

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure, Vieux-Kouba, Alger
Département de Mathématiques



Thèse

Pour l'obtention du grade de : **Doctorat en Sciences**

Spécialité : **Mathématiques**

Présentée par

Yassine Ahmed BENIA

Equation de Burgers non homogène : Solutions explicites et régularité de la solution dans des domaines non réguliers.

Soutenue publiquement, le 29/11/2018 devant le jury composé de

MOKRANE Abdelhafid, Professeur, E.N.S. de Kouba (Président)

CHOUTRI Abdelaziz, Professeur, E.N.S. de Kouba (Examineur)

KHELOUFI Arezki, MCA, Univ. de Béjaia (Examineur)

MOKHTARI Fares, MCA, Univ. d'Alger 1 (Examineur)

MOULAY M. Said, Professeur, USTHB (Examineur)

MOUSSAOUI Mohand, Professeur, Associé au Labo EDP de Kouba (Invité)

SADALLAH Boubaker-Khaled, Professeur, E.N.S. de Kouba (Directeur de thèse)

Contents

Introduction	9
1 Preliminaries and explicit solutions for non-homogeneous Burgers equations	16
1.1 Function Spaces	17
1.1.1 Functional analysis for parabolic problems	20
1.1.2 Anisotropic Sobolev spaces	23
1.1.3 Fixed point theorems	25
1.1.4 Technical Lemmas	26
1.2 Exact solutions of nonhomogeneous Burgers equation	28
1.2.1 Hopf-Cole transformation	28
1.2.2 Burgers equation with particular second member	30
1.2.3 Burgers equation with other second member	33
2 Existence of solutions to Burgers equation in domain that can be transformed into rectangle	36
2.1 Existence of solutions to a parabolic problem with variable coefficients in a rectangle	37
2.1.1 Resolution of the parabolic problem (2.1)	38
2.1.2 Solution of the approximate problem	39
2.1.3 A priori estimate	41
2.1.4 Existence and uniqueness	48

2.2	Burgers equation in a domain that can be transformed into a rectangle . .	52
3	Existence of solution to Burgers equation in a non-parabolic domain	56
3.1	Introduction	57
3.2	Proof of Theorem 3.2, Case 1	59
3.3	Proof of Theorem 3.2, Case 2	70
4	The KdV problem in domains that can be transformed into rectangles	72
4.1	Introduction	73
4.2	Preliminaries	76
4.3	Parabolic regularization	78
4.3.1	A priori estimates	79
4.3.2	Existence of solution for the approximated problem	86
4.4	Passage to the limit in ε	87
	Perspectives	96
	Bibliography	97

ملخص

تعتبر المعادلات التطورية غير الخطية بالغة الأهمية في وقتنا الحالي حيث تلعب دورًا حاسمًا في دراسة مختلف المسائل الفيزيائية والكيميائية والبيولوجية وفي مجال الهندسة. في هذه الأطروحة نعتبر معادلتى برجرس *Burgers* وكوتورج - دي فري *Korteweg - de Vries* بمعاملات مرتبطة بالزمن، وخاضعة لشروط حدية في ميادين غير مستطيلة الشكل. سيتم فرض بعض الشروط على حافة الميدان وعلى معاملات المعادلات من أجل إثبات وجود ووحداية وملوسة الحلول في فضاءات سوبولافية *Sobolev* لامتتازة. بعد ذلك، نوسع دراسة مسألة برجرس (في ميدان يمكن تحويله إلى مستطيل) إلى ميادين غير ملساء.

و في القسم الثاني من هذا العمل نبحث عن الحلول الصريحة لمعادلات برجرس غير المتجانسة باستخدام تحويل هوبف - كول *Hopf - Cole* المعمم.

إنّ الصعوبة الرئيسية في القسم الأول من الأطروحة يرجع إلى كون الميدان ليس مستطيلًا ولا يمكن تحويله مباشرة إلى ميدان أملس دون ظهور بعض الحدود المنحلة في المعادلات. لمعالجة هذه المسألة، قمنا بتقريب الميدان غير الأملس بمتتالية مؤلفة من ميادين يمكن تحويلها إلى مستطيلات.

لقد تم إثبات وجود ووحداية الحلول في المستطيل باستخدام طريقة فايدو - جالركين *Faedo - Galerkin* لمسألة برجرس، وكذا عن طريق دمج طريقة التمليس المكافئ *parabolic regularization* وطريقة فايدو - جالركين لمسألة كوتورج - دي فري.

تصنيف 2010 *A.M.S* : 35Q35 ، 35K58 .

وسوم: مسائل تطورية غير خطية، ميادين غير ملساء، معادلة برجرس، معادلة كورتورج - دي فري، وجود، وحدانية، فضاءات سوبولافية لامتناظرة، حلول صريحة، تحويل هوبف - كول.

Résumé

Les équations d'évolution non linéaires sont d'un intérêt certain car elles jouent un rôle crucial dans l'étude de divers problèmes physiques, chimiques, biologiques et d'ingénierie.

Dans cette thèse, nous considérons les équations de Burgers et de KdV avec des coefficients variables en temps soumises à des conditions aux limites, dans des domaines non rectangulaires. Des conditions sur le bord du domaine et les coefficients des équations seront imposées afin d'établir l'existence, l'unicité et la régularité des solutions dans un espace de Sobolev anisotrope. Ensuite, nous étendons l'étude du problème de Burgers dans un domaine qui peut être transformé en un rectangle aux domaines non paraboliques. Par ailleurs, nous obtenons des solutions explicites pour des équations de Burgers non homogènes en utilisant la transformation de Hopf-Cole généralisée.

La difficulté principale dans l'étude du premier type de problèmes est due au fait que le domaine n'est pas rectangulaire et ne peut pas être transformé directement en un domaine régulier sans l'apparition de certains termes dégénérés dans les équations. Pour y remédier, nous approximons le domaine non parabolique par une suite de sous-domaines qui peuvent être transformés en rectangles grâce à un changement de variables adéquat. L'existence et l'unicité des solutions dans le rectangle se démontre en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin pour le problème de Burgers, et en combinant la méthode de régularisation parabolique et la méthode de Faedo-Galerkin pour le problème de Korteweg de Vries.

Classification A.M.S 2010 : 35K58, 35Q35.

Mots clés : Problèmes paraboliques semi-linéaires, Domaines non parabolique, Equation de Burgers, Equation de KdV, Existence, Unicité, Espace de Sobolev anisotrope, Solution exacte, Transformation de Hopf-Cole.

Abstract

Nonlinear evolution equations are of current interest because they play a crucial role in the study of various physical, chemical, biological and engineering problems.

In this dissertation, we consider the Burgers and the KdV equations with time variable coefficients subjected to boundary conditions in non-rectangular domains. Some assumptions on the boundary of the domains and on the coefficients of the equations will be imposed, to establish the existence, the uniqueness and the regularity of solutions in an anisotropic Sobolev space. Then, we extend the study of Burgers problem in domain that can be transformed into rectangle to non-parabolic domain.

On the other hand, we obtain explicit solutions for non homogeneous Burgers equations using a generalized Hopf-Cole transformation.

The main difficulty in studying the first type of problems is due to the fact that the domain is not rectangular and can not be transformed into a regular domain without the appearance of some degenerate terms in the equation. To remedy this, we have approximated the non parabolic domain by a sequence of subdomains which can be transformed into regular domains. The existence and uniqueness of the solutions in the rectangle are proved by using the Faedo-Galerkin method for the Burgers problem and by combining the parabolic regularization method and the Faedo-Galerkin method for the Korteweg-de Vries problem.

Classification A.M.S 2010 : 35K58, 35Q35.

Key words : Semilinear parabolic problems, Non-parabolic domains, Burgers equation, KdV equation, existence, Uniqueness, Anisotropic Sobolev space, Exact solution, Hopf-Cole transformation.