفتوح U ويساوي 1 في الجوار المتراص $K=[x_0-\frac{a}{2},x_0+\frac{a}{2}]$. لدينا

$$\left\langle\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right),\varphi\right\rangle=\int_U\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_K\frac{\mathrm{d}x}{x}>0,$$

وهذا يستلزم $\left\langle\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right),\varphi\right\rangle\neq 0$. ومنه $]0,+\infty[\subset\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$. وبما أنّ $\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ مغلق فإنّ $[0,+\infty[\subset\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$. وبالتالي نستنتج أنّ $\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)=[0,+\infty[$.

2. **إثبات أنّ** $H\star\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ **معرف جيدا.**

لدينا $\operatorname{Supp}H=[0,+\infty[$ و $\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)=[0,+\infty[$ مغلقان متزاوجان. ليكن $R>0$ وليكن $x\in\operatorname{Supp}H$ و $y\in\operatorname{Supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$. نفرض أنّ $|x+y|<R$. لدينا $|x|\leqslant|x+y|$ و $|y|\leqslant|x+y|$ ، ومنه يوجد $\rho=R$ بحيث $|x|<\rho$ و $|y|<\rho$.

أي أنّ $\mathrm{Supp}\, H$ و $\mathrm{Supp}\,\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ متزاوجان. وبالتالي فإنّ $H \star \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ معرف جيدا.

3. **حساب مشتق** $H \star \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)$.

لدينا:

$$\left(H \star \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x}\right)\right)' = H' \star \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x}\right) = \delta \star \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x}\right) = \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x}\right).$$

تمرين 4.4

ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ و $(\varphi_j)_j$ متتالية دوال من $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

اثبت أنّ تقارب $(\varphi_j)_j$ نحو φ في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ يؤدّي إلى التقارب البسيط للمتتالية $T \star \varphi_j$ نحو $T \star \varphi$.

حل التمرين 4.4

ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. ولتكن $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

نفرض أنّ $\varphi_j \to \varphi$ في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ولنبيّن أنّ $T \star \varphi_j \to T \star \varphi$ ببساطة. بما أنّ جداء التزاوج ثنائي الخطية، يكفي إثبات أنّ $\varphi_j \to 0$ في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى أنّ $T \star \varphi_j \to 0$ ببساطة.

ليكن x مثبتا في $\mathbb{R}^n$. لدينا

$$T \star \varphi_j(x) = \langle T, \tau_x \breve{\varphi}_j(y)\rangle. \tag{4.2}$$

بما أنّ $\tau_x \breve{\varphi}_j \to 0$ في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ فإنّه بالمرور إلى النهاية في (4.2) ، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to+\infty} T \star \varphi_j(x) &= \lim_{j\to+\infty} \langle T, \tau_x \breve{\varphi}_j(y)\rangle \\
&= \langle T, \lim_{j\to+\infty} \tau_x \breve{\varphi}_j(y)\rangle \\
&= \langle T, 0\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

باب 5

تحويل فوريي Transformée de Fourier

هذا الفصل مخصص لدراسة تحويل فوريي. سوف نبدأ بتعريف تحويل فوريي في L^1 مع تقديم بعض خصائصه. نلاحظ أنّ الفضاء L^1 ليس مستقرا بتحويل فوريي مما ينتج العديد من الصعوبات التقنية. لذا سندرس كذلك بعض الفضاءات التحليلية المتميزة بإستقرارها عبر تحويل فوريي .

5.1 تحويل فوريي للتوابع الكمولة

تعريف 5.1

ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. نسمي تحويل فوريي لـ f ، التابع الذي نرمز له بـ $\widehat{f}$ أو Ff ، والمعرف عند كل نقطة ξ من $\mathbb{R}^n$ بـ

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

حيث $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ، $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. ومنه $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j$.

مع $e^{-ix\cdot\xi} = e^{-ix_1\xi_1}e^{-ix_2\xi_2}\ldots e^{-ix_n\xi_n}$.

ملاحظة 5.1

يمكن أيضا تعريف تحويل فوريي لتابع $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ بـ

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(2\pi i)x\cdot\xi} f(x)\ \mathrm{d}x,\ \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n.$$

لكننا سنتبنى التعريف 5.1

كما نشير بأن الفرق بين التعريفين يظهر فقط عندما يتعلق الأمر بالتقديرات الحسابية.

نعرف الآن تحويل فوريي العكسي لتابع $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

تعريف 5.2 [تعريف تحويل فوريي العكسي]
ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. نعرف تحويل فوريي العكسي لـ f ونرمز له بـ $\overline{F}f$ والمعرف عند كل نقطة x من $\mathbb{R}^n$ بـ

$$\overline{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi.$$

لدينا القضية التالية.

قضية 5.1
ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. لدينا:
1. التابع $\widehat{f}$ مستمر على $\mathbb{R}^n$.
2. $||\widehat{f}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.
3. $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

الإثبات:
ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
1. لنبيّن أنّ التابع $\widehat{f}$ مستمر.
من جهة، لتكن (ξ_j) متتالية متقاربة نحو ξ في $\mathbb{R}^n$. ومنه

$$g_j(x) = e^{-ix\xi_j} f(x) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-ix\cdot\xi} f(x) = g(x).$$

أي أنّ $g_j(x) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$ حيثما كان تقريبا على $\mathbb{R}^n$.
ومن جهة أخرى، لدينا $|g_j(x)| \leqslant |f(x)|$ حيثما كان تقريبا على $\mathbb{R}^n$.
وبالتالي، حسب نظرية التقارب بالهيمنة للوبيغ، فإنّ

$$g_j \overset{L^1(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} g.$$

أي أنّ

$$\widehat{f}(\xi_j) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(\xi).$$

ومنه إستمرار التابع $\widehat{f}$.
2. لدينا:

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\ \mathrm{d}x = ||f||_{L^1}.$$

ومنه $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| \leqslant ||f||_{L^1}$. أي أنّ $||\widehat{f}||_{L^\infty} \leqslant ||f||_{L^1}$.

3. لنبيّن $\lim_{||x||\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$. لذلك، نقوم أولا بتذكير النظريتين التاليتين:

نظرية 5.1
ليكن $n \geqslant 1$ وليكن $p \in [1, +\infty[$ و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
ليكن $h \in \mathbb{R}$. لدينا:

$$||f(\cdot + h) - f(\cdot)||_{L^p} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

أي أنّ

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h) - f(x)|^p\ \mathrm{d}x \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

- **في حالة** $n = 1$. نعلم أنّ $e^{i\pi} = -1$. ومنه يمكننا أن نكتب من أجل كل x من $\mathbb{R}^n$:

$$\widehat{f}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi} e^{-ix\cdot\xi} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi-\frac{\pi}{x})\cdot x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi.$$

نقوم بتبديل المتغير $y = \xi - \dfrac{\pi}{x}$ ، فنجد:

$$\widehat{f}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\cdot x} f(y + \frac{\pi}{x})\ \mathrm{d}y.$$

ومنه لدينا:

$$\begin{aligned} 2\widehat{f}(x) &= \widehat{f}(x) + \widehat{f}(x) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\cdot x} f(y + \frac{\pi}{x})\ \mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\cdot x} f(y)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\cdot x}(f(y) - f(y + \frac{\pi}{x}))\ \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

أي:

$$|\widehat{f}(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left|\left|f(y) - f(y + \frac{\pi}{x})\right|\right|_{L^1}.$$

وحسب النظرية 5.1 ، لدينا $||f(y) - f(y + \dfrac{\pi}{x})||_{L^1} \to 0$ لما $||x|| \to +\infty$.

- **في حالة** $n>1$. نستخدم نفس الطريقة المستخدمة في حالة $n=1$. من أجل $x\neq 0$ ، $x=(x_1,\dots,x_n)^t$ ، **يوجد** $j\in\{1,\dots,n\}$ **بحيث** $|x_j|=\max_{k=1,\dots,n}|x_k|=||x||_\infty$.

نرمز بـ e_j للمركبة j ـ من الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^n$. ومنه بما أنّ $e^{i\pi}=-1$ و $e_j\cdot x=x_j$ ، لدينا

$$\widehat{f}(x)=-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(\xi-\frac{\pi}{x_j}e_j)\cdot x}f(\xi)\ \mathrm{d}\xi,$$

ومنه، بتبديل المتغير $y=\xi-\dfrac{\pi}{x_j}e_j$ ، نجد

$$\widehat{f}(x)=-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-iy\cdot x}f(y+\frac{\pi}{x_j}e_j)\ \mathrm{d}y=-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-iy\cdot x}f(y+\frac{\varepsilon\pi}{||x||_\infty}e_j)\ \mathrm{d}y,$$

حيث $\varepsilon=\mathrm{sign}(x_j)$ (أي أنّ $\varepsilon=\pm1$). ومنه:

$$2|\widehat{f}(x)|\leqslant(2\pi)^{-n/2}||f(\cdot)-f(\cdot+\frac{\varepsilon\pi}{||x||_\infty}e_j)||_{L^1}.$$

نستنتج أنّه من أجل كل $x\neq 0$ ،

$$|\widehat{f}(x)|\leqslant\frac{1}{2}\max_{j=1,\dots,n}(2\pi)^{-n/2}(||f(\cdot)-f(\cdot+\frac{\pi}{||x||_\infty}e_j)||_{L^1}+||f(\cdot)-f(\cdot\frac{\pi}{||x||_\infty}e_j)||_{L^1}).$$

وبالتالي، حسب النظرية 5.1 نستنتج أنّ $\widehat{f}(x)\to 0$ لمّا $||x||\to+\infty$.

وهو المطلوب.

- توجد طريقة أخرى للبرهان، وهي تعتمد على كثافة $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ في $L^1(\mathbb{R}^n)$.

ليكن $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ، $\varepsilon>0$ ولتكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ بحيث $||f-\varphi||_{L^1}<\varepsilon$.

من أجل ξ كبير بالكفاية، لدينا $|\widehat{\varphi}(\xi)|<\varepsilon$. بالفعل، بالمكاملة بالتجزئة، نجد

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x=\frac{1}{i\xi_k}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}e^{-ix\cdot\xi}\ \mathrm{d}x$$

ليكن $k_{\max}$ بحيث $\xi_{k_{\max}}$ هو أكبر مركبة ξ_k في $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k,\dots,\xi_n)$ لدينا:

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|\leqslant\frac{1}{|\xi_{k_{\max}}|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_{k_{\max}}}\right|\ \mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{||\xi||_\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right|\ \mathrm{d}x,$$

وهذا يبيّن أنّ $\lim_{||\xi||\to+\infty}\widehat{\varphi}(\xi)=0$.

وبالتالي، من أجل ξ كبير بالفاية، لدينا

$$|\widehat{f}(\xi)|\leqslant|\widehat{f}(\xi)+\widehat{\varphi}(\xi)|+|\widehat{\varphi}(\xi)|<2\varepsilon,$$

أي أنّ $\lim\limits_{||\xi||\to+\infty}\widehat{f}(\xi)=0$.

وهو المطلوب. □

لدينا المبرهنة التّالية:

مبرهنة 5.1
إنّ تحويل فوريي $F: f\mapsto \widehat{f}$ هو تطبيق خطي ومستمر من $L^1(\mathbb{R}^n)$ في $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ، ولدينا

$$|||F|||_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^\infty(\mathbb{R}^n))}=1.$$

الإثبات:

خطية F واضحة. ونستنتج من القضية السابقة أنّ فوريي لأيّ عنصر من $L^1(\mathbb{R}^n)$ هو في $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ومن أجل كل $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ لدينا

$$||\widehat{f}||_{L^\infty}\leqslant ||f||_{L^1}.$$

هذا يبيّن أنّ F مستمر من $L^1(\mathbb{R}^n)$ في $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ، و $|||F|||_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^\infty(\mathbb{R}^n))}\leqslant 1$.

لإثبات أنّ نظيم F يساوي 1 ، يكفي ملاحظة أنّه من أجل كل $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ مع $f(x)\geqslant 0$ من أجل تقريبا كل $x\in\mathbb{R}^n$ ، لدينا:

$$||f||_{L^1}=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \mathrm{d}x=(Ff)(0)\leqslant ||\widehat{f}||_{L^\infty},$$

أي أنّ $|||F|||_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^\infty(\mathbb{R}^n))}\geqslant 1$. ومنه المساواة. □

بعض الخصائص الجبرية لتحويل فوريي

نقدم في النظرية التّالية البعض من أهم خصائص تحويل فوريي.

نظرية 5.2
ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
1 ـ من أجل كل $a \in \mathbb{R}^n$ ، نرمز بـ τ_a للإنسحاب بالشعاع a ، أي $\tau_a f(x) = f(x-a)$.
لدينا

$$\widehat{\tau_a f} = e^{-i\xi \cdot a}\widehat{f},$$

و

$$\widehat{e^{ia\cdot x} f} = \tau_a \widehat{f}.$$

2 ـ بالنسبة للمرافق العقدي، لدينا:

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}.$$

النظرية التالية تعطي العلاقة بين تحويل فوريي وجداء التزاوج.

نظرية 5.3 [تحويل فوريي وجداء التزاوج]
إذا كان $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ، فإنّ $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ، ولدينا

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

الإثبات: نضع $h = f \star g$. ومنه

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y$$

معرف شبه كليا ومن نظرية فوبيني هو L^1. بالفعل، لنضع $F(x,y) = f(y)g(x-y)$.
ومنه F قيوس و بالمكاملة بالنسبة لـ x ثمّ بالنسبة لـ y نجد:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|\right) < +\infty.$$

بعدها يمكن التحقق من أنّ

$$||h||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant ||F||_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}.$$

وبهذا يمكننا إعتبار تحويل فوريي للتّابع h. بتطبيق نظرية فوبيني وتبديل المتغير $z = x - y$ ، نجد:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right)e^{-ix\cdot\xi}\ \mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)e^{-ix\cdot\xi}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy\cdot\xi}g(x-y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy\cdot\xi}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{-iz\cdot\xi}\mathrm{d}z\right)\\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

وهو المطلوب. □

لدينا النتيجة المهمة التّالية.

قضية 5.2
ليكن $a>0$ وليكن $x\in\mathbb{R}^n$. لدينا العلاقة التالية

$$\widehat{e^{-a|x|^2}}(\xi)=\prod_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\xi_j^2/4a}.$$

الإثبات: ليكن $a>0$ و $x\in\mathbb{R}^n$. لدينا:

$$\begin{aligned}
\widehat{e^{-a|x|^2}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}e^{-a|x|^2}\mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2\ldots\ \mathrm{d}x_n\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1\xi_1}e^{-ix_2\xi_2}\ldots e^{-ix_n\xi_n}e^{-ax_1^2}e^{-ax_2^2}\ldots e^{-ax_n^2}\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2\ldots\ \mathrm{d}x_n.
\end{aligned}$$

وبما أنّ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_j\xi_j}e^{-a\xi_j}\ \mathrm{d}x_j<+\infty$ ، فإنّه يمكننا تطبيق فوبيني ونكتب:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}e^{-a|\xi|^2}\ \mathrm{d}x=\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_j\xi_j}e^{-ax_j^2}\mathrm{d}x_j.$$

نضع $\widehat{F}(\xi_j)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_j\xi_j}e^{-ax_j^2}\mathrm{d}x_j$. حسب نظرية إشتقاق تكامل وسيطي، لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\widehat{F}}{\mathrm{d}\xi_j}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_j}\left(e^{-ix_j\xi_j}e^{-ax_j^2}\right)\ \mathrm{d}x_j \\
&= -i\int_{-\infty}^{+\infty} x_j e^{-ix_j\xi_j}e^{-ax_j^2}\mathrm{d}x_j \\
&= -\frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} 2ax_j e^{-aix_j\xi_j}e^{-ax_j^2}\ \mathrm{d}x_j
\end{aligned}$$

بإستخدام المكاملة بالتجزئة نجد أنّ:

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{F}}{\mathrm{d}\xi_j} = \frac{\xi_j}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_j\xi_j}e^{-ax_j^2}\mathrm{d}x_j,$$

أي أنّ $\widehat{F}(\xi_j)$ يحقق المعادلة

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{F}}{\mathrm{d}\xi_j} = \frac{\xi_j}{2a}\widehat{F}(\xi_j).$$

لحلها، نكتب

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{d}\widehat{F}}{\mathrm{d}\xi_j}}{\widehat{F}(\xi_j)} = \frac{\xi_j}{2a} &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_j}\left(\ln\left|\widehat{F}(\xi_j)\right|\right) = \frac{\xi_j}{2a} \\
&\Rightarrow \int_0^{\xi_j}\left(\ln\left|\widehat{F}(s)\right|\right)'\mathrm{d}s = \int_0^{\xi_j}\frac{s}{2a}\mathrm{d}s \\
&\Rightarrow \ln|\widehat{F}(\xi_j)| = \ln|\widehat{F}(0)| + \frac{1}{4a}\xi_j^2.
\end{aligned}$$

من تعريف $\widehat{F}(\xi_j)$ ، لدينا:

$$\widehat{F}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax_j^2}\mathrm{d}x_j.$$

أي أنّ:

$$\widehat{F}(\xi_j) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax_j^2}\ \mathrm{d}x_j\right)e^{\xi_j^2/4a}.$$

ومنه

$$\widehat{e^{-a|x|^2}}(\xi) = \prod_{j=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax_j^2}\ \mathrm{d}x_j\right)e^{\xi_j^2/4a}.$$

ونعلم أنّ $\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax_j^2}\mathrm{d}x_j$. وبالتالي،

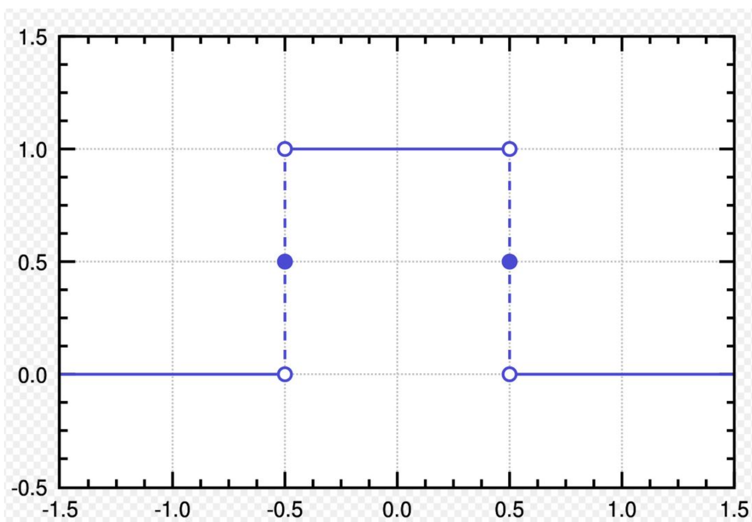
$$\widehat{F}(\xi_j) = \prod_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\xi_j^2/4a}.$$

وهو المطلوب. □

ملاحظة 5.2
التابع g المعرف على $\mathbb{R}^n$ بـ $g(x) = e^{-a|x|^2}$ مع $a > 0$ ، هو التابع الوحيد الذي تحويله لفوريي يساوي التابع نفسه لمّا $a = \frac{1}{2}$. ويمكن التأكد من هذا، بحل المعادلة $F(\xi) = \widehat{F}(\xi)$.

مثال: حساب تحويل فوريي للدالة المستطيلية.
نعتبر الدالة المستطيلية Π المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \Pi(x) = \begin{cases} 1 & : |x| < \frac{1}{2}, \\ 0 & : |x| \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$



الشكل 3 **: الدالة المستطيلية**

ويمكن أن نعرفها بـ:

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

حيث H هو تابع هيفيساید.
واضح أنّ $\Pi \in L^1(\mathbb{R})$. لنحسب $\widehat{\Pi}$. لدينا:

من أجل $\xi = 0$: $\widehat{\Pi}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \, dx = 1$.

من أجل $\xi \neq 0$: $\widehat{\Pi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\Pi(x) \, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\xi} \, dx = \frac{2}{\xi}\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)$.

أي أنّ

$$\widehat{\Pi}(\xi) = \begin{cases} 1 & : \xi = 0, \\ \frac{2}{\xi}\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) & : \xi \neq 0. \end{cases}$$

لاحظ أنّ $\widehat{\Pi} \notin L^1(\mathbb{R})$. وهذا المثال يبيّن أنّ تحويل فوريي لا يحافظ على L^1.
نقدم الآن نظرية تحويل فوريي العكسي في L^1

نظرية 5.4 [تحويل فوريي العكسي] ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. لدينا

$$f = (2\pi)^{-n}\overline{F}\widehat{f}.$$

5.2 تحويل فوريي لتوزيع

نبدأ هذا الفصل بالمبرهنة التّالية:

مبرهنة 5.2
الفضاء $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ غير مستقر بتحويل فوريي.

بما أنّ فضاء التوابع الإختبارية $\mathcal{D}$ غير مستقر بتحويل فوريي، فلا يمكننا تعريف تحويل فوريي لتوزيع كيفي. لذا نعرف فضاء شوارتز (Schwartz) المكوّن من توابع ملساء تتناقص عند اللّانهاية أسرع من أيّ كثير حدود. هذا الفضاء أوسع من $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ومستقر بتحويل فوريي. هذا سيمكننا من تعريف تحويل فوريي لمجموعة جزئية من التوزيعات التي تسمّى بالتوزيعات المعتدلة.

فضاء الدوال سريعة التناقص $S(\mathbb{R}^n)$ - Espace des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$

تعريف 5.3 [فضاء شوارتز - Espace de Schwartz]
نقول عن تابع $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ من الصنف $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ إنّه سريع التناقص، إذا: من أجل كل $p \geqslant 0$:

$$\sup_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p} ||x^\beta D^\alpha \varphi||_{L^\infty} < +\infty.$$

نرمز بـ $S(\mathbb{R}^n)$ لفضاء التوابع سريعة التناقص.

ملاحظة 5.3

- يمكن أن نعرف متتالية أنصاف النظيمات N_p على $S(\mathbb{R}^n)$ بـ

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \ N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p} ||x^\beta D^\alpha \varphi||_{L^\infty}.$$

وهو يكافيء نصف النظيم المعطى في التعريف، حيث

$$\sup_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p} ||x^\beta D^\alpha \varphi||_{L^\infty} \leqslant \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p} ||x^\beta D^\alpha \varphi||_{L^\infty} \leqslant (p+1)^2 \sup_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p} ||x^\beta D^\alpha \varphi||_{L^\infty}.$$

- يمكن كتابة الشرط في التعريف 5.3 على الشكل التالي: مهما يكن P كثير حدود، مهما يكن $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ، يوجد $c \geqslant 0$ بحيث:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |P(x) D^\alpha \varphi(x)| = ||P D^\alpha \varphi||_{L^\infty} \leqslant c.$$

بالفعل، نضع $N_{p,\alpha}(\varphi) = ||P D^\alpha \varphi||_{L^\infty}$ (الذي يتعلق بـ كثير الحدود P ودليل متعدد $\alpha \in \mathbb{N}^n$).

إذا كانت درجة P هي m ، ونرمز بـ c لأكبر معامل P بالقيمة المطلقة، فإن

$$N_{P,\alpha}(\varphi) \leqslant c N_p(\varphi),$$

حيث p هو عدد طبيعي كيفي أكبر أو يساوي m و $|\alpha|$.

ومن جهة أخرى يمكن ملاحظة أنّ $N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p} N_{x^\beta,\alpha}(\varphi)$.

وهذا يمكننا من إثبات أن الطبولوجيا المولدة بأنصاف النظيمات $N_{p,\alpha}$ هي نفسها المولدة بأنصاف النظيمات N_p.

- بما أنّه من أجل كل كثير حدود P يوجد m بحيث $|P(x)| = \mathcal{O}((1+||x||^2)^m)$ ، فإنه يمكن كتابة شرط التعريف 5.3 على الشكل التالي: من أجل كل $m \in \mathbb{N}$ ومن أجل كل $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ، يوجد ثابت $c \geqslant 0$ بحيث:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (1+||x||^2)^m |D^\alpha \varphi(x)| \leqslant c.$$

بالفعل، نفرض أن P كثير حدود درجته m ، ونرمز بـ c_2 لمجموع القيم المطلقة لمعاملات P.
إذا كان $||x|| \geqslant 1$ ، لدينا:

$$|P(x)| \leqslant c_2||x||^m \leqslant c_2||x||^{2m},$$

وإذا كان $||x|| \geqslant 1$ ، لدينا:

$$|P(x)| \leqslant c_2||x||^{2m} \leqslant c_1 + c_2||x||^{2m} \leqslant c(1 + ||x||^{2m}).$$

حيث $c = \max(c_1, c_2)$.
كما أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^n$ ،

$$1 + ||x||^{2m} \leqslant (1 + ||x||^2)^m.$$

ومنه

$$|P(x)| \leqslant c(1 + ||x||^{2m}) \leqslant c(1 + ||x||^2)^m.$$

نتيجة مباشرة لهذا التّعريف، هي أنّ $S(\mathbb{R}^n)$ مستقر بالإشتقاق وبالضرب في أي كثير حدود، أي أنّ

$$\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D^\alpha\varphi \in S(\mathbb{R}^n), \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}^n.$$
$$P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow P\varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

لدينا القضية التالية:

قضية 5.3
إنّ تابع $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ينتمي إلى $S(\mathbb{R}^n)$ إذا وفقط إذا كان:
1. ψ من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}^n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي $l \in \mathbb{N}$ ومن أجل كل دليل متعدد $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ، التابع $x \mapsto ||x||^l|D^\alpha\psi(x)|$ محدود.

ملاحظة 5.4
1. $S(\mathbb{R}^n)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$.
2. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$.
3. $S(\mathbb{R}^n)$ محتوى في الفضاءات $L^1(\mathbb{R}^n)$ ، $L^2(\mathbb{R}^n)$ و $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
4. لا يمكن تعريف تابع سريع التناقص على مجال محدود، لأنّ التوابع سريعة التناقص لديها معنى لما $|x| \to +\infty$. وبالتالي يجب إعتبارها على $\mathbb{R}^n$ بأكمله.

أمثلة:

1. ليكن $f \in S(\mathbb{R})$ وليكن $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا، $f + g \in S(\mathbb{R})$.
بالفعل، S فضاء شعاعي و $\mathcal{D} \subset S$.
2. التابع ψ المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $\psi(x) = e^{-|x|^2}$ عنصر من $S(\mathbb{R})$.
بالفعل، ليكن $\alpha \in \mathbb{N}$ و $l \in \mathbb{N}$. لدينا:
$$D^\alpha e^{-x^2} = P_\alpha(x) e^{-x^2},$$
حيث P_α كثير حدود درجته α.
نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} D^\alpha e^{-x^2} = 0$. أي أنّ
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, |x| > A \Rightarrow |D^\alpha e^{-x^2}| < \varepsilon.$$
هذا يعني أنّ التابع $x \mapsto ||x||^l |D^\alpha e^{-x^2}|$ محدود. وبالتالي $\psi \in S(\mathbb{R})$.
لاحظ أنّ $\psi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
3. التابع المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ لا ينتمي إلى $S(\mathbb{R})$.
بالفعل، $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 f(x) = +\infty$.
4. ليس كل تابع f يحقق $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^n f(x) = 0$ ينتمي إلى $S(\mathbb{R})$. مثلا، التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \exp(-x^2)$ إذا $|x| < 1$ و 0 إذا $|x| \geqslant 1$، يحقق النهاية $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^n f(x) = 0$، لكن $f \notin S(\mathbb{R})$.
5. ليكن f تابعا معرفا على $\mathbb{R}$، يساوي 1 على المجال $(0, 2)$ و 0 خارجه. إنّ التابع f ليس في $S(\mathbb{R})$ لأنّه غير مستمر.

لنعرف الآن التقارب في $S(\mathbb{R}^n)$.

تعريف 5.4 [التقارب في S] نقول عن متتالية $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ من عناصر $S(\mathbb{R}^n)$ إنها تتقارب في $S(\mathbb{R}^n)$ نحو $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ إذا وفقط إذا
$$\forall p \in \mathbb{N}, \; N_p(\varphi_m - \varphi) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

الإحتواء $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ واضح. ولدينا نتيجة أقوى.

قضية 5.4
الفضاء $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $S(\mathbb{R}^n)$ (بالنسبة للطوبولوجيا المعرفة على $S(\mathbb{R}^n)$).

ملاحظة 5.5
$S(\mathbb{R}^n)$ ليس كثيفا في $L^\infty(\mathbb{R}^n)$، حيث أنّه مهما يكن φ من $S(\mathbb{R}^n)$، فإنّ $||\varphi - 1||_{L^\infty} \geqslant 1$.
بالفعل، ليكن $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. هذا يستلزم أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$. أي أنّ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, \forall x > a : |\varphi(x)| < \varepsilon.$$

ومنه

$$\forall x > a, |\varphi(x) - 1| \geqslant 1 - |\varphi(x)| > 1 - \varepsilon.$$

بجعل ε يؤول إلى الصفر، نجد أنّ الحد الأعلى أكبر من 1. وهذا تناقض. ومنه امطلوب.

تحويل فوريي في S

بما أنّ كل عنصر من $S(\mathbb{R}^n)$ هو كمول، يمكن تعريف تحويل فوريي لأي عنصر من $S(\mathbb{R}^n)$.
النقطة المهمة هي أنّ تحويل فوريي لتابع من $S(\mathbb{R}^n)$ هو تابع من $S(\mathbb{R}^n)$. بمعنى أنّ تحويل فوريي يحافظ على الفضاء $S(\mathbb{R}^n)$.

نظرية 5.5 [تحويل فوريي في S]

1 ـ الفضاء $S(\mathbb{R}^n)$ مستقر بتحويل فوريي، ومن أجل كل $p \in \mathbb{N}$ ، يوجد ثابت $C_{n,p}$ ، بحيث

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad N_p(\widehat{\varphi}) \leqslant C_{n,p} N_{p+n+1}(\varphi).$$

2 ـ تحويل فوريي $F : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ هو تشاكل.

الإثبات:

1 ـ ليكن $p \geqslant 0$. من أجل كل $|\alpha| \leqslant p$ و $|\beta| \leqslant p$ ، بتكرار تطبيق نظرية إشتقاق تحويل فوريي، نجد:

$$||\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi)||_{L^\infty} = ||\widehat{D^\alpha(x^\beta \varphi)}||_{L^\infty}.$$

ومنه بما أنّه من أجل كل $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ، $||\widehat{f}||_{L^\infty} \leqslant ||f||_{L^1}$ ، لدينا:

$$||\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi)||_{L^\infty} \leqslant ||D^\alpha(x^\beta \varphi(x))||_{L^1} \leqslant \tilde{C}_{n,p} \sup_{|\alpha'| \leqslant p} \sup_{|\beta'| \leqslant p} ||x^{\alpha'} D^{\beta'} \varphi(x)||_{L^1} \leqslant C'_{n,p} N_{p+n+1}(\varphi).$$

نلاحظ أنّ $N_{p+n+1}(\varphi)$ محدود مهما يكن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ، وهو ما يثبت أنّ $\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}$ محدود من أجل كل α, β. إذن $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$. ومنه إستقرار S.

2 ـ لنبيّن أنّ F تشاكل.

أ) خطية F : واضحة.
ب) التباين: ليكن φ و ψ من $S(\mathbb{R}^n)$ بحيث $F\varphi = F\psi$. من نظرية تحويل فوريي العكسي، لدينا:

$$\varphi = (2\pi)^{-n}\overline{F}F\varphi = (2\pi)^{-n}\overline{F}F\psi = \psi.$$

ومنه التباين.
جـ) الغمر: نعتبر $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ونتساءل عن وجود $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\widehat{\varphi} = f$. لهذا الغرض نضع $\varphi = (2\pi)^{-n}\overline{F}\widehat{\varphi} = (2\pi)^{-n}\overline{F}f$ ، فيأتي $\widehat{\varphi} = f$. ومنه الغمر.
وبالتّالي F تماثل داخلي تقابلي.
د) إستمرار F : بما أنّه خطي فيكفي التحقق من الإستلزام التّالي، حيث $(\varphi_j)_j \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\varphi_j \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0 \Rightarrow \widehat{\varphi_j} \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0.$$

ماذا يعني التقارب $\varphi_j \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$ من أجل متتالية $(\varphi_j)_j \in S(\mathbb{R}^n)$ ؟ إنّه يعني:

$$N_p(\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} 0, \ \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

نذكّر بصحة العلاقة التّالية:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p : \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \ \ N_p(\widehat{\varphi}) \leqslant C_p.N_{p+j+1}(\varphi).$$

ولتكن $(\varphi_j)_j$ متتالية من الدوال السريعة التناقص بحيث $\varphi_j \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$. إذن

$$N_q(\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} 0, \ \ \forall q \in \mathbb{N}.$$

ولمّا كان

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p : \forall n \in \mathbb{N}, N_p(\widehat{\varphi_j}) \leqslant C_p.N_{p+j+1}(\varphi_j), \\ \forall p \in \mathbb{N}, N_{p+j+1}(\varphi_j) \xrightarrow{j \to +\infty} 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \ N_p(\widehat{\varphi_j}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

وهذا يكافيء أنّ $\widehat{\varphi_j} \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$. ومنه إستمرار التطبيق $F : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$.
وهو المطلوب. □

تحويل فوريي والإشتقاق

تكمن أهمية تحويل فوريي في أنّه يحوّل المشتقات إلى مؤثرات جبرية بسيطة، ما يسهل حل المعادلات التفاضلية.

المبرهنة التالية التي تبين العلاقة بين تحويل فوريي والإشتقاق:

مبرهنة 5.3

ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. لدينا من أجل كل $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \widehat{D^\alpha \varphi}(x) = (i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{\varphi}(x).$$

و

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ D^\alpha \widehat{\varphi}(x) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \varphi}(x),$$

علما أنّ i هو العدد المركب الذي يحقق $i^2 = -1$.

الإثبات:

نقوم بإثبات المبرهنة في حالة البعد $n = 1$.

ليكن $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

- لنبيّن أوّلا أنّ:

$$(\widehat{\varphi}(x))'(y) = -i\,(\widehat{x\varphi}(x))\,(y).$$

تعريفا،

$$\widehat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
(\widehat{\varphi}(x))' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-ix\xi} \varphi(\xi)) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} -i\xi e^{-i\xi x} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= -i\widehat{(\xi\varphi)}(x) \\
&= -i\widehat{x\varphi}(x).
\end{aligned}$$

و بالتالي،

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ (\widehat{\varphi(x)})'(y) = -i\widehat{x\varphi}(x)(y).$$

• لنبيّن أنّ

$$\widehat{\varphi'}(x) = ix\widehat{\varphi}(x).$$

تعريفا، لدينا:

$$\widehat{\varphi'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\varphi'(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

بإستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\widehat{\varphi'}(x) = \left[e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ix\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

ومنه

$$\widehat{\varphi'}(x) = ix\widehat{\varphi}(x).$$

وهو المطلوب. □

فضاء التوزيعات المعتدلة S' Distributions tempérées

بما أنّ فضاء التوابع الإختبارية $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ غير مستقر بتحويل فوريي، قمنا بتقديم فضاء أكبر هو $S(\mathbb{R}^n)$. سوف نعرف الآن الثنوي الطوبولوجي للفضاء $S(\mathbb{R}^n)$ (مجموعة الأشكال الخطية المستمرة المعرفة على $S(\mathbb{R}^n)$)، والذي هو فضاء جزئي من فضاء التوزيعات $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

تعريف 5.5 ليكن $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. نقول إن T توزيع معتدل، إذا كان

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists c > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant cN_p(\varphi).$$

نرمز لفضاء التوزيعات المعتدلة بـ $S'(\mathbb{R}^n)$.

يعني التعريف أنّ T مستمر على $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ عند تزويده بطبولوجيا $S(\mathbb{R}^n)$.

لدينا القضية التّالية:

أمثلة:

1. لتكن $a \in \mathbb{R}^n$. δ_a هو توزيع معتدل على $\mathbb{R}^n$. بالفعل، من أجل كل $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ لدينا

$$|\langle \delta_a, \varphi\rangle| = |\varphi(a)| \leqslant ||\varphi||_\infty.$$

2. كل كثير حدود P على $\mathbb{R}^n$ هو توزيع معتدل على $\mathbb{R}^n$. بالفعل، من أجل كل $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ، لدينا:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\varphi(x)\right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||x||)^{n+1}}\ \mathrm{d}x\right) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+||x||)^{n+1} |P(x)\varphi(x)|\,.$$

وبما أن $(1+||x||)^{n+1} \leqslant C_n(1+||x||^{n+1})$ ، فإن P توزيع معتدل.

قضية 5.5
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ومنه $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

ملاحظة:
$L^1(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$. بالفعل، لدينا $S(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ ، ومنه بالمرور إلى الثنوية نجد أنّ $L^1(\mathbb{R}) = (L^\infty(\mathbb{R}))' \subset S'(\mathbb{R})$. و عموما، لدينا $L^p \hookrightarrow S'$ من أجل كل $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.
لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 5.4
ليكن $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. إذا يوجد كثير حدود $P \in \mathcal{P}$ بحيث

$$|f(x)| \leqslant |P(x)|,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

فإن $f \in S'(\mathbb{R}^n)$.

الإثبات:
ليكن $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. ومنه التابع f يعرف توزيعا على $\mathbb{R}^n$ بـ:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \ \langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

لنفرض أنّه يوجد كثير حدود P من $\mathcal{P}$ ، بحيث $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ |f(x)| \leqslant P(x)$.
لدينا:

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|\ \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |P(x)\varphi(x)|\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{1}{(1+||x||)^{n+1}}(1+||x||)^{n+1}P(x)\varphi(x)\right|\ \mathrm{d}x \\
&\leqslant \left\|\frac{1}{(1+||x||)^{n+1}}\right\|_{L^1} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+||x||)^{n+1}P(x)\varphi(x)\right|.
\end{aligned}$$

وهو المطلوب. □

ملاحظة 5.6
شرط المبرهنة هو شرط لازم وغير كاف.

نظرية 5.6 ليكن $f \in S'(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$. لدينا

$$\langle f, \varphi\rangle_{S',S} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x,\ \ \forall \varphi \in S(\mathbb{R}). \tag{5.2}$$

الإثبات: إثبات (5.2) يكافيء إثبات أنّه من أجل كل $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ متقاربة في $S(\mathbb{R})$ نحو φ ، لدينا:

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_j(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

يعتمد إثبات المبرهنة على النظرية التالية:

نظرية 5.7 [نظرية شوارتز (خاصية تميز التوزيعات المعتدلة)]
كل $f \in S'(\mathbb{R})$ (أي توزيع معتدل كيفي ليس بالضرورة تابعا) يكتب على الشكل

$$f = \left((1+x^2)^k g\right)^{(m)},$$

حيث g تابع مستمر ومحدود، و k و m عددان طبيعيان، والرمز (m) في الأس يدل على رتبة الإشتقاق بمفهوم التوزيعات.
ملاحظة: هذه النظرية صالحة أيضا في $\mathbb{R}^n$ حيث تصبح $f = ((1+x^2)^k g)^{(m)}$ من الشكل $f = D^\alpha((1+x^2)^k g)$.

ليكن $f \in S'(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$. عندئذ يكون التابع g الوارد في نظرية شوارتز أيضا من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$ ، وهو ما سيبرّر المكاملة بالتجزئة التي سنشير أليها أدناه. ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R})$ ولتكن $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ متتالية متقاربة في $S(\mathbb{R})$ نحو φ. لدينا:

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_j(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{j\to+\infty} \langle f, \varphi_j\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f, \varphi\rangle_{S',S}.$$

لكن (حسب النظرية 5.7):

$$\begin{aligned}\langle f,\varphi_j\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle((1+x^2)^k g)^{(m)},\varphi_j\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= (-1)^m\langle(1+x^2)^k g,\varphi_j^{(m)}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= (-1)^m\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^k g(x)\varphi_j^{(m)}(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

لاحظ أنّ المكاملة بالتجزئة m مرة تؤدي إلى العلاقة التالية (لأنّ $\varphi^{(m)}(x)\overset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow}0$ إذ أنّ $\varphi\in S(\mathbb{R})$):

$$(-1)^m\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^k g(x)\varphi^{(m)}(x)\ \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}((1+x^2)^k g(x))^{(m)}\varphi(x)\ \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

إذن لإثبات (5.3) يكفي أن نثبت المساواة:

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^k g(x)\varphi_j^{(m)}\ \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^k g(x)\varphi^{(m)}(x)\ \mathrm{d}x.$$

لنبين ذلك. نلاحظ تقارب φ_j في $S(\mathbb{R})$ نحو φ يعني

$$\forall p\in\mathbb{N}: N_p(\varphi_j-\varphi)\overset{j\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

ومنه

$$\forall p,l\in\mathbb{N}:\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(x^l(\varphi_j(x)-\varphi(x))^{(m)}\right)\overset{j\to+\infty}{\longrightarrow}0. \tag{5.4}$$

يمكن القول أنّ المطلوب هو

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^k g(x)(\varphi_j^{(m)}-\varphi^{(m)}(x))\ \mathrm{d}x\overset{j\to+\infty}{\longrightarrow}0. \tag{5.5}$$

نستخلص من العلاقة (5.4) أنّ

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left((1+x^2)^{k+1}(\varphi_j(x)-\varphi(x))^{(m)}\right)\overset{j\to+\infty}{\longrightarrow}0, \tag{5.6}$$

ذلك لأنّ العلاقة (5.4) قائمة مهما كان $l\in\mathbb{N}$.

من العلاقة (5.6) ومن كون التابع g محدودا يأتي:

$$\exists C>0:\sup_{x\in\mathbb{R}}\left[g(x)\left((1+x^2)^{k+1}(\varphi_j(x)-\varphi(x))^{(m)}\right)\right]<C. \tag{5.7}$$

ولما كان

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^k g(x)(\varphi_j(x)-\varphi^{(m)}(x))\ \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}g(x)(1+x^2)^{k+1}(\varphi_j^{(m)}(x)-\varphi^{(m)}(x))\ \mathrm{d}x,$$

فإننا نستطيع تطبيق نظرية لوبيغ المهيمن على المتتالية

$$\psi_j(x) = \frac{1}{1+x^2} g(x)(1+x^2)^{k+1}(\varphi_j^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x)),$$

لأنّها متتالية متقاربة ببساطة على $\mathbb{R}$ نحو 0 ولدينا حسب العلاقة (5.7) :

$$|\psi_j(x)| \leqslant C\frac{1}{1+x^2} \in L^1.$$

وبالتالي حسب لوبيغ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^k g(x)(\varphi_j^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x))\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j(x)\ \mathrm{d}x \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

تلك هي العلاقة (5.5) ، علما أنّ هذه العلاقة تكافيء العلاقة (5.3) التي تكافيء العلاقة (5.2).
وهو المطلوب. □

العمليات على $S'(\mathbb{R}^n)$

لدينا القضية التالية:

قضية 5.6
ليكن $\alpha \in \mathbb{N}^n$ دليل متعدد. إنّ المؤثر D^α يعرف تطبيقا خطيا ومستمرا من $S'(\mathbb{R}^n)$ في $S'(\mathbb{R}^n)$.

جداء توزيع معتدل وتابع من الصنف C^∞

تعريف 5.6 [فضاء التوابع بطيئة التزايد $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ *Fonctions à croissance lente*]

نقول عن تابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ إنّه بطيء التزايد، إذا تحقق

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^n, \exists c \geqslant 0, \exists m \in \mathbb{N} : |D^\alpha f(x)| \leqslant c(1+||x||^2)^m.$$

لدينا القضية التّالية:

قضية 5.7
ليكن $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ ، $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ و $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$f\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \text{ و } fT \in S'(\mathbb{R}^n).$$

أمثلة لتوزيعات معتدلة:

1. $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ ومنه $\delta \in S'(\mathbb{R})$.

2. إذا كان $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p = 1, 2, \infty)$ ، فإنّ $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$.

3. ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x^2}$. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ومنه $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ لكن $T_f \notin S'(\mathbb{R}^n)$. بالفعل، لو كان $f \in S'(\mathbb{R})$ لتمكنا من إثبات أنّ $f\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ من أجل كل φ من $S(\mathbb{R})$.

بأخذ $\varphi(x) = e^{-x^2}$ ، نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x = +\infty.$$

وهذا يعني أنّ $f \notin S'(\mathbb{R})$.

3. ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln |x| - x & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

f مستمر على $\mathbb{R}$ فهو $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ويوجد كثير حدود $P(x) = 1 + x^2$ بحيث

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ |f(x)| \leqslant |P(x)|.$$

ومنه $f \in S'(\mathbb{R})$.

ونستنتج أنّ $f'(x) = \ln|x| \in S'(\mathbb{R})$ و $f''(x) = \mathrm{vp}\dfrac{1}{x} \in S'(\mathbb{R})$.

4. التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = e^{ie^x}$ عنصر من $S'(\mathbb{R})$. بالفعل، لدينا $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ مع $|g(x)| = 1$. أي أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R} : |g(x)| \leqslant P(x) = 1.$$

ومنه نستنتج أنّ $g \in S'(\mathbb{R})$.

ملاحظة: لاحظ أنّ $g'(x) = ie^x e^{ie^x}$ عنصر من $S'(\mathbb{R})$. لكن $|g'(x)| = e^x$ ولا يمكن حده بكثير حدود. هذا المثال يؤكد أنّ هذا الشرط كاف وغير لازم.

تعريف 5.7 [التقارب في $S'(\mathbb{R}^n)$] لتكن (T_j) متتالية عناصر من $S(\mathbb{R}^n)$ وليكن $T \in S(\mathbb{R}^n)$. نقول عن (T_j) إنّها متقاربة نحو T في $S(\mathbb{R}^n)$ ، إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \lim_{j \to +\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

تحويل فوريي في $S'(\mathbb{R}^n)$

تعريف 5.8 [تحويل فوريي لتوزيع معتدل] ليكن $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. نعرف تحويل فوريي $\widehat{T}$ لـ T ، والمؤثر $\overline{F}T$ ، بـ

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \langle \widehat{T}, \varphi \rangle_{S',S} = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle_{S',S}.$$
$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \langle \overline{F}T, \varphi \rangle_{S',S} = \langle T, \overline{F}\varphi \rangle_{S',S}.$$

الإثبات: لنبيّن أولا أنّ $\widehat{T}$ توزيع معتدل. خطية $\widehat{T}$ واضحة. يبقى إثبات الاستمرار. ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. يوجد ثابت $c > 0$ بحيث:

$$|\langle \widehat{T}, \varphi \rangle_{S',S}| = |\langle T, \widehat{\varphi} \rangle_{S',S}| \leqslant c N_{p+n+1}(\varphi).$$

ملاحظة: ليكن $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. نعلم أنّ $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. لدينا من أجل $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle_{S',S} = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle_{S',S} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\widehat{\varphi}(x) \ = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-ix\cdot y} \mathrm{d}y \right) \ \mathrm{d}x.$$

بما أنّ $u(x)\varphi(y)e^{-ix\cdot y} \mapsto (x,y)$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ، نجد بتطبيق نظرية فوبيني أنّ:

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle_{S',S} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\cdot y} \ \mathrm{d}x \right) \varphi(y) \mathrm{d}y = \langle v, \varphi \rangle_{S',S},$$

حيث

$$v(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\cdot y} \ \mathrm{d}x = \widehat{u}(y).$$

وبهذا نلاحظ أنّ تعريف فوريي في S' هو تمديد لتعريفه في $L^1(\mathbb{R}^n)$. □

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 5.5
إنّ تحويل فوريي $F : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ تشاكل ومقلوبه هو $F^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{F}$.

أمثلة

1. **حساب** $\widehat{\delta}$.
ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle_{S',S} = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle_{S',S} = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \langle 1, \varphi \rangle.$$

ومنه $\widehat{\delta} = 1$ في $S'(\mathbb{R}^n)$.

2. **حساب** $\overline{F}\delta$.
ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$\langle \overline{F}\delta, \varphi \rangle_{S',S} = \langle \delta, \overline{F}\varphi \rangle_{S',S} = \overline{F}\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \langle 1, \varphi \rangle.$$

ومنه $\overline{F}\delta = 1$ في $S'(\mathbb{R}^n)$.

3. **حساب** $\widehat{1}$ **في** $\mathbb{R}$.
نعلم أنّ $\widehat{\delta} = 1$. ومنه حسب نظرية فوريي العكسي، لدينا:

$$\delta = (2\pi)^{-1}\overline{F}\widehat{\delta} = (2\pi)^{-1}\overline{F}1 = (2\pi)^{-1}\widehat{1}.$$

وبالتالي،

$$\widehat{1} = (2\pi)\delta.$$

4. **حساب** $\widehat{c}$ **حيث** c **ثابت من** $\mathbb{R}$.
لدينا:

$$\widehat{c} = \widehat{c.1} = c\widehat{1} = (2\pi)c\delta.$$

علاقة بارسفال - بلانشرال Parseval - Plancherel

مبرهنة 5.6
تحويل فوريي F (وفوريي العكسي له) تشاكل من $L^2(\mathbb{R}^n)$ نحو $L^2(\mathbb{R}^n)$ ، ولدينا العلاقة التالية:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), ||\widehat{f}||_{L^2} = (2\pi)^{n/2}||f||_{L^2},$$

والتي تدعى بعلاقة بارسفال ـ بلانشرال.

الإثبات:

نرمز فيما يلي بـ $(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ للجداء السلمي في L^2 وبـ $\langle u, v\rangle_{S',S}$ للقوس التوزيعي بين S وثنويه S' . لدينا العلاقة التالية بين ذلك الجداء وهذا القوس:

$$\begin{aligned}
(\widehat{f}, \widehat{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \cdot \overline{\widehat{\varphi}}(x) \ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \left(\overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi) \ \mathrm{d}\xi}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix\cdot\xi}\bar{\varphi}(\xi) \ \mathrm{d}\xi\right) \ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\bar{F}\bar{\varphi}(x) \ \mathrm{d}x \\
&= \langle \widehat{f}, \bar{F}\bar{\varphi}\rangle_{S',S}.
\end{aligned}$$

إذن، بما أنّ

$$\forall g \in S(\mathbb{R}^n), \ (2\pi)^{-n}F\overline{F}g = g,$$

فإن

$$(2\pi)^{-n}F\overline{F}\bar{\varphi} = \bar{\varphi}.$$

وبالتالي،

$$\begin{aligned}
(\widehat{f}, \widehat{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \langle \widehat{f}, \overline{F}\bar{\varphi}\rangle_{S',S} \\
&= \langle f, F\overline{F}\bar{\varphi}\rangle_{S',S} \\
&= (2\pi)^n\langle f, (2\pi)^{-n}F\overline{F}\bar{\varphi}\rangle_{S',S} \\
&= (2\pi)^n\langle f, (2\pi)^{-n}F\overline{F}\bar{\varphi}\rangle_{S',S} \\
&= (2\pi)^n\langle f, \bar{\varphi}\rangle_{S',S} \\
&= (2\pi)^n(f, \varphi)_{L^2}.
\end{aligned}$$

ومنه، فملخص القول هو

$$(\widehat{f},\widehat{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^n)}=(2\pi)^n(f,\varphi)_{L^2}.$$

عندما نختار في العلاقة السابقة $f=\varphi$ نجد:

$$||\widehat{\varphi}||^2_{L^2}=(\widehat{\varphi},\widehat{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^n)}=(2\pi)^n(\varphi,\varphi)_{L^2}=(2\pi)^n||\varphi||^2_{L^2}.$$

وبالتالي،

$$||\widehat{\varphi}||_{L^2}=(2\pi)^{n/2}||\varphi||_{L^2}. \tag{5.8}$$

العلاقة (5.8) محققة من أجل كل $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ علما أن الفضاء $S(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $L^2(\mathbb{R}^n)$.

ليكن $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. توجد متتالية توابع سريعة التناقص $\varphi_j\in S(\mathbb{R}^n)$ تتقارب في $L^2(\mathbb{R}^n)$ نحو f ، أي:

$$\lim_{j\to+\infty}||\varphi_j-f||_{L^2}=0.$$

بما أنّ

$$0\leqslant |||\varphi_j||_{L^2}-||f||_{L^2}||\leqslant ||\varphi_j-f||_{L^2},$$

فإن

$$\lim_{j\to+\infty}|||\varphi_j||_{L^2}-||f||_{L^2}|=0.$$

أي

$$\lim_{j\to+\infty}||\varphi_j||_{L^2}=||f||_{L^2}.$$

ومن جهة أخرى، نعلم أنّ

$$\begin{aligned}\varphi_j\xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} &\Rightarrow \widehat{\varphi_j}\xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)}\widehat{f}\\ &\Rightarrow \widehat{\varphi_j}\xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^n)}\widehat{f}\\ &\Rightarrow ||\widehat{\varphi_j}||_{L^2}\xrightarrow{j\to+\infty}||\widehat{f}||_{L^2}.\end{aligned}$$

الخلاصة: بمراعاة

$$||\varphi_j||_{L^2}\xrightarrow{j\to+\infty}||f||_{L^2},$$
$$||\widehat{\varphi_j}||_{L^2}\xrightarrow{j\to+\infty}||\widehat{f}||_{L^2},$$

والمرور إلى النهاية في طرفي العلاقة

$$||\widehat{\varphi_j}||_{L^2} = (2\pi)^{n/2}||\varphi_j||_{L^2},$$

نحصل على

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \ ||\widehat{f}||_{L^2} = (2\pi)^{n/2}||f||_{L^2}.$$

□

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 5.7
ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ توزيعا متراص الحامل على $\mathbb{R}^n$. لدينا

$$\widehat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \ \widehat{T}(\xi) = \langle T(x), e^{-ix\cdot\xi}\rangle.$$

الإثبات: نضع

$$u(\xi) = \langle T(x), e^{-ix\cdot\xi}\rangle.$$

حسب المبرهنة 4.1 من فصل جداء التزاوج، فإنّ $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. وبما أنّه يمكننا المبادلة بين عمليتي الإشتقاق والمكاملة، نكتب من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi)\varphi(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle T(x), e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} \varphi(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle T(x), e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\right\rangle_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}\ \mathrm{d}\xi \\
&= \left\langle T(x), \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right\rangle_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} \\
&= \langle T(x), \widehat{\varphi}\rangle_{S',S} \\
&= \left\langle \widehat{T}, \varphi\right\rangle_{S',S}
\end{aligned}$$

وهو المطلوب. □

لاحظ أنّ

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = \langle T, \varphi\rangle_{S',S},\ \ \forall\varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

مثال: لنحسب $\widehat{\delta}$ بإستخدام هذا التعريف. لدينا:

$$\widehat{\delta}(\xi) = \langle \delta(x), e^{-ix\cdot\xi} \rangle = e^{-i0\cdot\xi} = 1.$$

المبرهنة التالية تعطينا العلاقة بين شفعية توزيع معتدل وشفعية تحويل فوريي له.

مبرهنة 5.8
ليكن $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ و $\widehat{T}$ تحويل فوريي له. لدينا:
1. T زوجي $\Leftarrow$ $\widehat{T}$ زوجي.
2. T فردي $\Leftarrow$ $\widehat{T}$ فردي.

الإثبات:
لنبين الإستلزام 1.
ليكن $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. نفرض أنّ T زوجي. وهذا يعني أنّ $T = \check{T}$.
إثبات أنّ $\widehat{T}$ زوجي يعود إلى إثبات أنّ $\widehat{T} = \check{\widehat{T}}$.
ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$\langle \check{\widehat{T}}, \varphi \rangle = \langle \widehat{T}, \check{\varphi} \rangle = \langle T, \widehat{\check{\varphi}} \rangle.$$

لكن حسب الفرض لدينا: $T = \check{T}$. ومنه:

$$\langle \check{\widehat{T}}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\check{\varphi}} \rangle = \langle \check{T}, \widehat{\check{\varphi}} \rangle. = \langle T, \check{\widehat{\check{\varphi}}} \rangle.$$

لنحسب $\check{\widehat{\check{\varphi}}}$. لدينا:

$$\check{\widehat{\check{\varphi}}} = \widehat{\check{\varphi}}(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \check{\varphi}(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \varphi(-\xi) \mathrm{d}\xi \overset{\eta=-\xi}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\eta) \mathrm{d}\eta = \widehat{\varphi}.$$

أي أنّ

$$\langle \check{\widehat{T}}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, \varphi \rangle.$$

وبالتالي، التوزيع T زوجي. وهو المطلوب.
بنفس الطريقة نبيّن الإستلزام 2 مع التذكير بأنّ $T = -\check{T}$. □

5.3 حل معادلة تفاضلية ذات مشتقات جزئية باستعمال تحويل فوريي

ليكن $\lambda > 0$ ثابت. نعتبر المعادلة التفاضلية

$$\Delta u - \lambda u = f,$$

حيث $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

بأخذ تحويل فوريي لطرفي المعادلة، نجد:

$$\widehat{\Delta u - \lambda u} = \widehat{f}.$$

لدينا $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. ومنه

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}} - \lambda \widehat{u} = \widehat{f}.$$

وبما أنّ $\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}} = (-i)^2 x_j^2 \widehat{u}(x)$ ، فإنّ:

$$\left(-\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) \widehat{u} - \lambda \widehat{u} = \widehat{f}.$$

ومنه

$$-\left(||x||^2 + \lambda \right) \widehat{u} = \widehat{f}.$$

ومنه

$$\widehat{u} = -\frac{1}{||x||^2 + \lambda} \widehat{f}.$$

من جهة، $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ومنه $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$. ومن جهة أخرى، $-\frac{1}{||x||^2 + \lambda} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ ، ومنه $\widehat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$.

لدينا:

$$u = (2\pi)^{-n} \overline{F} \widehat{u} = (2\pi)^{-n} \overline{F} \left(-\frac{1}{||x||^2 + \lambda} \widehat{f} \right).$$

وبالتالي، إذا كان $f \in S(\mathbb{R}^n)$ فإنّه يوجد $u \in S(\mathbb{R}^n)$ وحيد حل للمعادلة $\Delta u - \lambda u = f$ ، وهو يكتب على الشكل:

$$u = (2\pi)^{-n} \overline{F} \left(-\frac{1}{||x||^2 + \lambda} f \right).$$

ملاحظة: في حالة $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ ، نجد بنفس الطريقة أنّ $u \in S'(\mathbb{R}^n)$.

5.4 تمارين محلولة

تمرين 5.1

احسب تحويل فوريي للتوابع المعرفة كالتالي:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & : |x| \leqslant 1; \\ 0 & : |x| > 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1-|x| & : |x| \leqslant 1; \\ 0 & : |x| > 1, \end{cases}$$

$$.f_3(x) = 1_{[-1,0[}(x) - 1_{]0,1]}(x)$$

حل التمرين 5.1

1. **حساب تحويل فوريي للتّابع** f_1

لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2 < +\infty.$$

أي أنّ $f \in L^1(\mathbb{R})$ ومنه يمكن حساب تحويل فوريي له.

- من أجل $\xi = 0$ ، لدينا

$$\widehat{f_1}(0) = \int_{-1}^{1} \, \mathrm{d}x = 2.$$

- من أجل $\xi \neq 0$ ، لدينا

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{i\xi}[e^{-ix\xi}]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{i\xi}(e^{-i\xi} - e^{i\xi}) \\
&= -\frac{1}{i\xi}(\cos(\xi) - i\sin(\xi) - \cos(\xi) - i\sin(\xi))
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\xi}\sin(\xi).$$

وبالتّالي

$$\widehat{f}_1(\xi) = \begin{cases} 2 & : \xi = 0, \\ \dfrac{2}{\xi}\sin(\xi) & : \xi \neq 0. \end{cases}$$

2. **حساب تحويل فوريي للتّابع** f_2

- من أجل $\xi = 0$ ، لدينا

$$\begin{aligned} \widehat{f}_2(0) &= \int_{-1}^{1} (1-|x|)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} (1+x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (1-x)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

- من أجل $\xi \neq 0$ ، لدينا

$$\begin{aligned} \widehat{f}_2(\xi) &= \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}(1-|x|)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} e^{-ix\xi}(1+x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} e^{-ix\xi}(1-x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} e^{-ix\xi}\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} e^{-ix\xi}\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} xe^{-ix\xi}\ \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} xe^{-ix\xi}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\xi^2}\left(1-\cos(\xi)\right). \end{aligned}$$

وبالتّالي

$$\widehat{f}_2(\xi) = \begin{cases} 1 & : \xi = 0, \\ \dfrac{2}{\xi^2}\left(1-\cos(\xi)\right) & : \xi \neq 0. \end{cases}$$

3. **حساب تحويل فوريي للتّابع** f_3

- من أجل $\xi = 0$ ، لدينا:

$$\widehat{f}_3(0) = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} \mathrm{d}x = 0.$$

- من أجل $\xi \neq 0$ ، لدينا:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_3(\xi) &= \int_{-1}^{0} e^{-ix\xi}\ \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} e^{-ix\xi}\ \mathrm{d}x \\
&\overset{y=-x}{=} \int_{0}^{1} e^{iy\xi}\ \mathrm{d}y - \int_{0}^{1} e^{-ix\xi}\ \mathrm{d}x \\
&= 2i\int_{0}^{1} \sin(x\xi)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{2i}{\xi}(1-\cos(\xi)).
\end{aligned}$$

وبالتّالي

$$\widehat{f}_3(\xi) = \begin{cases} 0 & : \xi = 0, \\ \dfrac{2i}{\xi}(1-\cos(\xi)) & : \xi \neq 0. \end{cases}$$

تمرين 5.2

1. احسب تحويل فوريي للتابع

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & : |x| \leqslant 1 \\ 0 & : |x| > 1 \end{cases}$$

2. باستعمال نتيجة السؤال 1. ، احسب التكامل التالي:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{t\cos t - \sin t}{t^3} \cos\left(\frac{t}{2}\right)\ \mathrm{d}t.$$

حل التمرين 5.2

1. **حساب تحويل فوريي للتّابع** f.
- من أجل $\xi = 0$ ، لدينا:

$$\widehat{f}(0) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \quad \mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

• من أجل $\xi \neq 0$ ، لدينا:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}(1 - x^2) \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\cos(x\xi) \ \mathrm{d}x - i\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\sin(x\xi) \ \mathrm{d}x.$$

بما أنّ التّابع $x \mapsto (1 - x^2)\cos(x\xi)$ زوجي و $x \mapsto (1 - x^2)\sin(x\xi)$ فردي، فإنّ:

$$\widehat{f}(\xi) = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)\cos(x\xi) \ \mathrm{d}x.$$

بالمكاملة بالتجزئة مرتين، نجد:

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{4}{\xi^2}\cos(\xi) + \frac{4}{\xi^3}\sin(\xi).$$

وبالتّالي:

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{4}{3} & : \xi = 0, \\ -\dfrac{4}{\xi^2}\cos(\xi) + \dfrac{4}{\xi^3}\sin(\xi) & : \xi \neq 0. \end{cases}$$

2. **حساب التكامل** $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^3} \cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \ \mathrm{d}t$.

نلاحظ أنّ

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{t\cos t - \sin t}{t^3} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \ \mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} \widehat{f}(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \ \mathrm{d}t$$

التّابع $t \mapsto \widehat{f}(t)$ زوجي، ومنه يمكننا كتابة:

$$2\int_{0}^{+\infty} \widehat{f}(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \ \mathrm{d}t = Re\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{t}{2}}\widehat{f}(t) \ \mathrm{d}t.$$

وبالتالي

$$\int_{0}^{+\infty} \widehat{f}(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}Re\widehat{\widehat{f}}\left(\frac{1}{2}\right).$$

لدينا من نظرية تحويل فوريي العكسي أنّ

$$f(t) = (2\pi)^{-1}\widehat{\widehat{f}}(-t),$$

ومنه

$$\int_{0}^{+\infty} \widehat{f}(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \pi f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

أي أنّ

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\cos t - \sin t}{t^3} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \ \mathrm{d}t = -\frac{3\pi}{16}.$$

تمرين 5،3

1 ـ احسب تحويل فوريي للتّابع

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}, \ \ \varepsilon > 0.$$

إرشاد: احسب تحويل فوريي للتّابع $x \mapsto g(x) = e^{-\varepsilon|x|}$.

2 ـ احسب النهاية $\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{f_\varepsilon}(x)$.

حل التمرين 5،3

1 ـ **حساب** $\widehat{f_\varepsilon}$.

لدينا أوّلا،

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-\varepsilon|x|}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} e^{x(-i\xi+\varepsilon)} \ \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{x(-i\xi-\varepsilon)} \ \mathrm{d}x.$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة، نجد أنّ $\widehat{g}(\xi) = \dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + \xi^2}$.

ونلاحظ أنّ $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\pi}\widehat{g}(x)$. ومنه $\widehat{f_\varepsilon}(x) = \dfrac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{g}}(x)$. حسب نظرية تحويل فوريي العكسي، فإنّ:

$$g(x) = (2\pi)^{-1}\overline{F}\widehat{g}(\xi) = (2\pi)^{-1}\widehat{\widehat{g}}(-\xi).$$

أي أنّ

$$\widehat{\widehat{g}}(-\xi) = (2\pi) g(\xi).$$

وبالتّالي:

$$\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(2\pi) g(-\xi) = g(-\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|}.$$

وعليه $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|}$.

2 ـ **حساب** $\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{f_\varepsilon}(\xi)$.

لدينا:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon|\xi|} = 1.$$

وهو المطلوب.

تمرين 5.4

1 ـ ليكن $a>0$ والتّابع f المعرف بـ $f(x)=e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x)$. احسب تحويل فوريي $\widehat{f}$ للتّابع f.

2 ـ ليكن التّابع g المعرف بـ $g(x)=e^{ax}\chi_{]-\infty,0]}(x)$. احسب تحويل فوريي $\widehat{g}$ للتّابع g.

3 ـ استنتج قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+4\pi^2x^2}\ \mathrm{d}x.$$

حل التمرين 5.4

1 ـ **حساب** $\widehat{f}$:

ليكن $\xi\in\mathbb{R}$. لدينا:

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{0}^{+\infty}e^{-(a+i\xi)x}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{i\xi+a}.$$

2 ـ **حساب** $\widehat{g}$:

ليكن $\xi\in\mathbb{R}$. لدينا:

$$\widehat{g}(\xi)=\int_{0}^{+\infty}e^{(a-i\xi)x}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{a-i\xi}.$$

3 ـ **إستنتاج قيمة التكامل** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+4\pi^2x^2}\ \mathrm{d}x$

نلاحظ أنّ

$$\frac{1}{a^2+4\pi^2x^2}=\widehat{f}(2\pi x)\widehat{g}(2\pi x),$$

ومنه

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+4\pi^2x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(2\pi x)\widehat{g}(2\pi x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(\widehat{f\star g})(2\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\widehat{f\star g})(y)\mathrm{d}y.$$

يمكن أن نستنتج أنّ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+4\pi^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F}(\widehat{f\star g})(0)\mathrm{d}y.$$

ثم بإستعمال نظرية فوريي العكسي، نكتب:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+4\pi^2x^2}\mathrm{d}x=(f\star g)(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-y)g(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{0}e^{2ay}\mathrm{d}y=\frac{1}{2a}.$$

وهو المطلوب.

تمرين 5.5

احسب تحويل فوريي وتحويل فوريي العكسي للتابعين التاليين:

$f_\alpha(t) = e^{-\alpha t}H(t),\ \ \alpha > 0$ ، $g_a(t) = \begin{cases} 1 & : |t| < a, \\ 0 & : |t| \geqslant a \end{cases}$.

حل التمرين 5.5

ـ **حساب** $\widehat{f_\alpha}$ **:** ليكن $\xi \in \mathbb{R}$. لدينا:

$$\widehat{f_\alpha}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-(i\xi+\alpha)x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{i\xi + \alpha}.$$

ـ **حساب** $\widehat{g_a}$ **:** ليكن $\xi \in \mathbb{R}$.

- من أجل $\xi = 0$ ، لدينا:

$$\widehat{g_a}(0) = 2a.$$

- من أجل $\xi \neq 0$. لدينا:

$$\widehat{g_a}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = -\frac{1}{i\xi}[e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}] = \frac{2}{\xi}\sin(a\xi).$$

ومنه

$$\widehat{g_a}(\xi) = \begin{cases} 2a & : \xi = 0, \\ \dfrac{2}{\xi}\sin(a\xi) & : \xi \neq 0. \end{cases}$$

تمرين 5.6

ليكن $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ يحقق $xT = 1$.

1− احسب $(\widehat{T})'$.

2− يكتب $\widehat{T}$ على الشكل $\widehat{T} = aS + b$ حيث a و b ثابتان و $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. المطلوب تعيين الثابت a والتوزيع S.

حل التمرين 5.6

1− لدينا العلاقة

$$(\widehat{T})' = -i\widehat{xT}.$$

وبما أنّ $xT = 1$ فإن

$$(\widehat{T})' = -i\widehat{1} = -i2\pi\delta,$$

لأننا نعلم أنّ $\widehat{1} = 2\pi\delta$.

2– نعلم أنّ $H' = \delta$ ولذلك نستنتج من العلاقة $(\widehat{T})' = -i\widehat{1} = -i2\pi\delta$ الواردة في السؤال الأول أن:

$$(\widehat{T})' = (-i2\pi H)',$$

أي أنّ

$$((\widehat{T}) - (-i2\pi H))' = 0.$$

ومنه نستنخلص أنّ

$$\widehat{T} - (-i2\pi H) = b,$$

حيث b ثابت. أي أنّ

$$\widehat{T} = -i2\pi H + b.$$

وهذا يعني أنّ $S = H$ و $a = -2\pi i$.

تمرين 5.7

احسب $\widehat{\delta'}$ و $\widehat{x}$.

حل التمرين 5.7

• حساب $\widehat{\delta'}$. بما أنّ $\delta' \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ فإنّ $\delta' \in S'(\mathbb{R})$. ومنه لدينا:

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}): \ \langle \widehat{\delta'}, \varphi \rangle_{S',S} = \langle \delta', \widehat{\varphi} \rangle_{S',S} = -\langle \delta, (\widehat{\varphi})' \rangle_{S',S} = -i\widehat{x\varphi}(0).$$

بتطبيق تعريف تحويل فوريي، نجد:

$$\langle \widehat{\delta'}, \varphi \rangle_{S',S} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix.0} x\varphi(x) \ \mathrm{d}x = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x = -i\langle x, \varphi \rangle_{S',S}.$$

أي أنّ $\widehat{\delta'} = -ix$.

• حساب $\widehat{x}$. نعلم من السؤال السابق أنّ $\widehat{\delta'} = -ix$. ومنه بإستعمال نظرية فوريي العكسي، نجد:

$$\delta' = (2\pi)^{-n}\overline{F}(\widehat{\delta'}) = (2\pi)^{-n}\overline{F}(-ix) = (2\pi)^{-n} \times \widehat{-i(-x)} = i(2\pi)^{-n}\widehat{x}.$$

وبالتالي

$$\widehat{x} = -i(2\pi)^n\delta'.$$

وهو المطلوب.

تمرين 5.8

ليكن التّابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{iax}$ مع $a \in \mathbb{R}$.

1 ـ اثبت أنّ $f \in S'(\mathbb{R})$.

2 ـ احسب $\widehat{\delta_a}$ و $\overline{F}\delta_a$.

3 استنتج $\widehat{e^{iax}}$ ، $\widehat{\cos(ax)}$ و $\widehat{\sin(ax)}$.

حل التمرين 5.8

1 ـ التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ و

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ |f(x)| = 1.$$

وبالتالي فإنّ f محدود بكثير حدود. ومنه $f \in S'(\mathbb{R})$.

2 ـ بما أنّ $\delta_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ فإنّ $\delta_a \in S'(\mathbb{R})$.

- حساب $\widehat{\delta_a}$. ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\langle \widehat{\delta_a}, \varphi \rangle_{S',S} = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle_{S',S} = \widehat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax}\varphi(x) \ \mathrm{d}x = \langle e^{-iax}, \varphi \rangle_{S',S}.$$

ومنه $\widehat{\delta_a} = e^{-iax} = g(x)$ في $S'(\mathbb{R})$.

- حساب $\overline{F}\delta_a$. ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\langle \overline{F}\delta_a, \varphi \rangle_{S',S} = \langle \delta_a, \overline{F}\varphi \rangle_{S',S} = \overline{F}\varphi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\varphi(x) \ \mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle_{S',S}.$$

ومنه $\overline{F}\delta_a = f$ في $S'(\mathbb{R})$.

3 ـ

- استنتاج $\widehat{e^{iax}}$. حسب نظرية فوريي العكسي، لدينا:

$$\delta_{-a} = (2\pi)^{-1}\overline{F}e^{iax}.$$

ومنه

$$\widehat{e^{iax}} = (2\pi)\delta_a.$$

- استنتاج قيمة $\widehat{\cos(ax)}$. نلاحظ أنّ $\cos(ax) \notin L^1(\mathbb{R})$. ومنه لا نحسب تحويل فوريي له باستخدام التكامل. لدينا

$$g(x) + f(x) = e^{-iax} + e^{iax} = 2\cos(ax).$$

أي أنّ

$$\widehat{\cos(ax)} = \frac{\widehat{g(x) + f(x)}}{2} = \frac{\widehat{g}}{2} + \frac{\widehat{f}}{2}.$$

ومنه $\widehat{\cos(ax)} = \pi(\delta_a + \delta_{-a})$.

- استنتاج $\widehat{\sin(ax)}$. لدينا

$$f(x) - g(x) = e^{iax} - e^{-iax} = 2i\sin(ax).$$

ومنه

$$\widehat{\sin(ax)} = \frac{\widehat{f} - \widehat{g}}{2i} = \frac{(2\pi)\delta_a - (2\pi)\delta_{-a}}{2i}.$$

ومنه $\widehat{\sin(ax)} = \frac{\pi}{i}(\delta_a - \delta_{-a})$.

وهو المطلوب.

تمرين 5.9

1 ـ نعلم أنّ تحويل فوريي لـ $f(x) = \cos(ax)$ هو $\widehat{f} = \pi(\delta_a + \delta_{-a})$. استنتج $\widehat{f^2}$.

2 ـ إذا علمت أنّ $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ و $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ فهل f يكون دوما مستمرا؟

حل التمرين 5.9

1 ـ نضع $g(x) = \cos 2ax$. العلاقة $\widehat{f} = \pi(\delta_a + \delta_{-a})$ تؤدّي إلى $\widehat{g} = \pi(\delta_{2a} + \delta_{-2a})$ (يكفي أن نستبدل a بـ $2a$). ونحن نعلم أنّ $\widehat{1} = 2\pi\delta$ و $f^2(x) = \cos^2 ax = \frac{\cos 2ax + 1}{2} = \frac{g(x) + 1}{2}$.

ومنه $\widehat{f^2} = \frac{\widehat{g+1}}{2} = \frac{\widehat{g} + \widehat{1}}{2} = \frac{\pi}{2}(\delta_{2a} + \delta_{-2a} + 2\delta)$.

2 ـ نعم لأننا نلاحظ أنّ الفرض $\widehat{f} \in L^1$ يؤدي إلى $\overline{F}f \in L^1$ ونحن نعلم أيضا أنّ تحويل فوريي لأي تابع يقبل المكاملة تابع مستمر. وعليه فالفرض $\overline{F}f \in L^1$ يؤدي إلى أن $F(\overline{F}f)$ مستمر. وبالتالي نستنتج المطلوب من العلاقة $(2\pi)^{-n}F(\overline{F}f) = f$.

تمرين 5.10

1. من أجل $j = 20$ ، عيّن $F(\delta^{(j)})$ و $\overline{F}(\delta^{(j)})$ ، ثم $F(x^j)$ و $\overline{F}(x^j)$ ، حيث F يرمز لتحويل فوريي.

2. اوجد علاقة بين تابع هيفيسايد H وتابع الإشارة sgn. ثم عيّن تحويل فوريي لـ sgn بدلالة تحويل فوريي لـ H (حيث $\text{sgn}(x) = 1$ من أجل $x > 0$ و $\text{sgn}(x) = -1$ من أجل $x < 0$).

3.

أ) بيّن أنّه يوجد توزيع $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ بحيث $\widehat{T} = H$.

ب) هل يمكن أن يكون هذا التوزيع T في $L^1(\mathbb{R})$ ؟

جـ) هل يمكن أن يكون هذا التوزيع T في $L^2(\mathbb{R})$ ؟

د) هل يمكن أن يكون التوزيع T متراص الحامل؟

4. ليكن $f \in L^1(\mathbb{R})$ و $\widehat{f} = 0$. اثبت أنّ $f = 0$.

حل التمرين 5.10

1. لدينا

$$F(\delta^{(j)}) = i^j x^j \widehat{\delta} = 1.x^{20}.1 = x^{20} \quad \text{و} \quad \overline{F}(\delta^{(j)}) = (-i)^j x^j \widehat{\delta} = 1.x^{20}.1 = x^{20}.$$

2. لدينا $H(x) = \dfrac{1 + \mathrm{sgn}x}{2}$ ، ومنه

$$\mathrm{sgn}x = 2H(x) - 1.$$

إذن

$$F(\mathrm{sgn}) = 2\widehat{H} - \widehat{1} = 2\widehat{H} - 2\pi\delta.$$

.3

أ) لدينا $H \in S'(\mathbb{R})$ وتحويل فوريي F وكذا $\overline{F}$ تشاكلان من $S'(\mathbb{R})$ نحو $S'(\mathbb{R})$. وهو ما يثبت المطلوب، ولدينا:

$$T = (2\pi)^{-1}\overline{F}H \in S'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

لأنّ $\overline{F}H \in S'(\mathbb{R})$.

ب) الجواب هو لا. لو كان التوزيع T في $L^1(\mathbb{R})$ لكان $\widehat{T}$ مستمرا بينما H غير مستمر. إذن لا يمكن أن يكون T في $L^1(\mathbb{R})$.

جـ) الجواب هو لا. لو كان T في $L^2(\mathbb{R})$ لكان $\widehat{T}$ في $L^2(\mathbb{R})$ (لأنّ تحويل فوريي تشاكل من $L^2(\mathbb{R})$ نحو $L^2(\mathbb{R})$). ومن ثم سيكون H في $L^2(\mathbb{R})$. وهذا غير صحيح. إذن لا يمكن أن يكون T في $L^2(\mathbb{R})$.

د) الجواب هو لا. لو كان ممكن أن يكون T متراص الحامل لكان $\widehat{T}$ من الصنف C^∞. ومنه سيكون H في نفس الصنف. وهذا غير صحيح.

4. بما أنّ f يقبل المكاملة فإنّ تحويل فوريي له مستمر وهو منعدم

تمرين 5.11

ليكن $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ مثبتا و $[a,b] \subset \mathbb{R}$ مع $a \neq b$. نضع $f = 1_{[a,b]}.\theta$ حيث يمثل $1_{[a,b]}$ التابع المميز للمجال $[a,b]$.

1 ـ عيّن الشروط اللّازمة والكافية حول التّابع θ لكي يكون $f \in H^1(\mathbb{R})$.

2 ـ عيّن الشروط اللّازمة والكافية حول التّابع θ لكي يكون $f \in H^2(\mathbb{R})$.

3 ـ نفرض في الأسئلة المتبقية أنّ θ يساوي 1 في جوار النقطتين a و b. احسب المشتق f' واستنتج أنّ تحويل فوريي $\widehat{f}$ للتّابع f يحقق العلاقة

$$ix\widehat{f}(x) = \alpha e^{-iax} + \beta e^{-ibx} + \gamma \widehat{1_{[a,b]}\theta'(x)},$$

حيث α ، β ، γ ثوابت يطلب تعيينها.

4 ـ هل $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ ؟ هل $\widehat{1_{[a,b]}\theta'} \in S(\mathbb{R})$ ؟

5 ـ اثبت أنّ $\widehat{f'} \notin L^2(\mathbb{R})$.

6 ـ هل $f \in H^1(\mathbb{R})$ ؟

حل التمرين 5.11

1 ـ نلاحظ أوّلا أنّ $f \in L^2(\mathbb{R})$. لنبحث عن الشروط التي تجعل $f' \in L^2(\mathbb{R})$.
ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. بإستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_a^b \theta(x)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = -\theta(b)\varphi(b) + \theta(a)\varphi(a) + \int_a^b \theta'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x,$$

أي

$$\langle f', \varphi\rangle = \langle -\theta(b)\delta_b + \theta(a)\delta_a + 1_{[a,b]}\theta', \varphi\rangle.$$

ومنه

$$f' = -\theta(b)\delta_b + \theta(a)\delta_a + 1_{[a,b]}\theta' \quad \text{في} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

بما أنّ $\delta_a, \delta_b \notin L^2(\mathbb{R})$ ، فإنّ الشروط اللّازمة والكافية على θ حتّى يكون $f \in H^1(\mathbb{R})$ هي $\theta(a) = \theta(b) = 0$.

2 ـ لدينا من السؤال السابق أنّ $f \in H^1(\mathbb{R})$ إذا وفقط إذا كان $\theta(a) = \theta(b) = 0$. ومنه يبقى تعيين الشروط اللّازمة والكافية حتّى يكون $f'' \in L^2(\mathbb{R})$.
ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned}\langle f'', \varphi\rangle &= -\langle f', \varphi'\rangle = \theta(b)\varphi'(b) - \theta(a)\varphi'(a) + \int_a^b \theta'(x)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \theta(b)\varphi(b) - \theta(a)\varphi'(a) + \theta'(b)\varphi(b) - \theta'(a)\varphi(a) - \int_a^b \theta''(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

ومنه الشروط هي $\theta(a) = \theta'(a) = \theta(b) = \theta'(b) = 0$.

3 ـ لدينا:

$$\widehat{f}(x)=\int_a^b \theta(\xi)e^{-ix\xi}\mathrm{d}\xi=-\frac{1}{ix}\theta(b)e^{-ibx}+\frac{1}{ix}\theta(a)e^{-iax}+\frac{1}{ix}\int_a^b \theta'(\xi)e^{-ix\xi}\mathrm{d}\xi.$$

بما أنّ $\theta(a)=\theta(b)=1$ ، فإنّ:

$$ix\widehat{f}(x)=-e^{ibx}+e^{-iax}+\widehat{1_{[a,b]}\theta'(x)}$$

ومنه $\beta=\gamma=1$ ، $\alpha=-1$.

4 ـ $\widehat{f}\in C^\infty(\mathbb{R})$ لأنّ f توزيع متراص الحامل، وبما أنّ $1_{[a,b]}\theta'\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ و $\mathcal{D}(\mathbb{R})\subset S(\mathbb{R})$ ، فإنّ $\widehat{1_{[a,b]}\theta'}\in S'(\mathbb{R})$.

5 ـ نلاحظ أوّلا أنّ $ix\widehat{f}(x)=\widehat{f'}(x)$. نضع $\psi=\widehat{1_{[a,b]}\varphi'}$. لدينا

$$ix\widehat{f}(x)=-e^{-ibx}+e^{iax}+\psi.$$

حتّى يكون $x\widehat{f}(x)\in L^2(\mathbb{R})$ يلزم ويكفي أن يكون $e^{-iax}-e^{ibx}\in L^2(\mathbb{R})$.

أي أنّ: $1-e^{i(b-a)x}\in L^2(\mathbb{R})$.

لدينا

$$|1-e^{i(b-a)x}|^2=|1-\cos((b-a)x)-i\sin((b-a)x)|^2=4\sin^2(\frac{(a-b)x}{2}),$$

وهو غير كمول.

6 ـ لا، $f\notin H^1(\mathbb{R})$ لأنّه لدينا من السؤال السابق أنّ $\widehat{f'}\notin L^2(\mathbb{R})$ ومنه $f'\notin L^2(\mathbb{R})$. إذن $f\notin H^1(\mathbb{R})$.

تمرين 5.12

ليكن الفضاء $W=\{f\in L^1(\mathbb{R}):\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})\}$ الذي يسمّى فضاء فينر.

1 ـ اثبت أنّ $f\in W$ إذا وفقط إذا كان $\widehat{f}\in W$.

2 ـ ليكن $f\in W$. هل f تابع مستمر؟ هل يؤول إلى الصفر عند اللّانهاية؟

3 ـ نزوّد W بالنظيم $||f||_W=||f||_{L^1}+||\widehat{f}||_{L^1}$. هل W فضاء بناخي؟

4 ـ نعتبر التطبيق $T:W\to W$ المعرف بـ $Tf=\widehat{f}$. هل T مستمر؟ تشاكل؟

حل التمرين 5.12

1 ـ إذا كان $f\in W$ فإنّ $\overline{F}\check{f}=\widehat{f}$ ، ومنه $\check{f}=(2\pi)^{-1}F\overline{F}\check{f}$. ولمّا كان $f\in L^1(\mathbb{R})$ فإنّ $\check{f}\in L^1(\mathbb{R})$. لذا $F\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$. إذن $\widehat{f}\in W$. ثمّ إذا كان $\widehat{f}\in W$ فإنّ $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ و $F\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$. فينتج من العلاقة $\check{f}=(2\pi)^{-1}F\overline{F}\check{f}=(2\pi)^{-1}F\widehat{f}$ أنّ $f\in L^1(\mathbb{R})$ إذن $f\in W$.

2 ـ نعم، f مستمر ويؤول إلى الصفر حسب القضية 5.1 التي تؤكد أنّ $g \in L^1(\mathbb{R})$ يؤدّي إلى $\widehat{g}$ مستمر ويؤول إلى الصفر عند اللّانهاية. لدينا هنا $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ و $\check{f} = (2\pi)^{-1}F\overline{F}\check{f} = (2\pi)^{-1}F\widehat{f}$. إذن $\check{f}$ مستمر ويؤول إلى الصفر عند اللّانهاية. ومنه الأمر كذلك بالنسبة لـ f.

3 ـ نعم، W فضاء بناخي: نعتبر متتالية كوشية (f_j) في W. ومنه

$$||f_j - f_k||_W = ||f_j - f_k||_{L^1} + ||\widehat{f}_j - \widehat{f}_k||_{L^1} \to 0.$$

نعلم أنّ L^1 بناخي. وبالتالي توجد f و g من L^1 بحيث $f_j \to f$ و $\widehat{f}_j \to g$. لذلك $f_j \to f$ و $\widehat{f}_j \to g$ في $S'(\mathbb{R})$. ولذا $\widehat{f}_j \to \widehat{f}$ و $\widehat{f}_j \to g$ في $S'(\mathbb{R})$ (هذا من خواص تحويل فوريي في $S'(\mathbb{R})$). إذن $\widehat{f} = g$. ومن ثمّ $f_j \to f$ في W. إذن W فضاء بناخي.

4 ـ نعم، T مستمر وتشاكل: واضح أنّ T خطي. وبما أنّ $\check{f} = (2\pi)^{-1}F\widehat{f}$ ، لدينا حسب السؤال 1 أنّ:

$$||Tf||_W = ||\widehat{f}||_W = ||\widehat{f}||_{L^1} + ||F\widehat{f}||_{L^1} = ||\widehat{f}||_{L^1} + ||2\pi\check{f}||_{L^1} \leqslant 2\pi||f||_W.$$

من جهة أخرى: $Tf = 0$ يعني $\widehat{f} = 0$. وعليه $f = 0$. إذن T تباين. كما أنّه غامر: إذا كان $g \in W$ فإنّ $f = (2\pi)^{-1}\overline{F}g$ يحقق $Tf = g$ و $f \in W$. إذن T تقابل.

وبالتّالي فإنّ T تشاكل لأنّه تقابل خطي ومستمر بين بناخين. (كما يمكن ملاحظة أنّ $||f||_W \leqslant ||\widehat{f}||_{L^1} + 2\pi||f||_{L^1} = ||Tf||_W$ من أجل كل $f \in W$. ومن ثمّ يأتي إستمرار T).

تمرين 5.13

نرمز بـ H لتابع هفيسايد ولتحويل فوريي لـ H بـ $\widehat{H}$.

1 ـ اثبت أنّ H توزيع معتدل.

2 ـ عين التوزيعين $x.\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ و $x.\widehat{H}$.

3 ـ استنتج التّوزيع $x(i.\widehat{H} - \mathrm{vp}\dfrac{1}{x})$ حيث i يحقق $i^2 = -1$.

4 ـ استنتج أنّه يوجد ثابت $c \in \mathbb{C}$ بحيث $\widehat{H} = -i\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} + c.\delta$

حل التمرين 5.13

1 ـ تابع هفيسايد H يقبل المكاملة محليا، وهو محدود بكثير حدود (كثير الحدود 1). وبالتّالي فهو توزيع معتدل.

2 ـ ليكن φ من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\langle x.\mathrm{vp}\frac{1}{x},\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} x\frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} 1.\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \langle 1,\varphi\rangle.$$

إذن $x.\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ومن جهة أخرى، نعلم أنّ $\widehat{x\varphi} = i(\widehat{\varphi})'$ وأنّ $H' = \delta$ وأنّ $\widehat{\delta} = 1$ ، وهو ما يبرر الحسابات التّالية:

$$\langle x.\widehat{H},\varphi\rangle = \langle \widehat{H}, x\varphi\rangle = \langle H,\widehat{x\varphi}\rangle = \langle H, i(\widehat{\varphi})'\rangle = -\langle iH',\widehat{\varphi}\rangle = -\langle i\delta,\widehat{\varphi}\rangle = -\langle i\widehat{\delta},\varphi\rangle = \langle -i,\varphi\rangle.$$

ومنه $x.\widehat{H} = -i$.

3 ـ نستنتج من السؤال السّابق أنّ

$$x(i.\widehat{H} - \mathrm{vp}\frac{1}{x}) = ix\widehat{H} - x\mathrm{vp}\frac{1}{x} = i(-i) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

4 ـ نعلم أنّ حل المعادلة $xT = 0$ في فضاء التوزيعات هو $T = c\delta$ حيث c ثابت كيفي.
ولذلك، بما أنّ $x(i.\widehat{H} - \mathrm{vp}\frac{1}{x}) = 0$ فإنّ $i.\widehat{H} - \mathrm{vp}\frac{1}{x} = c\delta$. إذن $\widehat{H} = c\delta - i.\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ في $S'(\mathbb{R})$.

تمرين 5.14

1 ـ انطلاقا من العلاقة $x.\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$ ، استنتج أنّ تحويل فوريي $\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}$ يكتب على الشكل $\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = S + c$ حيث c ثابت و $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ توزيع يطلب تعيينه.

2 ـ نعتبر المعادلة $xT = 1$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. استنتج من السؤال السابق حل هذه المعادلة (تذكر أنّ $x.\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$).

3 ـ تأكد من أن حلول المعادلة $xT = 1$ توزيعات معتدلة، واحسب تحويل فوريي $\widehat{T}$ لهذه الحلول.

حل التمرين 5.14

1 ـ العلاقة $x.\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$ تؤدي إلى

$$i\left(\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}\right)' = \widehat{x.\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = \widehat{1} = 2\pi\delta = 2\pi H',$$

ومنه

$$\left(i\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} - 2\pi H\right)' = 0.$$

إذن $a = i\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} - 2\pi H$ حيث a ثابت. وعليه $\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = -2i\pi H - ia$ ، أي $\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = -2i\pi H + c$ حيث c ثابت عقدي كيفي.

2 ـ المعادلة $xT = 1$ تكافيء $x(T - \mathrm{vp}\frac{1}{x}) = 0$. ومنه يوجد ثابت b بحيث $T - \mathrm{vp}\frac{1}{x} = b\delta$. ومن ثم نستنتج أنّ حلول المعادلة المعطاة تكتب على الشكل $T = \mathrm{vp}\frac{1}{x} + b\delta$ حيث b ثابت عقدي كيفي.

3 ـ نعلم أنّ التوزيعين $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ و δ معتدلان (انظر إلى فقرة أمثلة لتوزيعات معتدلة).

حلول المعادلة تكتب على الشكل $T = \mathrm{vp}\frac{1}{x} + b\delta$ ، وهي بالتالي توزيعات معتدلة. ولذا يؤدي السؤال الأول إلى

$$\widehat{T} = \widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} + b\widehat{\delta} = (-2\pi iH + c)b.$$

وعليه $\widehat{T} = -2\pi iH + \alpha$ حيث α ثابت عقدي كيفي.

من كثافة $\mathcal{D}$ في S نستنتج أنّ $\mu = \widehat{T}$ في $S'(\mathbb{R}^n)$.

تمرين 5.15

نسلم بأن (أنظر إلى التمرين 5.14)

$$\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = -2i\pi H + \beta,$$

حيث H هو تابع هيفيسايد.

1. عين الثابت β.

إرشاد: حدد شفعية $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$.

2. باستعمال العلاقة $\widehat{\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}} = 2\pi \widecheck{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}$ ، استنتج $\widehat{H}$.

حل التمرين 5.15

1. تعيين الثابت β. ولذلك نستعمل كون $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ فرديا. بالفعل، ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$\begin{aligned}\langle \widecheck{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}, \varphi\rangle &= \langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \check{\varphi}\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\check{\varphi}(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(-x)}{x}\ \mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x\right]\\
&\overset{y=-x}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{+\infty}^{\varepsilon}\frac{\varphi(y)}{y}\mathrm{d}y+\int_{-\varepsilon}^{-\infty}\frac{\varphi(y)}{y}\mathrm{d}y\right]\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(y)}{y}\mathrm{d}y+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y}\mathrm{d}y\right]\\
&= -\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x},\varphi\rangle.
\end{aligned}
$$

إذن $\widecheck{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = -\mathrm{vp}\frac{1}{x}$. في $S'(\mathbb{R}^n)$ وهذا يعني أنّ $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ فردي. ومنه $\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}$ فردي.

لنعين الآن الثابت β. $\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}$ فردي يعني أنّ:

$$\widecheck{\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}} = -\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}},$$

أي

$$-2\pi i\check{H}+\beta = 2i\pi H-\beta,$$

حيث:

$$\check{H}(x)=H(-x)=\begin{cases}1 & : x<0\\ 0 & : x>0.\end{cases}$$

ومنه من أجل $x>0$ ، لدينا: $\beta=2i\pi-\beta$. أي أنّ $\beta=i\pi$. وبالتالي،

$$\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = -2i\pi H+i\pi.$$

2. استنتاج $\widehat{H}$.

لدينا من السؤال السابق أنّ $\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = -2i\pi H+i\pi$. ومنه لدينا:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}}} &= 2\pi\widecheck{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = -2i\pi\widehat{H}+i\pi\widehat{1}\\
&= -2i\pi\widehat{H}+i\pi(2\pi\delta)\\
&= -2i\pi\widehat{H}+2i\pi^2\delta.
\end{aligned}
$$

لكن $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ فردي، ومنه

$$-2\pi\mathrm{vp}\frac{1}{x} = -2i\pi\widehat{H}+2i\pi^2\delta.$$

وهذا يستلزم أنّ

$$2i\pi\widehat{H} = 2\pi \mathrm{vp}\frac{1}{x} + 2i\pi^2\delta.$$

وبالتالي:

$$\widehat{H} = -i\mathrm{vp}\frac{1}{x} + \pi\delta.$$

وهو المطلوب.

تمرين 5.16

نضع $f(x) = \cos(x)$ و $g(x) = \sin x$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

1 - عيّن التوزيع $T = f\delta' + g\delta''$.

2 - عيّن تحويلات فوريي $\widehat{f\delta'}$ و $\widehat{g\delta''}$.

3 - ليكن التابع u المعرف على $\mathbb{R}$ بـ $u = g_{|[0,\pi]}$ وبـ 0 خارج $[0,\pi]$.

أ - هل u من الصنف C^∞ ؟ هل هو في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ؟ هل هو في $S(\mathbb{R})$ ؟ هل هو في $S'(\mathbb{R})$ ؟

ب - عيّن $\widehat{u}$.

حل التمرين 5.16

1 - ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ نلاحظ أن التابعين $f\varphi$ و $g\varphi$ اختباريان لأن f و g من الصنف C^1 ، وهو ما يبرر الحسابات الموالية:

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle f\delta' + g\delta'', \varphi\rangle = \langle \delta', f\varphi\rangle + \langle \delta'', g\varphi\rangle = -\langle \delta, (f\varphi)'\rangle + \langle \delta, (g\varphi)''\rangle.$$

ومنه

$$\begin{aligned} -\langle \delta, (f\varphi)'\rangle + \langle \delta, (g\varphi)''\rangle &= -\langle \delta, f\varphi' + f'\varphi\rangle + \langle \delta, g\varphi'' + g''\varphi + 2g'\varphi'\rangle \\ &= -\varphi'(0) + 2\varphi'(0) = \langle -\delta', \varphi\rangle. \end{aligned}$$

إذن $T = -\delta'$.

2 - ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f\delta'}, \varphi\rangle &= \langle \delta', f\widehat{\varphi}\rangle \\ &= -\langle \delta, (f\widehat{\varphi})'\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -(f\widehat{\varphi})'(0) \\ &= -(\widehat{\varphi})'(0) \\ &= \langle ix, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

إذن $\widehat{f\delta'} = ix$

بحسابات مشابهة نحصل على $\widehat{g\delta''} = -2ix$.

3 ـ

أ ـ

هل u من الصنف C^∞ ؟ لا لأنّه مثلا لا يقبل الإشتقاق عند 0.

هل هو في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ؟ لا لأنّه ليس من الصنف C^∞.

هل هو في $S(\mathbb{R})$ ؟ لا لأنّه ليس من الصنف C^∞.

هل هو في $S'(\mathbb{R})$ ؟ نعم لأنه تابع مستمر وبالتالي يقبل المكاملة محليا ثم إنه أصغر من كثير حدود (1 مثلا).

ب ـ لدينا

$$\widehat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^\pi e^{-ixy} \sin y\ \mathrm{d}y.$$

بالمكاملة بالتجزئة مرتين متواليتين نجد $\widehat{u}(x) = e^{-i\pi x} + 1 + x^2\widehat{u}(x)$. وهكذا نحصل من أجل $|x| \neq 1$ على $\widehat{u}(x) = \dfrac{e^{-i\pi x}+1}{1-x^2}$.

أمّا من أجل $|x| = 1$ فنحسب $\widehat{u}(1) = \int_0^\pi e^{-iy}\sin y\ \mathrm{d}y$ و $\widehat{u}(-1) = \int_0^\pi e^{iy}\sin y\ \mathrm{d}y$ فنجد المطلوب هو:

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-i\pi x}+1}{1-x^2} & : |x| \neq 1; \\ -\dfrac{i\pi}{2} & : x = 1, \\ \dfrac{i\pi}{2} & : x = -1. \end{cases}$$

تمرين 5.17

نضع $T_n = \sum_{j=0}^{n} \delta_j$ و $T = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta_j$ حيث δ_j توزيع ديراك عند النقطة j.

1− ما هو $\mathrm{Supp}\ T_n$ ؟

2− اثبت أنّ $T_n \in S'(\mathbb{R})$.

3− هل $T \in S'(\mathbb{R})$ ؟ برر.

4− برر أنّ $T_n \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} T$.

5− هل $\widehat{T_n}\overset{S'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}\widehat{T}$ ؟ لماذا؟

6− ليكن التابع f_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n بـ $f_n(x)=\dfrac{1-e^{ixn}}{1-e^{-ix}}$ لما $x\neq 2kn$ و $f_n(x)=n$ من أجل كل k صحيح؟ هل $f_n\in S'(\mathbb{R})$ ؟ هل تتقارب المتتالية (f_n) في $S'(\mathbb{R})$ ؟ برر.

حل التمرين 5.17

1− **تعيين** $\mathrm{Supp}\ T_n$. نعلم أنّ $\mathrm{Supp}\ \delta_j=\{j\}$. ومنه $\mathrm{Supp}\ T_n=\{0,1,\ldots,n\}$ ذلك لأنّ من أجل كل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}-\{0,\ldots,n\})$ فإنّ هذا التابع ينعدم في كل النقاط $\{0,1,\ldots,n\}$. وبالتالي

$$\langle T_n,\varphi\rangle=\sum_{j=0}^{n}\langle\delta_j,\varphi\rangle=\sum_{j=0}^{n}\varphi(j)=\sum_{j=0}^{n}0=0.$$

ومن جهة أخرى، إذا لم ينعدم تابع اختباري عند نقطة من $\{0,1,\ldots,n\}$ فإنّه يمكن دائما ضربه في تابع ψ من الصنف C^∞ ينعدم في النقاط الأخرى من المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}$. وحينئذ يكون $\psi\varphi$ اختباريا ويحقق $\langle T_n,\psi\varphi\rangle\neq 0$.

2− **إثبات أنّ** $T_n\in S'(\mathbb{R})$. التوزيع T_n يساوي مجموعا منتهيا لتوزيعات متراصة الحامل. وبالتالي فهو متراص الحامل (وقد حددنا حامله). ونحن نعلم أنّ كل توزيع متراص الحامل هو توزيع معتدل.

3− هل $T\in S'(\mathbb{R})$ ؟ مع التبرير. نعم، $T\in S'(\mathbb{R})$. ليكن $\varphi\in S(\mathbb{R})$. لدينا:

$$\begin{aligned}
|\langle T,\varphi\rangle| &= |\sum_{k\in\mathbb{N}}\varphi(k)|\\
&= \left|\sum_{k\in\mathbb{N}}(1+k^2)\frac{\varphi(k)}{1+k^2}\right|\\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{1+k^2}\sup_x\left|(1+x^2)\varphi(x)\right|.
\end{aligned}$$

4− **إثبات أنّ** $T_n\overset{S'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}T$. نعلم أنّ $T_n\overset{S'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}T$. نعلم أنّ $T_n\overset{S'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}T$ يعني أنّ

$$\langle T_n,\varphi\rangle\overset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}\langle T,\varphi\rangle,$$

أي

$$|\langle T_n-T,\varphi\rangle|\overset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}0$$

من أجل كل $\varphi\in S(\mathbb{R})$.

ليكن $\varphi\in S(\mathbb{R})$. بما أنّ

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \ x^p\varphi(x) \overset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

فإنه يوجد $A > 0$ بحيث

$$|x| > A \Rightarrow |\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{x^p}.$$

إذن من أجل مثلا $p = 2$ نحصل على $|\varphi(j)| \leqslant \dfrac{1}{j^2}$ عندما يكون j كبيرا. ومنه من أجل n كبير يكون:

$$|\langle T_n - T, \varphi\rangle| = \sum_{j=n}^{+\infty} |\varphi(j)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \overset{n\to+\infty}{\longleftarrow} 0.$$

5– نعم. حسب المبرهنة 5.6 وتعريف تقارب متتالية توزيعات معتدلة.

6– **هل $f_n \in S'(\mathbb{R})$ ؟ هل تتقارب المتتالية (f_n) في $S'(\mathbb{R})$ ؟ مع التبرير.**

يكفي أن نلاحظ بأنّ $f_n = \widehat{T_{n-1}}$. وبما أنّ $\widehat{T_n} \in S'(\mathbb{R})$ فإنّ $f_n \in S'(\mathbb{R})$ والمتتالية متقاربة حسب السؤال السابق نحو $\hat{T}$.

تمرين 5.18

1. هل التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ المعرف بـ $f(x) = \dfrac{1}{2+ix}$ بطيء التزايد؟
2. ليكن $a \in \mathbb{R}^\star$. نعتبر المعادلة $T' + aT = 1$.

أ) كم عدد حلول المعادلة

ب) حل المعادلة في $S'(\mathbb{R})$. كم عدد حلولها في $S'(\mathbb{R})$ ؟

جـ) حل نفس المعادلة في الفضاء $S(\mathbb{R})$. كم عدد حلولها في $S(\mathbb{R})$ ؟

حل التمرين 5.18

1. واضح أنّ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ لأنّه مقلوب كثير حدود لا ينعدم أبدا. ولدينا من أجل كل $j \in \mathbb{N}$:

$$f^{(j)}(x) = \frac{c_j}{(2+ix)^{j+1}},$$

حيث c_j ثابت يتعلق بـ j.

وهذا المشتق هو أيضا مقلوب كثير حدود لا ينعدم أبدا. وبالتالي فهو (بالطويلة) أصغر من كثير حدود.

$$\left|f^{(j)}(x)\right| = \left|\frac{c_j}{(2+ix)^{j+1}}\right| = \left|\frac{1}{(4+x^2)^{\frac{j+1}{2}}}\right| \leqslant 1.$$

كل ذلك يثبت أنّ f بطيء التزايد حسب التعريف.

2.

أ) لاحظ أنّ $T_0 = \frac{1}{a}$ حل خاص للمعادلة وأنّ $f(x) = ce^{-ax}$ حل للمعادلة المتجانسة مهما كان الثابت $c \in \mathbb{R}$. ومنه $T = ce^{-ax} + \frac{1}{a}$ يمثل حلا للمعادلة من أجل كل ثابت $c \in \mathbb{R}$ ، مع الملاحظة أنّ $T = ce^{-ax} + \frac{1}{a} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (لأنّ $ce^{-ax} + \frac{1}{a} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ذلك لأنّه مستمر).

ب) نستخدم تحويل فنجد

$$\widehat{T} = \frac{2\pi}{ix+a}\delta,$$

ومنه نستخلص أنّ

$$T = \overline{F}\left(\frac{1}{ix+a}\delta\right).$$

لاحظ أنّ $\frac{1}{ix+a}$ بطيء التزايد (انظر السؤال السابق بإستبدال فيه 2 بـ a). وبما أنّ $\delta \in S'(\mathbb{R})$ فإنّ $\frac{1}{ix+a}\delta \in S'(\mathbb{R})$. ومنه $\overline{F}\left(\frac{1}{ix+a}\delta\right) \in S'(\mathbb{R})$. وهو ما يبيّن أنّ

$$T = \overline{F}\left(\frac{1}{ix+a}\delta\right),$$

وهو الحل الوحيد في $S'(\mathbb{R})$.

جـ) لو وجد حل T في الفضاء $S(\mathbb{R})$ لكان $T' \in S(\mathbb{R})$ ولكان عندئذ: $T' + aT \in S(\mathbb{R})$. ومن ثم $1 \in S(\mathbb{R})$. وهذا غير صحيح. إذن مجموعة الحلول في $S(\mathbb{R})$ مجموعة خالية.

تمرين 5.19

حل في $S(\mathbb{R}^n)$ معادلة لابلاس

$$u \in S'(\mathbb{R}^n), \ \ \Delta u = 0.$$

حل التمرين 5.19

بأخذ فوريي لمعادلة لابلاس، نجد أنّ

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}} = 0.$$

ومنه

$$-||x||^2 \widehat{u} = 0.$$

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_\star)$. لدينا:

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \left\langle \widehat{u}, ||x||^2 \frac{\varphi}{||x||^2} \right\rangle = \left\langle ||x||^2 \widehat{u}, \frac{\varphi}{||x||^2} \right\rangle.$$

وبما أنّ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_\star)$ ، فإنّ $\frac{\varphi}{||x||^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_\star)$. ومنه من المساواة السابقة، نستنتج أنّ

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0.$$

هذا يبين أنّ $\widehat{u}$ منعدم على $\mathbb{R}^n_\star$. وبالتالي فإما $\text{Supp } \widehat{u} = \varnothing$ وإما $\text{Supp } \widehat{u} = \{0\}$.

الحالة 1 . $\text{Supp } \widehat{u} = \varnothing$ تعني أنّ $u = 0$ وهذا وارد وسندمجه في الأخير مع الحالة الموالية).

الحالة 2 . $\text{Supp } \widehat{u} = \{0\}$. وفي هذه الحالة، يوجد $m \in \mathbb{N}$ وتوجد ثوابت $(a_\alpha)_{|\alpha| \leqslant m}$ بحيث:

$$\widehat{u} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha \delta.$$

ومنه حسب نظرية فوريي العكسي، لدينا:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\alpha| \leqslant m} (2\pi)^{-n} a_\alpha \overline{F} D^\alpha \delta \\ &= \sum_{|\alpha| \leqslant m} (2\pi)^{-n} a_\alpha i^{|\alpha|} x^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leqslant m} b_\alpha x^\alpha, \end{aligned}$$

حيث $b_\alpha = (2\pi)^{-n} a_\alpha i^{|\alpha|}$.

لاحظ أنّ هذا الحل يشمل أيضا الحالة التي يكون فيها الحامل مجموعة خالية.

وبالتالي، فإن حلول معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في $S'(\mathbb{R}^n)$ هي كثيرات الحدود التوافقية. بمعنى أنّ التوزيعات المعتدلة التوافقية هي كثيرات الحدود التوافقية، بينما التوزيعات التوافقية هي التوابع التوافقية.

تمرين 5.20

من أجل كل $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ نرمز بـ $|x|$ لنظيمه الإقليدي، ونضع

$$P(x) = x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 + 2.$$

1. اثبت المتباينة التالية: من أجل كل $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ،

$$2P(x) \geqslant 1 + |x|^2.$$

2. نضع $Lu = \partial^4_{x_1} u - \partial^2_{x_2} u - \partial^2_{x_3} u - \partial^2_{x_2 x_3} u + 2u$.

أ) اثبت أنّ للمعادلة $Lu = f$ حلا وحيدا $u \in S'(\mathbb{R}^3)$ لما $f \in S'(\mathbb{R}^3)$.

ب) اثبت أنّ للمعادلة $Lu = f$ حلا وحيدا $u \in S(\mathbb{R}^3)$ لما $f \in S(\mathbb{R}^3)$.

حل التمرين 5.20

1. نلاحظ أنّ $\frac{x_2^2+x_3^2}{2} \leqslant x_2^2+x_3^2+x_2x_3$ و $x_1^2+1 \leqslant x_1^4+2$. ولذلك

$$x_1^4+x_2^2+x_3^2+x_2x_3+2 \geqslant 1+x_1^2+\frac{x_2^2+x_3^2}{2}.$$

وبالتالي،

$$P(x) \geqslant \frac{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}.$$

وهو المطلوب.

2. بإستخدام تحويل فوريي نكتب $L\widehat{u}=\widehat{f}$. فيأتي: $P(x)\widehat{u}=\widehat{f}$. ومن ثم $\widehat{u}=\frac{1}{P(x)}\widehat{f}$.
نلاحظ أنّ $\frac{1}{P(x)}$ بطيء التناقص (لأنّه كثير حدود لا ينعدم أبدا حسب السؤال الأول). فإذا كان $f \in S'(\mathbb{R}^3)$ فإنّ $\frac{1}{P(x)}\widehat{f} \in S'(\mathbb{R}^3)$. إذن $\widehat{u} \in S'(\mathbb{R}^3)$. ومنه $u \in S'(\mathbb{R}^3)$. والحل وحيد لأنّه يكتب بطريقة وحيدة بدلالة المعطى.
3. نفس الإستدلال السابق بعد تعويض $S'(\mathbb{R}^3)$ بـ $S(\mathbb{R}^3)$.

باب 6

تمارين مرفقة بإرشادات

تمرين 6.1

لتكن (f_n) متتالية توابع من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ معرفة بـ

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} \exp\left(-\dfrac{1}{1-|t|^2/n^2}\right) & : |t| < n, \\ 0 & : |t| \geqslant n. \end{cases}$$

بيّن أنّه من أجل كل $k \geqslant 0$ ، متتالية التوابع $(f_n^{(k)})$ متقاربة بانتظام على كل متراص نحو تابع $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ يطلب تعيينه. هل لدينا التقارب في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ؟

إرشاد: ما هو حامل f_n ؟

تمرين 6.2

ليكن $\varphi, \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\theta(0) = 1$. بيّن أنه يوجد $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \varphi(0)\theta(x) + x\psi(x).$$

إرشاد: طبق الصيغة الأساسية في التحليل التكاملي لـ $\gamma(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)$.

تمرين 6.3

ليكن $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(t)\mathrm{d}t = 1$. بيّن أنّه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، توجد ثنائية $(c, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث

$$\varphi = \psi' + c\varphi_0.$$

إرشاد: لتعيين C ، يمكن مكاملة المعادلة $\varphi = \psi' + C\varphi_0$.

تمرين 6.4

ليكن φ تابع من الصنف C^∞ ، ذا سند متراص، بحيث φ معدوم خارج المجال $[-1,1]$ ، و $\int_{-1}^{1}\varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1$. الهدف من التمرين هو إنشاء باستعمال التابع φ ، تابعا ψ من الصنف C^∞ ، يساوي 1 على $[-1/2,1/2]$ ومعدوم خارج $[-1,1]$.

1. باستعمال التابع φ ، أنشيء تابعا من الصنف C^∞ يساوي 0 على $]-\infty,-1]$ ويساوي 1 على $[1,+\infty[$.
2. استنتج تابعا v يساوي 1 على $[-1/2,+\infty[$ ، معدوم على $]-\infty,-1]$ وتابعا w يساوي 1 على $]-\infty,1/2]$ ويساوي 0 على $[1,+\infty[$.
3. أنشيء التابع ψ.

إرشاد:
1. فكر في المكاملة.
2. قم بتبديل المتغير.
3. استعمل الجداء.

تمرين 6.5

1. ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. نضع من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(x+n)$. برر لماذا f معرف جيدا، و $f \in C^\infty$ و f 1 - دوري.
2. نريد الآن إثبات أنّه من أجل كل تابع $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ، يوجد تابع $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(x+n)$ ومنه نثبت هذا التابع f ونذكر أنّ التابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) & : |x| < 1, \\ 0 & : |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

عنصر من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2.1. نضع $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x+n)$. برر أنّ G معرف جيدا، من الصنف C^∞ وهو 1 - دوري ولا ينعدم.

2.2. من أجل $x \in \mathbb{R}$ ، نضع $h(x) = \dfrac{g(x)}{G(x)}$. برّر أنّ $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ وأنّ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(x+n) = 1$.

2.3. ماذا تستنتج؟

إرشاد:
1. بيّن أنّه في جوار كل $x \in \mathbb{R}$ ، المجموع متهي.
2.

2.1. نستنتج الإجابة من السؤال السابق.
2.3. نضع $\varphi = f \times h$.

تمرين 6.6

1. ليكن $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), a, b \in \mathbb{R}^n$. و $m \geqslant 0$ اثبت علاقة نشر تايلور بالباقي التكاملي:

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) + (m+1) \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^m \partial^\alpha f(a+t(b-a)) \mathrm{d}t.$$

2. ليكن $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ينعدم عند النقطة 0. بيّن أنّه توجد توابع $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ بحيث

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = x_1 g_1(x) + \ldots + x_n g_n(x).$$

3. عمم إلى الحالة أين f وكل مشتقاته الجزئية إلى الرتبة $m-1$ تنعدم عند 0.

إرشاد: إستعمل صيغة تايلور بالباقي التكاملي للتابع $g(t) = f(a+t(b-a))$.

تمرين 6.7

لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية أعداد عقدية. الهدف من هذا التمرين هو إثبات أنّه توجد توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ قابلة للإشتقاق لا نهائيا بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = a_n. \tag{6.1}$$

1. باستعمال تابع $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ يساوي 1 في جوار 0 ، بيّن أنّه توجد توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ من الصنف C^∞ تحقق (6.1) بحيث نصف قطر تقارب السلسلة الصحيحة $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n!}$ غير معدوم.
2. ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ سنده محتوى في $[-1,1]$ ويساوي 1 على $[-1/2, 1/2]$. نعرف متتالية α_n بـ $\alpha_n = 1$ إذا $|\alpha_n| \leqslant 1$ و $\alpha_n = |a_n|$ إذا $|a_n| > 1$. نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\alpha_n x), \;\; f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

2.1. تأكد أنّ f تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.
2.2. بيّن أنّ f من الصنف C^∞ واحسب $f^{(k)}(0)$.

3. هل يمكن الحصول على تابع يحقق نفس الخصائص إذ كان f صحيح؟

إرشاد:

1. اضرب السلسلة الصحيحة بتابع منبسط.
2.

2.1. اعتبر الحالتين $|x|\alpha_n \geqslant 1$ و $|x|\alpha_n \leqslant 1$.
2.2. استخدم التراجع على k.

3. لا! أنظر إلى شروط تزايد المعاملات.

تمرين 6.8

ليكن f تابعا معرفا على $]a,b[$ من الصنف C^1 بالقطع. ليكن $a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b$ تقسيما بحيث f قابل للتمديد إلى تابع من الصنف C^1 على كل متراص $[a_i,a_{i+1}]$. بيّن أنّه لدينا

$$(T_f)=T_{f'}+\sum_{i=1}^{n-1}(f(a_i+0)-f(a_i-0))\delta_{a_i},$$

حيث f' مشتق f بالمفهوم الكلاسيكي غير معرف عند النقاط a_i ، و $f(a_i\pm 0)$ هي النهايات يمين ويسار f عند a_i.

ارشاد: جزء التكامل واستعمل المكاملة بالتجزئة.

تمرين 6.9

اعط مثالا عن توزيع $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ وتابع $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\operatorname{Supp}T=\{0\}$ ، $\varphi(0)=0$ و $\langle T,\varphi\rangle\neq 0$. بصفة عامة، إذا $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ و $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، ما هي الشروط على T و ψ حتّى يكون $\langle T,\psi\rangle=0$ ؟ ما هي الشروط على $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ حتى يكون $\langle T,\psi_1\rangle=\langle T,\psi_2\rangle$ ؟

إرشاد: اعتبر مشتق توزيع ديراك عند 0.

تمرين 6.10

ليكن $T\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. بحيث $\operatorname{Supp}T=\{0\}$

1. برر أنّ T رتبته منتهية. فيما يلي نرمز لرتبة T بـ m.
2. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi(x)=o(x^m)$ في جوار 0 . ليكن ρ تابعا منبسطا يساوي 1 في جوار 0 ، و 0 خارج $]-1,1[$. نضع $\rho_r(x)=\rho(x/r)$.
   1.2. بيّن أنّه إذا كان $l\leqslant m$ ، فإنّ $\sup_{|x|\leqslant r}|(\rho_r\varphi)^{(l)}(x)|\xrightarrow{r\to 0}0$.
   2.2. استنتج أنّ $\langle T,\varphi\rangle=0$.
3. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. بيّن أنّ φ يكتب على الشكل

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k+\psi(x),$$

مع ψ تابع من الصنف C^∞ حيث $\psi(x)=o(x^m)$.

4. استنتج وجود أعداد عقدية $a_1,\ldots,a_m$ ، بحيث من أجل كل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ،

$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}a_k\varphi^{(k)}(0).$$

إرشاد:

1. حدد حامل T.
2. طبق علاقة ليبنتز.

تمرين 6.11

ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. نعرف

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k}(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0)).$$

1. اثبت أنّ T يعرف توزيعا رتبته أقل أو تساوي 1.
2. اثبت أنّ رتبة T لا تساوي 0. لذلك نذكر أنه إذا كانت $a < b < c < d$ حقيقية، يوجد $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ ، $\varphi = 1$ على $[b, c]$ وحامل φ محتوى في $[a, b]$.

إرشاد:

1. بيّن تقارب السلسلة بإستعمال متباينة التزايدات المتهية.
2. برهن بالخلف وإستعمل التابع المعطى بأخذ $a = 0$ ، $b = \dfrac{1}{n}$ ، $c = 1$ و $d = 2$.

تمرين 6.12

ليكن T الشكل الخطي المعرف على $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بـ $\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0)$.

1. بيّن أنّ T توزيع رتبته أقل أو تساوي 1.
2. نريد إثبات أنّ رتبة T لا تساوي 0.

1.2. من أجل $n \geqslant 1$ ، أعط مثالا لتابع f_n من الصنف C^∞ بحيث $f_n'(0) = n$ و $||f_n||_\infty = 1$.

2.2. استنتج أنّه من أجل كل $n \geqslant 1$ ، يوجد تابع $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ حامله في $[-1, 1]$ بحيث $\varphi_n'(0) = n$ و $||\varphi_n||_\infty \leqslant 1$.

3.2. ماذا تستنتج؟

إرشاد:

1.
2.

1.2. نكتب f_n على الشكل $f_n(x) = f(nx)$.

2.2. استودم تابعا منبسطا.

3.2. برهن بالتراجع.

تمرين 6.13

1. من أجل $-1 < \alpha < -1$ ، اثبت أنّه مهما يكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، لدينا:

$$\int_{\varepsilon} x^{\alpha}\varphi(x)\ \mathrm{d}x = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_{\varepsilon},$$

حيث A تتعلق بـ φ ولا تتعلق بـ ε ، و R_{ε} تؤول إلى نهاية لمّا $\varepsilon \to 0$.

2. نضع

$$\langle \mathrm{Pf}(x_+^{\alpha}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} R_{\varepsilon}.$$

اثبت أنّ $\mathrm{Pf}(x_+^{\alpha})$ توزيع رتبته أقل أو تساوي 1.

إرشاد: استعمل التعريف.

تمرين 6.14

1. اثبت أنّ الصيغة التّالية: من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\star})$:

$$\langle S, \varphi\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)$$

تعرف عنصرا من $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\star})$.

2. نريد اثبات أنّه لا يوجد توزيع $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ بحيث من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{\star})$ ، $\langle T, \varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle$. نبرهن بالتراجع ونفرض أنّ مثل هذا التوزيع T موجود.

1.2. اثبت أنّه من أجل كل متتالية عقدية $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ معطاة، يوجد تابع $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ حامله في $]3/4, 5/4[$ بحيث $f^{(j)}(1) = a_j$ مهما يكن j.

2.2. نضع $f_k(x) = f(k^2x - k + 1)$. اثبت أنّ حوامل f_k متقاطعة مثنى مثنى.

3.2. أحسب $f_p^{(n)}(1/n)$.

4.2. بأخذ $K = [0, 5/4]$ ، $\varphi_m = \sum_{p=1}^{m} f_p$ و $a_k = 1$ ، بيّن أنّ T لا يمكنه أن يكون مستمرا على $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

إرشاد:

.2

1.2. استعمل نظرية بورال.

2.2. قارن بين بداية حامل f_k ونهاية حامل f_{k+1} .

3.2. نضع $p = n$ ثم نستعمل كون الحوامل منفصلة.

تمرين 6.15

اثبت أنّ الشكل الخطي T المعرف من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بـ:

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n)$$

عنصر من $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. هل رتبته متهية؟
إرشاد:
1. بيّن أنّ السلسلة عبارة عن مجموع منته.
2. يمكن البرهان بالخلف، ونضع $\varphi(x) = \psi(\lambda(x-(m+1)))$ ، حيث $\psi(x) = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$ ، حيث ψ_0 تابع من $\mathcal{D}(]-1/2,1/2[)$ يساوي 1 على $[-1/4,1/4]$ و $\lambda > 1$.

تمرين 6.16

حدد في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ نهايات متتاليات التوزيعات التالية:
1. $T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$ ،
2. $T_n = n^2(\delta_{1/n} + \delta_{-1/n} - 2\delta)$.

إرشاد: استعمل نشرا محدودا لـ φ.

تمرين 6.17

لتكن $(f_j)_{j\geqslant 1}$ متتالية توابع من $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\operatorname{Supp} f_j \subset B(0,\varepsilon_j)$ مع $\varepsilon_j \to 0$ ، $f_j \geqslant 0$ و $\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\ \mathrm{d}x = 1$. اثبت أنّ $f_j \to \delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

إرشاد: ارجع إلى التعريف واكتب $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0) f_j(x)\mathrm{d}x$.

تمرين 6.18

1. ليكن g تابعا من الصنف C^1 على المجال $[a,b]$.
اثبت أنّ $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \cos(\lambda x) g(x)\ \mathrm{d}x = 0$.
2. ليكن T_n التوزيع المرفق لـ $\sin^2(nx)$. ادرس التقارب في $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ للمتتالية (T_n).
3. ليكن S_n التوزيع المرفق لـ $n\sin(nx)$ ، حيث H تابع هيفيسايد. ادرس التقارب في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ للمتتالية (S_n).

إرشاد:
1. استعمل المكاملة بالتجزئة.
2. استعمال السؤال 1 باستخدام عبارة مثلثية.
3. استعمال المكاملة بالتجزئة للعودة إلى السؤال 1.

تمرين 6.19

ليكن T_n التوزيع المرفق للتابع $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\pi t}$. اثبت أنّ T_n تتقارب نحو δ.

إرشاد:
نذكر أنّ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$ ، ويمكن كتبة كل تابع إختباري φ على الشكل $\varphi(t)=\varphi(0)+t\psi(t)$ ، حيث $\psi\in C^\infty$.

تمرين 6.20
ليكن F_n تابعا كمولا محليا معرفا بـ:

$$F_n(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt},$$

وليكن T_n التوزيع المرفق لـ F_n. الهدف من التمرين هو تحديد نهاية T_n بمفهوم التوزيعات.

1. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ تابعا حامله في $[-(2M+1)\pi,(2M+1)\pi]$. اثبت أنّ

$$\langle T_n,\varphi\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

حيث $\varphi(t)=\sum_{n=-M}^{M}\varphi(t+2n\pi)$.

2. اثبت أنّ T_n متقاربة نحو $\sum_{p\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi p}$.

إرشاد:
1. يمكن تبسيط السلسلة (سلسلة هندسية)، ثم تجزئة التكامل إلى $2M+1$ تكامل طوله 2π ، وتبديل المتغير للرجوع إلى المجال $[-\pi,\pi]$.
2. نكتب φ على الشكل $\varphi(t)=\varphi(0)+t\psi(t)$ ، حيث $\psi\in C^\infty$ ، وإستعمال نظرية ريمان - لوبيغ.

تمرين 6.21
1. بيّن أنّ $x.\mathrm{vp}\frac{1}{x}=1$.
2. ليكن $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ بحيث $xu=0$.

1.2. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi(0)\neq 0$. اثبت أنّه يوجد ثابت C_φ بحيث من أجل كل تابع $\eta\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ يساوي 1 على حامل φ ، لدينا

$$C_\varphi=\langle u,\eta\rangle.$$

2.2. اثبت أنّه أذا كان φ و ψ تابعين من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi(0)\neq 0$ و $\psi(0)\neq 0$ ، فإنّ $C_\varphi=C_\psi$.

3.2. استنتج كل حلول $xu=0$.

3. حل المعادلة $xu=1$.

4. ليكن $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. اثبت أنّه $(Sinx)T = 0$ إذا وفقط إذا توجد متتالية (c_n) بحيث $T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{n\pi}$.

إرشاد:
1. طبق التعريف.
2. أكتب التابع الإختباري على الشكل $\varphi(t) = \varphi(0)\eta + t\psi(t)$.
3. أكتب $1 = x\mathrm{vp}\frac{1}{x}$.
4. العمل في جوار النقاط $n\pi$ ، ثم اللّصق بإستعمال نظرية تجزئة الوحدة.

تمرين 6.22
نذكر أنّ التوزيعات $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ التي تحقق $xT = 0$ من الشكل $c\delta,\ c \in \mathbb{R}$.
1. من أجل كل $k \geqslant 0$ ، حل المعادلة $xT = \delta^{(k)}$.
2. حل المعادلة $x^2T = \delta$.
3. من أجل كل $n \geqslant 1$ ، حل المعادلة $x^nT = \delta$.

إرشاد:
1. عيّن حلا خاصا من الشكل $c\delta^{(k+1)}$.
2. اكتب $x^2T = \delta \Leftrightarrow x(xT) = \delta$ وإستعمل مرتين النتيجة السابقة.
3. بيّن بالتراجع أنّ الحلول هي التوزيعات

$$T = \frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)} + c_{n-1}\delta^{(n-1)} + \ldots + c_0\delta,$$

حيث $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$.

تمرين 6.23
1. حل في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ المعادلة $T' = 0$.
2. استنتج كل حلول المعادلة التفاضلية $T' - aT = 0$ ، حيث $a \in \mathbb{R}$.
3. حل المعادلة التفاضلية $T' + T = H$ ، حيث H تابع هيفيسايد.

إرشاد:
1. يمكن إستعمال أنّه إذا كان φ_0 تابعا من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ يحقق $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1$ ، من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، يوجد $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ وحيد ويوجد $c \in \mathbb{R}$ وحيد بحيث $\varphi = \psi' + c\varphi_0$.
2. طبق طريقة حل معادلة تفاضلية خطية مجهولها تابع.
3. ابحث عن حل خاص من الشكل fH.

تمرين 6،24

1. اثبت أنّه إذا كانت (φ_k) متتالية من $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ متقاربة في $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ نحو $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ، فهي متقاربة كذلك في $S(\mathbb{R}^n)$.
2. أعط متتالية توابع (f_n) من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ متقاربة نحو 0 في $S(\mathbb{R})$ وغير متقاربة في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

إرشاد:

2. فكر في إنشاء متتالية حواملها غير محدودة.

تمرين 6،25

ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ تابعا كمولا محليا، وليكن S التوزيع المرفق له.

1. نفرض أنّه يوجد $p \geqslant 0$ بحيث

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^p} < +\infty.$$

اثبت أنّ S توزيع معتدل.

2.

1.2. احسب $g'(x)$ ، حيث $g(x) = x^m \sin(\exp x)$.

2.2. اثبت أنّه إذا كان S التوزيع المعتدل المرفق للتابع $f(x) = x^m \exp(x) \cos(\exp x)$ ، $m \geqslant 1$ ، فإنّ S معتدل. ماذا عن الإستلزام العكسي؟

3.

1.3. ليكن $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\psi = 1$ على $[-1,1]$ ، 0 خارج $[-2,2]$ ، $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. من أجل $r \geqslant 1$ ، نضع $\varphi_r(x) = \psi(x/r)$. اثبت أنّه من أجل كل $\alpha, k \geqslant 0$ يوجد ثابت $c > 0$ بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، من أجل كل $r \geqslant 1$ ، لدينا:

$$(1+|x|)^k |\varphi_r^{(\alpha)}(x)| \leqslant c(1+r)^k.$$

1.3. نفرض الآن أنّ f موجب وأنّ S توزيع معتدل. اثبت أنّ الإستلزام العكسي للسؤال 1 صحيح.

إرشاد:

بالنسبة للسؤال 2 ، نبدء بالحالة $m = 1$ بالمكاملة بالتجزئة.

تمرين 6،26

1. ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ تابعا كمولا بحيث $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = 1$. نضع من أجل $n \geqslant 1$ ، $f_n(t) = nf(nt)$. اثبت أنّ $f_n \to \delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. استنتج من السؤال السابق أنّه توجد متتالية كثيرات حدود (P_n) بحيث $P_n \to \delta$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. اثبت أنّه لا توجد متتالية كثيرات حدود تتقارب نحو δ في $S'(\mathbb{R})$.

إرشاد:
1. استعمل نظرية التقارب بالهيمنة.
2. استعمل نظرية وايشتراص.
3. يمكن البرهان بالخلف، وإثبات أنّ درجة كثيرات حدود هذه المتتالية تؤول إلى ما لا نهاية.

تمرين 6.27
1. اثبت أنّ التوزيع $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ توزيع معتدل.
2. احسب تحويله لفوريي.
3. استنتج توزيعا T بحيث $\widehat{T} = H$ ، مع H تابع هيفيسايد.

إرشاد:
1. لاحظ أنّه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، لدينا

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\ \mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x.$$

2. يمكن إستعمال أنّه من أجل كل $\varphi \in S(\mathbb{R})$ ، لدينا:

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(w)-\phi(-w)}{w}\mathrm{d}w.$$

3. لاحظ أنّ $H(x) = \dfrac{1+\mathrm{sgn}(x)}{2}$.

تمرين 6.28
1. ليكن $\alpha > 0$. احسب في $S'(\mathbb{R})$ نهاية التوزيع $\dfrac{1}{x+i\alpha\varepsilon}$ لمّا $\varepsilon \to 0^+$.
2. احسب تحويل فوريي للتابع $H(x)e^{-\lambda x}$ ، حيث $\lambda > 0$ و H تابع هيفيسايد.
3. استنتج تحويل فوريي لـ H.
4. استنتج تحويل فوريي لـ $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$.

إرشاد:
1. لاحظ أنّ هنالك مشكلة عند 0 ، ومنه نكتب

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x+i\alpha\varepsilon}\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\phi(x)}{x+i\alpha\varepsilon}\ \mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\phi(x)}{x+i\alpha\varepsilon}\ \mathrm{d}x.$$

2. نطبق قاعدة حساب تحويل فوريي لتابع L^1.

3. لاحظ أنّه لمّا $\lambda \to 0$ ، حسب نظرية التقارب بالهيمنة لدينا التقارب في $S'(\mathbb{R})$ للتوزيع $H(x)e^{-\lambda x}$ نحو H واستعمل إستمرار تحويل فوريي.
4. طبق تحويل فوريي على العبارة المتحصل عليها في 3 .

باب 7

تمارين غير محلولة

تمرين 7.1

اثبت أنّه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يمكن إنشاء تابعا $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & : |x| < \dfrac{1}{2-\varepsilon}, \\ 0 & : |x| \geqslant \dfrac{2}{1-\varepsilon}. \end{cases}$$

تمرين 7.2

ليكن φ تابعا إختباريا كيفيا. هل التابع f المعرف بـ $f(\varphi) = \int_0^1 |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$ يعرف توزيعا؟ لماذا؟

تمرين 7.3

هل يمكن أن نرفق لكل تابع من التوابع التالية، توزيعا على $\mathbb{R}$ ؟

$f_1(x) = e^x$ ، $f_2(x) = |x|$ ، $f_3(x) = \sqrt{|x|}$ ، $f_4(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ ، $f_5(x) = \ln|x|$ ، $f_6(x) = x^{-1/3}$ ، $f_7(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ ، $f_8(x) = \dfrac{1}{x}$ ، $f_9(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

تمرين 7.4

اثبت أنّه من أجل كل $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، كل من:

$\langle S, \phi\rangle = \phi(0) + 3\phi''(4) - \phi'''(\pi)$ و $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi^{(n)}(n)$ تعرف توزيعات على $\mathbb{R}$.

تمرين 7.5

اثبت أنّه إذا كان $f \in L^1(\Omega)$ ذا سند متراص وإذا كان T_f التوزيع المرفق له والمعرف بـ:

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi \ \mathrm{d}x, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

فإنّه لدينا $\operatorname{Supp} T_f \subseteq \operatorname{Supp} f$.

تمرين 7.6

ليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ و $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. اثبت أنّ φT ذا سند متراص، واستنتج أنّ T هو نهاية توزيع ذا سند متراص.

تمرين 7.7

عرف إستلزاما بين القضيتين التاليتين:

(1) التوزيع T ذو سند متراص.

(2) التوزيع T ذو رتبة متهية.

تمرين 7.8

هل العبارات التّالية تعرف أشكالا خطية على $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ؟ هل هي تنتمي إلى $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ؟

1. $\varphi \mapsto |\varphi(0)|$.
2. $\varphi \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{d}x$.
3. $\varphi \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. $\varphi \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^{-n}\varphi\left(1-\frac{1}{n}\right)$.
5. $\varphi \mapsto a \ \ (a\in\mathbb{C})$.
6. $\varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \varphi(x)\ \mathrm{d}x \ \ (\alpha\in\mathbb{R})$.
7. $\varphi \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\varphi(n)$.
8. $\varphi \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(0)$.

تمرين 7.9

ليكن f تابعا معرفا موجبا وكمولا على $\mathbb{R}$.

1. اثبت أنّ

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right)\varphi(0).$$

2. من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نرمز بـ f_n للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f_n(t) = ne^{-n|t|}.$$

ـ اثبت أنّ f_n يعرف توزيعا T_{f_n}.

ـ اثبت أنّ $\lim_{n\to+\infty} T_n = 2\delta$.

تمرين 7.10

1. نعرف نظيرة لتابع f على $\mathbb{R}$ بالتابع f_δ حيث $f_\delta(x) = f(-x)$. ليكن $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. نعرف التوزيع T_δ بـ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_\delta, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_\delta\rangle.$$

أ ـ تحقق أنّ T_δ ينتمي إلى $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ب ـ اثبت أنّه إذا كان f كمول محليا على $\mathbb{R}$ ، فإنّ $(T_f)_\delta = T_{f_\delta}$.

جـ ـ كيف نعرف توزيعا زوجيا؟ فرديا؟

2. نعرف إنسحاب تابع f معرف على $\mathbb{R}$ بالتابع $\tau_a f$ $(a \in \mathbb{R})$ **بحيث**: $\tau_a f(x) = f(x-a)$.
نعرف إنسحاب توزيع $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ بـ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle.$$

أ ـ تحقق أنّ $\tau_a T$ ينتمي إلى $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ب ـ اثبت أنّه إذا كان f كمولا محليا على $\mathbb{R}$ ، فإنّ: $\tau_a T_f = T_{\tau_a f}$.

جـ ـ كيف نعرف توزيعا دوريا دوره a ؟

3. اثبت أنّ: $\delta_a = \tau_a\delta$.

4. من أجل $a > 0$ ، نعرف Π_a على $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بـ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \ \Pi_a(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(na).$$

اثبت أنّ Π_a توزيع على $\mathbb{R}$ ، زوجي، دوري دوره a.

تمرين 7.11

.1

أ ـ ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ **بحيث** $\varphi(0) = a$.

اثبت أنّ: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x\int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t$. استنتج أنّه يوجد $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ **بحيث**: $\varphi = x\psi$.

ب ـ ليكن $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ **بحيث** $\varphi_0(0) = 1$. اثبت أنّ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \exists\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \varphi = \varphi(0)\varphi_0 + x\psi,$$

وتحقق أنّ $\varphi \mapsto \psi$ يعرف تطبيقا خطيا من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ في نفسه.

2. ليكن T توزيعا على $\mathbb{R}$.

أ ـ نفرض أنّ: $xT = 0$.

اثبت أنّه يوجد ثابت c بحيث: $T = c\delta$.

ب ـ استنتج أنّه إذا كان $(x-a)T = 0$ ، فإنّه يوجد ثابت α بحيث: $T = \alpha\delta_a$.

جـ ـ نفرض أنّه يوجد a و b حقيقيين مختلفين بحيث: $(x-a)(x-b)T = 0$.

اثبت أنّه يوجد ثابتين α و β بحيث: $T = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$.

3. ليكن S توزيعا على $\mathbb{R}$.

باستخدام السؤال 1. ب، اوجد توزيعا T_0 بحيث: $xT_0 = S$.

استنتج الصيغة العامة لتوزيع T يحقق : $xT = S$.

تمرين 7.12

اثبت أنّ التابع $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ يعرف توزيعا T على $\mathbb{R}^2$.

تمرين 7.13

اثبت الإستلزام التّالي:

$$f_n \to f \text{ في } L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Leftarrow T_{f_n} \to T_f \text{ في } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

تمرين 7.14

ليكن f و g تابعين مستمرين على $\mathbb{R}$.

اثبت أنّه إذا كان $T_f = T_g$ فإنّ $f = g$.

تمرين 7.15

لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ متتالية حقيقية. نعتبر الشكل الخطي المعرف على $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بـ:

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\langle\delta_n, \varphi\rangle,$$

حيث δ_n هو توزيع ديراك عند النقطة n.

اثبت أنّ T معرف جيدا على $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ وهو توزيع.

تمرين 7.16

نضع من أجل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ،

$$\langle T_{1/x},\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x\right].$$

1. اثبت أنّ هذا التكامل موجود.
2. نضع

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x},\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x\right].$$

اثبت أنّ $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ توزيع.

تمرين 7.17

من أجل كل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ ، نضع

$$\langle T,\varphi\rangle=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}\varphi(\sin(xy))\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. اثبت أنّ T توزيع على $\mathbb{R}^2$.
2. ماهو حامل T ؟

تمرين 7.18

1. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث $\operatorname{Supp}\varphi\subset]1,2[$ ، $0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$ و $\varphi(x)=1$ من أجل $a\leqslant x\leqslant b$ مع $1<a<b<2$. نضع من أجل $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\varphi_n(x)=e^{-n}\varphi(nx).$$

اثبت أنّ φ_n تتقارب نحو 0 في $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2. اثبت أنّه لا يوجد توزيعا $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ بحيث

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

تمرين 7.19

احسب بمفهوم التوزيعات مشتق الدالة المستطيلية Π.

تمرين 7.20

1. ليكن $p,q\in\mathbb{N}$. احسب $f=x^p\delta^{(q)}$ حيث $\delta^{(k)}$ المشتق من الرتبة k لتوزيع ديراك على $\mathbb{R}$.
2. ليكن $\alpha\in\mathbb{C}$ و $k\in\mathbb{N}$. احسب $f=e^{\alpha x}\delta^{(k)}$.

تمرين 7.21
عرف التوزيع المرفق للتابع $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda x$ حث $\lambda \neq 0$ ، ثم احسب مشتقه بمفهوم التوزيعات.

تمرين 7.22
احسب بمفهوم التوزيعات المشتق الأول والثاني لـ $|x|$ وكذلك المشتق من الرتبة n.

تمرين 7.23
احسب بمفهوم التوزيعات المشتقات $1, 2, 3, 4$ للتوزيعات $T = |x| \sin x$ و $T = |x| \cos x$.

تمرين 7.24
تحقق أنّ كل تابع من التوابع f التالية تعرف توزيعا. ومن أجل كل f احسب $\frac{d}{dx}T_f$ و $\frac{d^2T_f}{dx^2}$.

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x & : -\pi < x < \pi \\ 0 & : \text{وإلّا.} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \cos x & : -\pi < x < \pi \\ 0 & : \text{وإلّا.} \end{cases}$
3. $f(x) = e^{-|x|}$.
4. $f(x) = E[x]$ الجزء الصحيح لـ x. (أي أنّه إذا كان $x \in [n, n+1[$ ، $n \in \mathbb{Z}$ فإنّ $E[a] = n$.

تمرين 7.25
1. احسب بمفهوم التوزيعات المشتقات الأولى والثانية للتوزيع $x \mapsto |x|$.
2. نعتبر التّابع $x \mapsto |x| \cos x$.

أ) اثبت أنّه يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$.

ب) احسب المشتقات الأولى والثانية لهذا التوزيع.

تمرين 7.26
ليكن p و q عددين طبيعيين بحيث $p \geqslant q$. احسب $x^p\delta^{(q)}$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ،

تمرين 7.27
نعتبر التابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ المعرف بـ $f(x,y) = H(x)H(y)$ حيث H هو تابع هيفيسايد.
احسب $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ بمفهوم التوزيعات على $\mathbb{R}^2$.

تمرين 7.28

من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نعرف التابع $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ بـ:

$$f_n(x) = \ln|x| \text{ إذا } |x| \geqslant \frac{1}{n}, \quad f_n(x) = -\ln n \text{ إذا } |x| < \frac{1}{n}.$$

نضع: $f(x) = \ln|x|$.

1. اثبت أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، f_n كمول محليا، و f كذلك.
2. اثبت أنّ المتتالية (f_n) تتقارب نحو f في $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

نرمز بـ T_n و T للتوزيعات المرفقة بـ f_n و f على التوالي.

3. اثبت أنّ $T' = \mathrm{vp}\frac{1}{x}$.
4. اثبت أنّ $x.\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$ بمفهوم التوزيعات.
5. هل يوجد $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ بحيث: $\mathrm{vp}\frac{1}{x} = T_g$ ؟

تمرين 7.29

احسب بمفهوم التويعات:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) H(x)e^{\lambda x} \text{ و}, \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + w^2\right) \frac{H(x)\sin(wx)}{w}, \text{من أجل كل طبيعي } m \geqslant 1 : \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\frac{H(x)x^{m-1}}{(m-1)!}$$

تمرين 7.30

احسب بمفهوم التوزيعات: $x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\ln|x|$.

تمرين 7.31

1. نضع $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) = -(\mathrm{vp}\frac{1}{x})'$. اثبت أنّ:

$$\begin{aligned}
\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}, \phi\rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi'(x) - \phi'(-x)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\phi'(x) - \phi'(-x)}{x}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\phi''(x)\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

2. اثبت أنّ $x^2\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$.

تمرين 7.32

اثبت أنّ التابع f المعرف بـ $f(x)=0$ لما $x<0$ و $\sqrt{x}$ لما $x>0$ ، يعرف توزيعا. احسب مشتقه الأول بمفهوم التوزيعات.

تمرين 7.33

اثبت أنّ التابع f المعرف بـ $f(x)=0$ لما $x<0$ و $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ لما $x>0$ ، يعرف توزيعا. احسب مشتقه الأول بمفهوم التوزيعات.

تمرين 7.34

ما هي قيم العدد الحقيقي α الذي من أجلها يعرف التابع $f(x)=x^{\alpha-1}e^{-x}$ من أجل $x>0$ ، 0 من أجل $x<0$ يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$. احسب مشتقه بمفهوم التوزيعات.

تمرين 7.35

ماهي النهايات في $\mathcal{D}'$ للمتتاليتين التّاليتين: $f_k(x)=\dfrac{k}{\pi(kx^2+1)}$ و $g_k(x)=\dfrac{\sin(\pi kx)}{\pi x)}$ ؟

تمرين 7.36

ما هي النهايات بمفهوم التوزيعات لمتتاليات التوابع التالية:

$$f_n(x)=\frac{1}{\left(1+\dfrac{x^2}{2n}\right)^n},\ g_n(x)=\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^n \text{ إذا } |x|<\sqrt{2n} \text{ وإلّا } 0,\ h_n(x)=\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

وماهي نهاية متتلية التوزيعات $T_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\exp(\dfrac{k^2}{2n^2})\delta_{(k/n)}$.

تمرين 7.37

ما هي النهايات في $\mathcal{D}'$ لما $h\to 0$ للتوزيعات التالية:

$$\frac{\delta_{(h)}-\delta_{(-h)}}{2h},\ \ \frac{\delta_{(2h)}+\delta_{(-2h)}-2\delta}{4h^2},\ \ \frac{1}{(2h)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.C_n^k\delta_{((n-2k)h)}.$$

تمرين 7.38

اثبت أنّ

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\delta,\ \ \lim_{\varepsilon\to0^+}-\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2},\ \ \lim_{t\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}=\delta.$$

تمرين 7.39

اثبت أنّه لدينا بمفهوم التوزيعات:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}=\mathrm{vp}\frac{1}{x},\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\varepsilon}=\mathrm{vp}\frac{1}{x}-i\pi\delta.$$

تمرين 7.40

1. اوجد النهايات بمفهوم التوزيعات لـ $\cos(nx),\sin(nx),e^{inx}$.
2. استنتج أنّ $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\nu x)}{x}=\delta$ بمفهوم التوزيعات.
3. اثبت أنّ

$$\langle \mathrm{vp}\frac{\cos(\nu x)}{x},\varphi\rangle=\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\nu x)}{x}\varphi(x)\ \mathrm{d}x,$$

يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ من أجل كل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، وأنّ $\lim_{\nu\to+\infty}\mathrm{vp}\frac{\cos\nu x}{x}=0$.

تمرين 7.41

احسب نهايات التوزيعات المعرفة على $\mathbb{R}$ التالية:

1. $x\mapsto\sin(nx)$.
2. $x\mapsto n\sin(nx)H(x)$.
3. $x\mapsto\frac{n}{1+n^2x^2}$.

تمرين 7.42

اوجد بمفهوم التوزيعات نهاية نواة ديريكلي $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$.

تمرين 7.43

اثبت أنّه بمفهوم التوزيعات، لدينا:

1. $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)\right)=\delta$.
2. $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\delta_\varepsilon(x)=\delta$ ، حيث $\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon} & :|x|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\\ 0 & :|x|>\frac{\varepsilon}{2}.\end{cases}$
3. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}\right)=\delta$.
4. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos nx}{nx^2}\right)=\delta$.

تمرين 7.44
حل في $\mathcal{D}'$ المعادلات التّالية:

$$u' + xu = \delta,\ \ u' + u = H,\ \ u' + e^{-x}u = \delta'.$$

تمرين 7.45
اوجد توزيعا $F(t) = H(t)f(t)$ حيث H تابع هيفيسايد و f تابع من الصنف C^2 ، يحقق المعادلة التالية بمفهوم التوزيعات:

$$a\frac{d^2F}{dt^2} + b\frac{dF}{dt} + cF = m\delta + n\delta',$$

مع a, b, c, m, n ثوابت معطاة.
حالات خاصة:
- $a = c = 1$ ، $b = 2$ ، $m = n = 1$ ؛
- $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = 4$ ، $m = 1$ ، $n = 0$ ؛
- $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -4$ ، $m = 2$ ، $n = 1$.

تمرين 7.46
في المستوي (x, y) ، نسمي تابع هيفيسايد التابع $H(x, y)$ الذي يساوي 1 إذا $x > 0$ و $y > 0$ ، وإلا 0. اثبت أنّه لدينا بمفهوم التوزيعات

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \delta_{(0,0)}.$$

تمرين 7.47
ليكن في المستوي، التوزيع T الذي يساوي 1 على $[a, b] \times [c, d]$ وإلا 0.
احسب $\frac{\partial T}{\partial x}$ ، $\frac{\partial T}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.

تمرين 7.48
في المستوي (x, t) ، نضع $E(x, t) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$.
احسب بمفهوم التوزيعات: $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial E}{\partial t}$.

تمرين 7.49
1. ليكن $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ و $y \in \mathbb{R}$ مثبت. من أجل $h \neq 0$ ، نضع $g_h(x) = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$. اثبت أنّ g تتقارب في $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ نحو $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. اثبت أنّ التابع $F(y) = \langle T_x, f(x,y)\rangle$ من الصنف C^∞. احسب $F^{(n)}(y)$.

3. نفرض أنّ $\langle T, x^n\rangle = 0$ وليكن G بحيث $\widehat{T} = T_G$. ماذا يساوي $G^{(n)}(0)$ ؟ استنتج أنّ T معدوم.

تمرين 7.50

اثبت أنّ:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda e^{-\lambda x} H(x) = \delta, \quad \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda e^{-\lambda x} H(x) = 0.$$

تمرين 7.51

ليكن $\Omega \in]0,1[$. اثبت أنّ التابع x^α يقبل الإشتقاق بمفهوم التوزيعات في $L^2(\Omega)$ إذا وفقط إذا $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

تمرين 7.52

ليكن Ω مفتوحا محدودا. اثبت أنّ كل تابع مستمر على $\overline{\Omega}$ و C^1 بالقطع، هو قابل للإشتقاق بمفهوم التوزيعات في $L^2(\Omega)$.

تمرين 7.53

ليكن Ω مفتوحا محدودا. اثبت أنّ كل تابع C^1 بالقطع وليس مستمرا، غير قابل للإشتقاق بمفهوم التوزيعات في $L^2(\Omega)$.

تمرين 7.54

اثبت أنّ كل تابع مستمر، C^1 بالقطع ذا سند محدود في $\overline{\Omega}$ ، ينتمي إلى $H^1(\Omega)$.

تمرين 7.55

لتكن B كرة الوحدة المفتوحة في $\mathbb{R}^n$.

1. إذا كان $n = 2$ ، اثبت أنّ التابع $u(x) = |\ln(|x/2|)|^\alpha$ ينتمي إلى $H^1(B)$ من أجل $0 < \alpha < 1/2$ ، لكنه غيرمحدود في جوار 0.

2. إذا كان $n \geqslant 3$ ، اثبر أنّ التابع $u(x) = |x|^{-\beta}$ ينتمي إلى $H^1(B)$ من أجل $0 < \beta < (n-1)/2$ ، لكن غير محدود في جوار 0.

تمرين 7.56

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ وليكن $u, v \in H^1(\mathbb{R})$.

1. اثبت أنّ $uv \in H^1(\mathbb{R})$ وأنّ

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

2. استنتج أنّه من أجل كل $x, y \in I$ ،

$$\int_x^y u'(t)v(t)\mathrm{d}t = -\int_x^y u(t)v'(t)\mathrm{d}t + [uv]_x^y.$$

تمرين 7.57

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ ، $u \in H^1(I)$ و $G \in C^1(\mathbb{R})$. إذا كان I غير محدود، نضع $G(0) = 0$.

1. اثبت أنّه يوجد $C > 0$ بحيث $|G \circ u| \leqslant |G(0)| + c|u|$.
2. استنتج أنّ $G \circ u \in H^1(I)$ وأنّ $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$.

تمرين 7.58

نضع $I =]0, 1[$. نعرف الفضاء

$$H^2(I) = \{u \in H^1(I), u' \in H^1(I)\}.$$

اثبت أنّ $H^2(I)$ مزودا بالجداء السلمي

$$\langle u, v\rangle_{H^2} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u', v'\rangle_{L^2} + \langle u'', v''\rangle_{L^2},$$

هو فضاء هيلبرتي.

تمرين 7.59

ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا من الصنف C^1 و 2π ـ دوري. نفرض أنّ $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$. اثبت أنّ

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

في أيّ حالة تكون لدينا المساواة؟

تمرين 7.60

1. ليكن $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التابع المعرف بـ:

$$\begin{cases} 0 & : x \leqslant -1, \\ 1+x & : -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1-x & : 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & : 1 \leqslant x. \end{cases}$$

اثبت أنّ $u \in H^1(\mathbb{R})$. اثبت أنّ التابع $v = 1-u$ ينتمي إلى $H^1([-2,2])$ لكنه لا ينتمي إلى $H^1(\mathbb{R})$.

2. اثبت أنّه لدينا الإحتواء $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ من أجل كل مفتوح محدود $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

بصفة عامة، بيّن أنّه إذا كان $u \in C^1(\Omega)$ وإذا كان $u, \partial_j u \in L^2(\Omega),\ 1 \leqslant j \leqslant n$ ، فإنّ $u \in H^1(\Omega)$.

3. ليكن $[a,b]$ مجالا من $\mathbb{R}$. اثبت أنّ $H^1(]a,b[)$ منغمس في $C^0([a,b])$.

4. ليكن $0 < a < 1$ معطى. نضع $\Omega = B(0,a) \subset \mathbb{R}^2$. من أجل $k > 0$ نعرف التابع $u : \Omega \backslash (0,0) \to \mathbb{R}$ بـ

$$u(x,y) = (-\ln\sqrt{x^2+y^2})^k.$$

اثبت أنّ التابع u ينتمي إلى L^2 من أجل كل $k > 0$ وأنّه لا يقبل ممثلا مستمرا على Ω. اثبت أنّ $u \in H^1(\Omega)$ إذا كان $k < 1/2$.

5. استنتج مما سبق أنّ $H^1(\Omega) \nsubseteq C^0(\Omega)$.

تمرين 7.61

1. اثبت أنّ $H_0^1(]a,b[) \subsetneq H^1(]a,b[)$.
2. ليكن $u \in H^1(\Omega)$ و $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. اثبت أنّ $fu \in H_0^1(\Omega)$.

تمرين 7.62

ليكن Ω مفتوحا محدودا من $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ وليكن $u \in H_0^1(\Omega)$.

1. اثبت أنّه من أجل كل $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ، لدينا:

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\nabla\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

2. نذكر أنّ $H_0^1(\Omega)$ هو فضاء شعاعي جزئي مغلق من $H^1(\Omega)$. ومنه هو فضاء هيلبرتي مزودا بنظيم $H^1(\Omega)$. نرمز بـ $H^{-1}(\Omega)$ للثنوي الطوبولوجي لـ $H_0^1(\Omega)$. استنتج من السؤال السابق أنّ $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (أي أنّ Δu الذي هو عنصر من $\mathcal{D}'(\Omega)$ يمدد بطريقة وحيدة إلى عنصر من $H^{-1}(\Omega)$ نرمز له بـ Δu)، وأنّه لدينا

$$||\Delta u||_{H^{-1}(\Omega)} = ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

تمرين 7.63

ليكن Ω مفتوحا محدودا من $\mathbb{R}^n$ ، $n \geqslant 1$ ، و M و N مصفوفتين $n \times n$ مداخلها في $L^\infty(\Omega)$.
نفرض أنّه يوجد $\alpha > 0$ بحيث من أجل كل $x \in \Omega$ وكل $\xi \in \mathbb{R}^n$ ، لدينا:

$$M(x)\xi \cdot \xi \geqslant \alpha|\xi|^2 \text{ و } N(x)\xi \cdot \xi \geqslant \alpha|\xi|^2.$$

1. ليكن $f \in L^2(\Omega)$. اثبت أنّه يوجد u وحيد بحيث

$$(7.1) \quad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega N(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \ \mathrm{d}x = \int_\Omega (M(x)+N(x))\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) \ \mathrm{d}x, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

حيث w يحقق:

$$(7.2) \qquad \begin{cases} w \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega M(x)\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) \ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x) \ \mathrm{d}x, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

في كل ما يلي، نرمز بـ $T(f)$ للحل الوحيد لـ (7.1) مع w حلا لـ (7.2).

2. اثبت أنّ T تطبيق خطي متراص من $L^2(\Omega)$ في نفسه (أي أنّ T خطي، مستمر وصورة كل جزء محدود من $L^2(\Omega)$ بـ f هو جزء متراص محليا في $L^2(\Omega)$).
3. نفرض في هذا السؤال أنّه يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $M = \lambda N$. اثبت أنّه توجد مصفوفة A تتعلق فقط بـ M و λ بحيث $u = T(f)$ ،

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x) \ \mathrm{d}x, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

أعط عبارة A بدلالة M و λ.

4. نفرض في هذا السؤال أنّ $n = 2$ و $1 < p \leqslant +\infty$. اثبت أنّه من أجل كل $f \in L^p(\Omega)$ ، يوجد حل وحيد u لـ (7.1) مع w حل لـ (7.2).

تمرين 7.64

ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ وليكن $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. نفرض أنّ $T' \in L^2(\Omega)$. هل $T \in H^1(\Omega)$ ؟

تمرين 7.65

1. احسب تحويل فوريي للتابع المثلثي:

$$f(x)=\begin{cases}1+x & : -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x & : 0\leqslant x<1,\\ 0 & : x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.\end{cases}$$

2. استنتج قيمة التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

تمرين 7.66

من أجل $\alpha>0$ ، نضع $f(x)=e^{-\alpha|x|}$.

1. احسب تحويل فوريي لـ f.
2. استنتج تحويل فوريي للتابع $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$.
3. احسب $f\star f$ ثم احسب تحويل فوريي للتابع $x\mapsto\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. احسب تحويل فوريي للتابع $x\mapsto\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

تمرين 7.67

ليكن $\varphi\in S(\mathbb{R})$ يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ ، بحيث $\int_{\mathbb{R}}\varphi^2(t)\mathrm{d}t=1$.

1. اثبت أنّ

$$2\int_{\mathbb{R}}t\varphi'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=-1.$$

تمرين 7.68

احسب تحويل فوريي للتوزيع المعتدل $T=c$ ثابت.

تمرين 7.69

احسب تحويل فوريي للتوزيعات المعتدلة في $\mathbb{R}$ التالية:

1. δ_a ،
2. $e^{iax}(a\in\mathbb{R})$ ،
3. $\sin(x),\sin^2(x)$ ،
4. $x\sin x$ ،
5. $\frac{\sin x}{x}$ ،
6. $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ ،
7. H .

تمرين 7.70
ليكن $T \in S'(\mathbb{R})$. اثبت الخواص التالية:

$$F\tau_a(T)(\nu) = e^{-ia\nu} FT(\nu),$$
$$F(e^{iax}T(x)) = \tau_a FT(\nu),$$
$$F(xT(x))(\nu) = i(FT)'(\nu),$$
$$F(T'(x))(\nu) = i\nu FT(\nu).$$

تمرين 7.71
هل يمكن حساب تحويل فوريي لتابع هيفيسايد؟

تمرين 7.72
احسب تحويل فوريي لـ $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$.

تمرين 7.73
احسب تحويل فوريي لـ $\mathrm{Pf}\dfrac{1}{x^2}$.

تمرين 7.74
احسب تحويل فوريي لـ $\ln|x|$.

تمرين 7.75
1. نضع $H_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x}H(x)$ حيث $\varepsilon > 0$. احسب $\widehat{H_\varepsilon}$.
2. استنتج أن

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+i0} + i\pi\delta,$$

حيث $\dfrac{1}{x+i0} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{1}{x+i\varepsilon}$.

تمرين 7.76
1. ليكن $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ و $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. نفرض أنّ $\phi \star \psi = 0$. اثبت أنّ $\phi = 0$ أو $\psi = 0$.
2. اثبت نفس النتيجة إذا $\phi \in L^1$ واعط مثالا مضادا في حالة $\phi \notin L^1$.

تمرين 7.77

الهدف من هذا التمرين هو إثبات أنّ تحويل فوريي للتابع $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ هو $\nu \mapsto e^{-\pi^2\nu^2}$.
ولنرمز له بـ $g(\nu)$

1. اثبت أنّ $g(0) = 1$.
2. اثبت أنّ $g'(\nu) = -2\pi\nu g(\nu)$ وحل هذه المعادلة التفاضلية. ماذا تستنتج؟
3. استنتج من الأسئلة السابقة تحويل فوريي للتابع $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

تمرين 7.78

1. ليكن $a, b > 0$. احسب تحويل فوريي لكل تابع من التوابع التالية:

$$e^{-a|x|}, \ |x|e^{-a|x|}, \ h_a(x) = \frac{2a}{x^2 + a^2}.$$

2. بإستعمال تحويل فوريي $\widehat{h_a}$ ، احسب جداء اللّف $h_a \star h_b$ وتحويل فوريي $\widehat{h_a h_b}$.

تمرين 7.79

بإستعمال نظرية بارسفال، احسب التكاملات التّالية:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^n \, \mathrm{d}x, \ n = 2, 3, 4$$

$$J = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2}.$$

تمرين 7.80

نبحث عن الحل F المعدوم عند $\pm\infty$ للمعادلة التفاضلية التالية:

$$-y''(x) + y(x) = e^{-2|x|}.$$

لنفرض أنّ $F \in L^1(\mathbb{R})$ ونرمز بـ $\widehat{F}$ لتحويل فوريي له.

1. اثبت أنّ $\widehat{F}(\nu) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2} - \frac{1}{4 + 4\pi^2\nu^2}\right)$.
2. استنتج عبارة $F(x)$.

تمرين 7.81

اثبت أنّه في $S'(\mathbb{R})$ ، لدينا:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{i\lambda x} \mathrm{vp}\frac{1}{x} = i\pi\delta.$$

1. بالطريقة المباشرة.
2. باستعمال تحويل فوريي.

تمرين 7.82
ليكن $\lambda > 0$ و $u \in S'(\mathbb{R})$ بحيث

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \lambda u \in L^2(\mathbb{R}).$$

1. اثبت أنّ $u \in H^4(\mathbb{R})$.
2. بيّن بمثال مضاد أنّ نتيجة السؤال 1 خاطئة لمّا $\lambda \leqslant 0$.

تمرين 7.83
1. هل يوجد تابع $f \in S(\mathbb{R})$ بحيث

$$\int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\ \mathrm{d}x = 0,\ \ \forall k \geqslant 0?$$

2. نفس السؤال بالنسبة لوجود تابع $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
3. هل يوجد توزيع $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ بحيث

$$\langle S, x^k \rangle = 0,\ \ \forall k \geqslant 0?$$

تمرين 7.84
ليكن T التوزيع المرفق بالتابع المعرف بـ: $f(x) = H(x)\exp(\lambda x) + H(-x)\exp(\mu x)$.
1. اعط شرطا لازما وكافيا على العددين العقديين λ و μ حتى يكون T توزيعا معتدلا.
2. في هذه الحالة احسب $\widehat{T}$.

تمرين 7.85
1. اثبت أنّ التابع $x \mapsto \arctan x$ يعرف توزيعا معتدلا T. احسب $\widehat{T'}$.
2. تحقق أنّه لدينا بمفهوم التوزيعات،

$$x\left(-\frac{1}{2i}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1-\exp(-2\pi|x|)}{2ix}\right) = -\frac{1}{2i}\exp(-2\pi|x|).$$

3. استنتج أنّ

$$\widehat{T} = \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1-\exp(-2\pi|x|)}{2ix}.$$

تمرين 7.86

من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نعرف $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ بـ: $f_n(x) = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{n}}$.

1. اثبت أنّ f_n يعرف توزيعا معتدلا على $\mathbb{R}$.
2. اثبت أنّ المتتالية $(f_n)_{n\geqslant 1}$ تتقارب في $S'(\mathbb{R})$ نحو $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{x}) - i\pi\delta$ ، واحسب تحويل فوريي لهذه النهاية.

تمرين 7.87

من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نعرف $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ بـ: $f_n(x) = \left(\cos \dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$.

احسب في $S'(\mathbb{R})$ نهايات المتتاليات $(f_n)_{n\geqslant 1}$ و $(\widehat{f_n})_{n\geqslant 1}$.

تمرين 7.88

اثبت أنّ جداء اللّف لتابعين لهما نفس الشفرة (ذا شفرتين مختلفتين) معرفين على $\mathbb{R}$ ، هو، إن كان موجودا، تابعا زوجيا (فرديا).

تمرين 7.89

1. اثبت أنّ جداء اللّف لتابعين من $L^2(\mathbb{R})$ موجود ومحدود على $\mathbb{R}$.
2. اثبت أنّ جداء اللّف لتابعين كمولين ذا سند متراص معرفين على $\mathbb{R}$ هو تابع ذو سند متراص.

تمرين 7.90

ليكن $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفا بـ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & : |x| < 1, \\ 0 & : |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

نذكر أنّ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. من أجل $\varepsilon > 0$ مثبت، نضع $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.
اثبت أنّ $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ وحدد سنده.
2. انشيء متتالية $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ من عناصر $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ بحيث، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،

$$\rho_n(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R};\ \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\ \mathrm{d}x = 1;\ \mathrm{Supp}\,\rho_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right].$$

تمرين 7.91

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا مستمرا ذو سند متراص. نعتبر المتتالية $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ المنشأة في التمرين السابق.

1. تأكد أنّه من أجل كل $n\geqslant 1$ ، $f\star\rho_n$ ينتمي إلى $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
2. اثبت أنّ: $\|f\star\rho_n - f\|\to 0$ لمّا $n\to+\infty$.
3. نذكر أنّ مجموعة التوابع المستمرة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{C}$ المستمرة وذو سند متراص كثيفة في $L^1(\mathbb{R})$. ماذا يمكن إستنتاجه من السؤال السابق؟

تمرين 7.92

1. ليكن T توزيعا على $\mathbb{R}$.
   - اثبت أنّ $\delta'\star T$ معرف جيدا واحسبه.
2. اوجد $X\in\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ بحيث $X\star H=\delta$.
3. من أجل $j\in\mathbb{N}$ ، احسب $\delta^{(j)}\star T$.
4. اوجد توزيعا ذا سند متراص S بحيث: $\forall T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \sum_{j=0}^{n} a_j T^{(j)} = S\star T$.

تمرين 7.93

ليكن f و g تابعين من $L^1(\mathbb{R})$ بحيث $f(x)=g(x)=0,\ \forall x\leqslant 0$.

1. اثبت أنّ $h(x)=(f\star g)(x)=0,\ \forall x\leqslant 0$.

ليكن T التوزيع المرفق بـ h : $T=T_h$.

2. اكتب عبارة $\langle T_h,\varphi\rangle$ من أجل كل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
3. احسب $\langle T_h,\varphi\rangle$ من أجل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}$ مع $\varphi=0$ من أجل $x\leqslant 0$. ، أي $\operatorname{Supp}\varphi\subset[0,+\infty[$

تمرين 7.94

نرمز بـ $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ لمجموعة التوزيعات على $\mathbb{R}$ التي سندها محدود من اليسار:

$$\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})=\{T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\exists a\in\mathbb{R}:\operatorname{Supp}T\subset[a,+\infty[\}$$

1. تأكد أنّ $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ، وإذا زود بجداء اللّف يصبح جبرا تبديليا واحديا.

تأكد أنّ:

أ ـ $\delta\in\mathcal{D'}_+(\mathbb{R})$ ،

ب ـ $H\in\mathcal{D'}_+(\mathbb{R})$ ،

جـ ـ H يقبل مقلوبا في $\mathcal{D'}_+(\mathbb{R})$.

د ـ كل عنصر من $\mathcal{D'}_+(\mathbb{R})$ يقبل تابعا أصليا وحيدا في $\mathcal{D'}_+(\mathbb{R})$.

2. ليكن $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ كثير حدود درجته n و α الحل الوحيد لمسألة كوشي

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{d}{dx}\right)\alpha = 0, \text{ في } \mathbb{R}_+^* \\ \alpha(0) = \alpha'(0) = \ldots = \alpha^{(n-2)}(0) = 0, \\ \alpha^{(n-1)}(0) = \dfrac{1}{a_n}. \end{cases}$$

ـ اثبت أنّ αH حلا أساسيا للمؤثر التفاضلي $P\left(\dfrac{d}{dx}\right)$.

ـ استنتج أنّه من أجل كل $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ ، المعادلة التفاضلية: $P\left(\dfrac{d}{dx}\right)X = T$ تقبل حلا وحيدا في $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

3. **تطبيق:** حل في $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ المعادلات التفاضلية:

أ ـ $X' - \lambda X = \delta$.

ب ـ $X'' + \omega^2 X = \delta$.

تمرين 7.95

نعتبر التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-2\pi|x|} \end{cases} \begin{matrix} e^{-2\pi x} & : x \geqslant 0, \\ e^{2\pi x} & : x < 0. \end{matrix}$$

1. اثبت أنّ $g \in L^1(\mathbb{R})$ واحسب تكامله.
2. تأكد أنّ تحويله لفوريي هو:

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+y^2}\right).$$

تمرين 7.96

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ وليكن $k \in \mathbb{R}$. نضع $f_\lambda(x) = ke^{-kx^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

1. تحقق أنّ f_λ حل لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.
2. نبحث عن توابع $f \in S(\mathbb{R})$ بحيث

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} f(x)\ \mathrm{d}x = f(y). \tag{7.3}$$

اثبت أنه إذا كان $f \in S(\mathbb{R})$ يحقق (7.3) فإنّه من الشكل f_λ من أجل λ مختار جيدا.

3. ليكن $\lambda, \mu > 0$. اثبت أنّ $f_\lambda \star f_\mu$ من الشكل f_γ مع γ محدد بدلالة λ و μ.

تمرين 7.97

ليكن $f \in L^1(\mathbb{R})$. اثبت أنّ تحويله لفوريي $\widehat{f}$ يحقق:

1. إذا كان $\widehat{f}$ زوجيا، فإنّ: $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi xy)\ \mathrm{d}x$ ،
2. إذا كان $\widehat{f}$ فرديا، فإنّ: $\widehat{f}(y) = -i\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi xy)\ \mathrm{d}x$ ،

تمرين 7.98

اثبت أنّ كل من التوابع التالية f يقبل تحويلا لفوريي واحسبه.

1. $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)\ \ (a>0)$.
2. $f(x) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$.

إرشاد: هذا التابع عبارة عن جداء اللّف لتابعين مميزين.

3. $f(x) = \exp(-a|x|)\ \ (a>0)$.

تمرين 7.99

ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما.

1. ليكن f تابعا معرفا على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \exp(-ax^2)$.

تأكد أنّ f يحقق معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.

2. اثبت أنّ $\widehat{f}$ موجود ويحقق معادلة تفاضلية من نفس النوع.
3. بحل هذه المعادلة التفاضلية، اوجد عبارة $\widehat{f}$.

(إرشاد: $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$).

4. استنتج تحويل فوريي للتابع المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ $x \mapsto \exp(-a|x|^2)$.

تمرين 7.100

نرمز بـ $C_0^0(\mathbb{R})$ لفضاء التوابع المستمرة على $\mathbb{R}$ التي تؤول إلى 0 عند $+\infty$ و $-\infty$.

نذكر أنّه إذا كان $f \in L^1(\mathbb{R})$ ، فإنّ $\widehat{f}$ موجود وينتمي إلى $C_0^0(\mathbb{R})$.

1. تحقق أنّه من أجل كل حقيقي A ، التكامل $\int_0^A \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ معرف جيدا.
2. اثبت أنّه يوجد ثابت $C>0$ بحيث: $\forall A \in \mathbb{R},\ \left|\int_0^A \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant C$.
3. نعرف التابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ فردي، بـ: $g(y) = \frac{y}{e}$ ، إذا $0 \leqslant y \leqslant e$ ؛ $g(y) = \frac{1}{\ln y}$ ، إذا $y \geqslant e$.

- تحقق أنّ g ينتمي إلى $C_0^0(\mathbb{R})$.
- اثبت أنّ: $\lim_{N\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{N} \frac{g(y)}{y}\mathrm{d}y = +\infty$.

- هل يوجد $f \in L^1(\mathbb{R})$ بحيث $g = \widehat{f}$ ؟

4. ماذا يمكن القول حول تحويل فوريي المعرف من $L^1(\mathbb{R})$ في $C_0^0(\mathbb{R})$ ؟

تمرين 7.101

ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا من الصنف C^2 بحيث f ، f' و f'' كمولة على $\mathbb{R}$.

1. اثبت أنّ $\widehat{f}$ كمولة.
2. ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة لـ f و $\overline{F}\widehat{f}$ ؟

تمرين 7.102

بيّن دون حساب أنّ تحويل فوريي للتابع المعرف بـ:

$$f_1(x) = \chi_{[-1,1]}(x),$$

ذو سند غير متراص.

تمرين 7.103

1. ليكن $m \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$.

نعرف التابع $f_{m,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بـ: $f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

تحقق أنّ التابع $\widehat{f_{m,\sigma}}$ معرف جيدا واحسبه.

2. استنتج $f_{m_1,\sigma_1} \star f_{m_2,\sigma_2}$ $(m_1 \in \mathbb{R}, m_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0)$.

تمرين 7.104

ليكن $\psi \in S(\mathbb{R})$. من أجل كل $t > 0$ ، نضع

$$F(x,t) = F_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

ونعرف:

$$u(x,t) = (\psi \star F_t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \mathrm{d}y.$$

1. تحقق أنّ u معرف جيدا على $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

اثبت أنّه من أجل كل $t > 0$ ، التابع $u_t : x \mapsto u(x,t)$ ينتمي إلى $S(\mathbb{R})$ واحسب تحويله لفوريي $\widehat{u_t}$.

2. اثبت أنّه من أجل كل $t > 0$ ، $(x \mapsto \frac{\partial F}{\partial t}(x,t))$ كمول.

استنتج أنّه من أجل كل $t > 0$ ، التابع $v_t : x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ ينتمي إلى $S(\mathbb{R})$.

3. بفرض أنّ $\frac{\partial \widehat{u_t}}{\partial t} = \widehat{v_t}$ ، وباستعمال تحويل فوريي في $S(\mathbb{R})$ ، اثبت أنّ u يحقق المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$ في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

4. اثبت أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $\lim_{t \to 0} u(x,t) = \psi(x)$.

تمرين 7.105

ليكن $f \in H^{-2}(\mathbb{R}^n)$.

اثبت وجود وّحدانية الحل في $H^2(\mathbb{R}^n)$ للمعادلة

$$u - \Delta u + \Delta^2 u = f.$$

المصادر

[1] Adams Robert and Fourier John J.F: *Sobolev Spaces,* Second Edition, Pure and Applied Mathematics, Volume 140, Academic Press, 2003.

[2] Brézis Haïm: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations:* Universitext, First Edition, Springer, 2010.

[3] Brézis Haïm: *Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contraction dans les espaces de Hilbert:* First Edition, North Holland, 1973.

[4] Brézis Haïm: *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications:* Second Edition, Dunod, Paris, 1999.

[5] Chipot Michel: *Elements of Nonlinear Analysis:* First Edition, Birkhauser, Advanced Texts, 2000.

[6] Khoan, Vo-Khac: *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles,* T.I & II, Vuibert, Paris, 1972.

[7] Strichartz Robert S.:, *A guide to Distribution Theory and Fourier Transforms,* CRC Press,1994.

[8] Zemanian A.H:, *Distribution Theory and Transformation Analysis: An introduction to Generalized Functions with Applications,* Dover Publications, 2010.

[9] Zuily Claude:, *Problems in Distributions and Partial Differential Equations,* North Holland, Amesterdam, 1988.

[10] أبوبكر خالد سعد الله، سليم عيسى مسعودي: نظرية التوزيعات وتطبيقاتها، العبيكان للنشر والتوزي، 2013.