Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'illustration les résultats obtenus à l'aide d'exemples concrets en faisant intervenir des équations aux dérivées partielles.

4.1 Exemple 1

On considère l'espace de Hilbert $X = L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\overline{v(x)}dx$$

et les opérateurs linéaires A et B définis par

$$\begin{cases} D(A) = H^4(\mathbb{R}), \\ Au = au^{(4)} - cu, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D(B) = H^2(\mathbb{R}), \\ Bu = ibu'', \end{cases}$$

avec $c > 0, b \neq 0$ et $a + b^2 < 0$.

Les opérateurs linéaires A et B sont fermés. En effet, on a

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad D(A) \subset X \to X \\ u \quad &\mapsto \quad Au = au^{(4)} - cu. \end{aligned}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D(A)$ telle que

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ dans } X, \text{ quand } n \to \infty, \\ Au_n \to v \text{ dans } X, \text{ quand } n \to \infty, \end{cases}$$

et montrons que

$$\begin{cases} u \in D(A), \\ v = Au. \end{cases}$$

On sait que $X = L^2(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$ (injection continue), où $D'(\mathbb{R})$ désigne l'espace des distributions définies sur $(\mathbb{R})$.

D'où $u_n \to u$ dans X implique que $u_n \to u$ dans $D'(\mathbb{R})$ quand $n \to \infty$.

Comme A est différentiable, on obtient $Au_n \to Au$ dans $D'(\mathbb{R})$ quand $n \to \infty$.

Or $Au_n \to v$ dans X et de l'unicité de la limite, il vient $v = Au$.

Montrons que $u \in D(A)$. En effet, on a du fait que $u \in L^2(\mathbb{R})$ et $v = Au \in L^2(\mathbb{R})$, il vient $au^{(4)} \in L^2(\mathbb{R}), a \neq 0$. D'où $u \in H^4(\mathbb{R}) = D(A)$. Donc, l'opérateur linéaire A est fermé. Il en est de même pour l'opérateur linéaire B.

L'opérateur linéaire fermé B^2 est défini par

$$\begin{cases} D(B^2) = H^4(\mathbb{R}), \\ B^2 u = B(Bu) = -b^2 u^{(4)}. \end{cases}$$

Car, si $u \in D(B^2)$, alors $u, u'' \in H^2(\mathbb{R})$, $b \neq 0$, d'où $u, u^{(4)} \in L^2(\mathbb{R})$.

Donc $u \in H^4(\mathbb{R})$. Réciproquement, puisque $u \in H^4(\mathbb{R})$ implique $u'' \in H^2(\mathbb{R}) = D(B)$.Et du fait que $Bu = ibu''$ on a $u \in D(B^2)$.

4.1.1 Application du théorème 2.2.1

Essayons de vérifier les hypothèses (2.3)-(2.7) afin de pouvoir appliquer les résultats du théorème 2.2.1.

Vérification de l'hypothèse (2.3)

Considérons l'opérateur linéaire $L_1 = B^2 - A$ défini par

$$\begin{cases} D(L_1) = D(B^2) \cap D(A) = H^4(\mathbb{R}), \\ L_1 u = (B^2 - A) u = -(b^2 + a) u^{(4)} + cu, c > 0. \end{cases}$$

Première méthode

Vérifions les conditions de l'hypothèse (2.3), suivantes :

i) $D(L_1) = H^4(\mathbb{R})$ est dense dans X (où $X = L^2(\mathbb{R})$). Ce résultat est connu.

ii) L'opérateur linéaire $L_1 = B^2 - A$ est fermé. Pour cela, il suffit de suivre la même démarche que celle faite pour affirmer que l'opérateur linéaire A est fermé.

iii) L'opérateur linéaire $L_1 = B^2 - A$ vérifie la condition :

$$\forall \lambda \geqslant 0, \exists \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \in L\left(X\right) \text{ tel que } \left\| \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{(1+\lambda)}.$$

Pour prouver ceci, on doit résoudre l'équation spéctrale suivante :

$$L_1 u + \lambda u = f,\ f \in X \text{ pour } \lambda \geqslant 0.$$

Puisque $f \in L^2\left(\mathbb{R}\right) \subset S'\left(\mathbb{R}\right)$ (l'injection est continue), où $S'\left(\mathbb{R}\right)$ désigne l'espace des distributions tempérées définies sur $\mathbb{R}$. Alors en utilisant la transformation de Fourier dans $S'\left(\mathbb{R}\right)$ et ses propriétés ($Ff = \widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction f), on aura

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\left(\zeta\right) = F\left(L_1 u + \lambda u\right)\left(\zeta\right) &= \left(\widehat{L_1 u}\right)\left(\zeta\right) + \left(\widehat{\lambda u}\right)\left(\zeta\right) \\
&= -\left(b^2 + a\right)\widehat{u^{(4)}}\left(\zeta\right) + \widehat{cu}\left(\zeta\right) + \lambda \widehat{u}\left(\zeta\right) \\
&= -\left(b^2 + a\right)\left(i\zeta\right)^4 \widehat{u}\left(\zeta\right) + \left(c + \lambda\right)\widehat{u}\left(\zeta\right) \\
&= \left(c + \lambda - \left(b^2 + a\right)\zeta^4\right)\widehat{u}\left(\zeta\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, en notant que $\left(c + \lambda\right) - \left(b^2 + a\right)\zeta^4 > 0$, on obtient

$$\widehat{u}\left(\zeta\right) = F\left[\left(L_1 + \lambda I\right)^{-1} f\right]\left(\zeta\right) = \frac{\widehat{f}\left(\zeta\right)}{\left(c + \lambda\right) - \left(b^2 + a\right)\zeta^4},$$

et grâce à la transformation inverse de Fourier, il vient

$$u\left(x\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x \zeta}\widehat{f}\left(\zeta\right)}{\left(c + \lambda\right) - \left(b^2 + a\right)\zeta^4} d\zeta.$$

En d'autres termes

$$\left[\left(L_1 + \lambda I\right)^{-1} f\right]\left(\zeta\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x \zeta}\widehat{f}\left(\zeta\right)}{\left(c + \lambda\right) - \left(b^2 + a\right)\zeta^4} d\zeta.$$

Puisque la transformation de Fourier est un isomorphisme isométrique de $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ dans $L^2\left(\mathbb{R}\right)$, alors $u, \widehat{u} \in L^2\left(\mathbb{R}\right)$ et

$$\left\|u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\widehat{u}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\widehat{u}\left(\zeta\right)\right|^2 d\zeta = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{f}\left(\zeta\right)\right|^2}{\left[\left(c + \lambda\right) - \left(b^2 + a\right)\zeta^4\right]^2} d\zeta.$$

On remarque que pour $\lambda = 0$, on a

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{c} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Puisque

$$\frac{1}{(c+\lambda) - (b^2+a)\zeta^4} \leqslant \frac{\gamma}{1+\lambda}, \ \forall \lambda \geqslant 0,$$

il suffit de prendre $\gamma = 1 + \dfrac{1}{c}$. En effet, on a

$$\frac{1}{(c+\lambda) - (b^2+a)\zeta^4} \leqslant \frac{1}{c+\lambda} \ (\text{car } -\left(b^2+a\right) \geqslant 0),$$

et $\dfrac{1}{c+\lambda} \leqslant \dfrac{1+\frac{1}{c}}{1+\lambda}$. Donc

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\gamma^2}{(1+\lambda)^2} \left\|\widehat{f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{\gamma^2}{(1+\lambda)^2} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\gamma}{(1+\lambda)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \ \forall \lambda \geqslant 0.$$

En d'autres termes

$$\left\|(L_1+\lambda I)^{-1} f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\gamma}{(1+\lambda)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \ \forall \lambda \geqslant 0.$$

Par conséquent

$$\left\|(L_1+\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{\gamma}{(1+\lambda)}, \ \forall \lambda \geqslant 0.$$

Donc

$$\left\|\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{\gamma}{(1+\lambda)}, \ \forall \lambda \geqslant 0.$$

Puisque $u \in H^4(\mathbb{R})$, il suffit de vérifier que $\left(1+\zeta^2\right)^2 \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})$.

En effet, $\exists \beta > 0$ tel que

$$\left|\left(1+\zeta^2\right)^2 \widehat{u}\right| \leqslant \beta \left|\left(1+\zeta^4\right) \widehat{u}\right|,$$

et $\exists \rho > 0$ tel que

$$\left|\left(1+\zeta^4\right) \widehat{u}\right| \leqslant \rho \left|\left(c+1-\left(a+b^2\right)\zeta^4\right) \widehat{u}\right| = \rho \left|\widehat{f}(\zeta)\right| \in L^2(\mathbb{R}).$$

Donc $\left(1+\zeta^2\right)^2 \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})$, d'où $u \in H^4(\mathbb{R})$.

Deuxième méthode

On montre que l'opérateur linéaire $L_1 = B^2 - A$ est maximal monotone (voir Brezis [2] , p. 101). Pour cela, on doit prouver les deux propriétés suivantes :

i) L'opérateur linéaire $L_1 = B^2 - A$ est monotone.

En effet, pour $u \in D(L_1) = H^4(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle L_1 u, u\rangle &= \langle -\left(b^2+a\right) u^{(4)} + cu, u\rangle \\
&= \langle -\left(b^2+a\right) u'', u''\rangle + \langle cu, u\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} -\left(b^2+a\right) u''(x)\overline{u''(x)}dx + \int_{\mathbb{R}} cu(x)\overline{u(x)}dx \\
&= -\left(b^2+a\right)\int_{\mathbb{R}} u''(x)\overline{u''(x)}dx + c\left\|u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

D'où $\langle L_1 u, u\rangle > 0, \forall u \in D(L_1)$. Donc l'opérateur linéaire L_1 est monotone.

ii) Montrons que $R\left(I + B^2 - A\right) = X$, où $R\left(I + B^2 - A\right)$ désigne l'image de l'opérateur linéaire $I + L_1$. En d'aures termes, on montre que

$$\forall f \in X, \exists\, u \in D(L_1) = H^4(\mathbb{R}) \text{ tel que } u + L_1 u = f.$$

En utilisant la transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R})$ et ses propriétés, on aura

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\zeta) = F(u + L_1 u)(\zeta) &= \widehat{u}(\zeta) + \left(\widehat{L_1 u}\right)(\zeta) \\
&= \left[c + 1 - \left(b^2+a\right)\zeta^4\right]\widehat{u}(\zeta).
\end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{u}(\zeta) = \frac{\widehat{f}(\zeta)}{\left[c + 1 - \left(b^2+a\right)\zeta^4\right]}.$$

En passant à la transformation inverse de Fourier, il vient

$$u(x) = \left[\left(I + B^2 - A\right)^{-1}\right](x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x\zeta}\widehat{f}(\zeta)}{\left[c + 1 - \left(b^2+a\right)\zeta^4\right]} d\zeta.$$

Du fait que la transformation de Fourier est un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on aura $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Il reste à affirmer que $u \in D(L_1) = H^4(\mathbb{R})$. Pour cela, il suffit de procéder comme dans la première méthode. Par conséquent $u \in D(L_1) = H^4(\mathbb{R})$.

Ainsi, on a vérifié l'égalité $R(I + B^2 - A) = X$, donc l'opérateur linéaire $L_1 = B^2 - A$ est maximal monotone.

En vertu de la proposition (voir Brezis [2] , p. 102), les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $D(L_1) = D(B^2 - A)$ est dense dans X.

ii) L'opérateur linéaire $L_1 = B^2 - A$ est fermé.

iii) Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur linéaire $I + \lambda L_1$ est bijectif de $D(L_1)$ dans X et l'opérateur linéaire $(I + \lambda L_1)^{-1}$ est borné avec $\left\|(I + \lambda L_1)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant 1$.

Donc, on a

$$\left\|(I + \lambda L_1)^{-1}\right\|_{L(X)} = \left\|\left(I + \lambda\left(B^2 - A\right)\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant 1.$$

Or

$$\left(I + \lambda\left(B^2 - A\right)\right)^{-1} = \left[\lambda\left(I\lambda^{-1} + B^2 - A\right)\right]^{-1} = \lambda^{-1}\left[I\lambda^{-1} + B^2 - A\right]^{-1}.$$

D'où, en posant $\lambda_0 = \lambda^{-1}$ $(\lambda_0 \neq 0)$ on obtient

$$\left\|\left(I + \lambda\left(B^2 - A\right)\right)^{-1}\right\|_{L(X)} = |\lambda_0|\left\|\left(\lambda_0 I + B^2 - A\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant 1.$$

Par conséquent

$$\left\|\left(\lambda_0 I + B^2 - A\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{1}{|\lambda_0|}, \text{ pour } |\lambda_0| > 0.$$

Donc l'hypothèse (2.3) est satisfaite.

Vérification de l'hypothèse (2.4)

Montrons que les opérateurs linéaires B et $L_1 = B^2 - A$ commutent au sens des résolvantes. Autrement dit :

$$\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1}(B - \mu I)^{-1} f = (B - \mu I)^{-1}\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} f,$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}), \mu \in \rho(B), \lambda > 0$.

D'abord, il faut déterminer $(B - \mu I)^{-1}$. Ceci nécessite la résolution de l'équation spéctrale : $Bu - \mu u = f,\ f \in X, \mu \in \rho(B), \operatorname{Re}\mu \neq 0$.

En utilisant la transformation de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\zeta) = F(Bu - \mu u)(\zeta) &= \left(\widehat{Bu}\right)(\zeta) - (\widehat{\mu u})(\zeta)\\ &= ib\left(\widehat{u''}\right)(\zeta) - \mu\widehat{u}(\zeta)\\ &= ib\left(i\zeta^2\right)\widehat{u}(\zeta) - \mu\widehat{u}(\zeta)\\ &= -\left(\mu + ib\zeta^2\right)\widehat{u}(\zeta).\end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{u}(\zeta) = -\frac{\widehat{f}(\zeta)}{\mu + ib\zeta^2},$$

et grâce à la transformation inverse de Fourier, il vient

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi ix\zeta}\widehat{f}(\zeta)}{\mu + ib\zeta^2} d\zeta.$$

En d'aures termes

$$\left[(B - \mu I)^{-1} f\right](x) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi ix\zeta}\widehat{f}(\zeta)}{\mu + ib\zeta^2} d\zeta.$$

On a déjà obtenu

$$\left[(L_1 + \lambda I)^{-1} f\right](x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi ix\zeta}\widehat{f}(\zeta)}{(c+\lambda) - (b^2 + a)\zeta^4} d\zeta.$$

Ainsi on a, d'une part

$$\begin{aligned}\left[(L_1 + \lambda I)^{-1}(B - \mu I)^{-1} f\right](x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi ix\zeta} F\left[(B - \mu I)^{-1} f\right](\zeta)}{(c+\lambda) - (b^2 + a)\zeta^4} d\zeta\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi ix\zeta}\widehat{f}(\zeta)}{\left[(c+\lambda) - (b^2 + a)\zeta^4\right]\left[\mu + ib\zeta^2\right]} d\zeta.\end{aligned}$$

Or $\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi It\zeta} f(t)\, dt$, par conséquent

$$\left[(L_1 + \lambda I)^{-1}(B - \mu I)^{-1} f\right](x) = -\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{2\pi ix\zeta}\widehat{f}(t)}{\left[(c+\lambda) - (b^2 + a)\zeta^4\right]\left[\mu + ib\zeta^2\right]} d\zeta ft.$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
\left[(B-\mu I)^{-1}(L_1+\lambda I)^{-1} f\right](x) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x\zeta} F\left[(L_1+\lambda I)^{-1} f\right](\zeta)}{\mu+ib\zeta^2} d\zeta \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x\zeta}\widehat{f}(\zeta)}{\left[\mu+ib\zeta^2\right]\left[(c+\lambda)-\left(b^2+a\right)\zeta^4\right]} d\zeta \\
&= -\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{2\pi i x\zeta} f(t)}{\left[\mu+ib\zeta^2\right]\left[(c+\lambda)-\left(b^2+a\right)\zeta^4\right]} d\zeta dt.
\end{aligned}
$$

Donc l'hypothèse (2.4) est vérifiée.

Vérification de l'hypothèse (2.5)

Montrons que l'opérateur linéaire B engendre un groupe fortement continu (i. e. B engendre un C_0-groupe). La preuve repose sur le :

Théorème 4.1.1 ***(De Stone)*** *Un opérateur linéaire B est générateur infinitésimal d'un C_0-groupe d'opérateurs unitaires dans un espace de Hilbert si, et seulement si l'opérateur linéaire iB est auto-adjoint.*

(Voir Pazy [21] , p. 41). Il suffit donc de montrer que l'opérateur linéaire iB est auto-adjoint dans l'espace X. Pour conclure, il suffit d'appliquer le résultat important suivant (voir Brezis [2] , p. 113) :

Proposition 4.1.1 *Si un opérateur A est maximal monotone et symétrique alors il est auto-adjoint.*

Rappelons que $\overline{D(iB)} = \overline{H^2(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$.

L'opérateur linéaire iB est symétrique, car pour $u, v \in D(iB) = H^2(\mathbb{R}) \subset X$, on a

$$
\begin{aligned}
\langle iBu, v\rangle &= -b\int\limits_{\mathbb{R}} u''(x)\overline{v(x)}dx \\
&= -b\int\limits_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v''(x)}dx \\
&= \langle u, iBv\rangle.
\end{aligned}
$$

D'où l'opérateur linéaire iB est symétrique. De plus, l'opérateur linéaire iB est maximal monotone, en effet :

i) L'opérateur linéaire iB est monotone, car pour $u \in D(iB) = H^2(\mathbb{R}) \subset X$, on a

$$\langle iBu, u\rangle = -\langle bu'', u\rangle = b\langle u', u'\rangle > 0.$$

D'où l'opérateur linéaire iB est monotone.

ii) $R(iB + I) = X$. En effet, pour vérifier cette égalité, il suffit de résoudre l'équation différentielle $-bu'' + u = f$, où $f \in X$. Par un calcul simple, on déduit que

$$R(iB + I) = X.$$

Enfin, on conclut que l'opérateur linéaire iB est auto-adjoint. Donc l'hypothèse (2.5) est vérifiée.

Vérification de l'hypothèse (2.6) : Elle est évidente.

Vérification de l'hypothèse (2.7)

Pour montrer que $D\left((B^2 - A)^{1/2}\right) \subseteq D(B)$, il suffit d'utiliser le thérème de Heinz (voir chapitre 1). Pour cela, on considère les deux opérateurs linéaires $L_1 = B^2 - A$ et $-A$. On a

i) Les opérateurs linéaires L_1 et $-A$ sont auto-adjoints.

En effet, pour $u \in D(L_1) = H^4(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, $v \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle L_1 u, v\rangle &= \langle -\left(b^2 + a\right) u^{(4)} + cu, v\rangle \\
&= \langle -\left(b^2 + a\right) u^{(4)}, v\rangle + \langle cu, v\rangle \\
&= (-1)^2 \langle -\left(b^2 + a\right) u'', v''\rangle + \langle cu, v\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(-\left(b^2 + a\right) u''(x) \overline{v''(x)} + cu(x) v(x)\right) dx.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $v \in D(L_1) = H^4(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, $u \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle u, L_1 v\rangle &= \langle u, -\left(b^2 + a\right) v^{(4)} + cv\rangle \\
&= \langle u, -\left(b^2 + a\right) v^{(4)}\rangle + \langle u, cv\rangle \\
&= (-1)^2 \langle u'', -\left(b^2 + a\right) v''\rangle + \langle u, cv\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(-\left(b^2 + a\right) u''(x) \overline{v''(x)} + cu(x) v(x)\right) dx.
\end{aligned}$$

D'où $\langle L_1 u, v\rangle = \langle u, L_1 v\rangle$, $\forall u, v \in D(L_1) = D(B^2 - A) = H^4(\mathbb{R})$.

Donc $B^2 - A \subset (B^2 - A)^*$ et puisque $D(L_1)$ est dense dans X, on en déduit que l'opérateur linéaire $L_1 = B^2 - A$ est symétrique.

Grâce à la proposition 4.4.1 déjà rappelée, pour montrer que l'opérateur linéaire L_1 est auto-adjoint, il suffit de prouver qu'il est maximal monotone.

Or d'après la méthode 2 (de la vérification de l'hypothèse (2.3), l'opérateur L_1 est maximal monotone. Donc L_1 est auto-adjoint.

On fait de même pour montrer que l'opérateur linéaire $-A$ est auto-adjoint.

ii) Les opérateurs linéaires L_1 et $-A$ sont positifs.

En effet, pour $u \in D(L_1) = H^4(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle L_1 u, u\rangle &= \langle -\left(b^2 + a\right) u^{(4)} + cu, u\rangle \\
&= (-1)^2 \langle -\left(b^2 + a\right) u'', u''\rangle + \langle cu, u\rangle \\
&= -\left(b^2 + a\right) \int_{\mathbb{R}} u''(x) \overline{u''(x)} + \int_{\mathbb{R}} cu(x) \overline{u(x)} dx \\
&= -\left(b^2 + a\right) \int_{\mathbb{R}} u''(x) \overline{u''(x)} + c \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

D'où $\langle L_1 u, u\rangle > 0$, $\forall u \in D(L_1)$. Par conséquent l'opérateur linéaire L_1 est positif.

Il en est de même pour l'opérateur linéaire $-A$.

De plus, grâce à l'hypothèse (2.6) et du fait que

$$D(L_1) = D\left(B^2 - A\right) \subseteq D(-A) = D(A) \subseteq D\left(B^2\right),$$

alors d'après le théorème de Heinz, il en résulte que pour tout α vérifiant $0 < \alpha < 1$

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^\alpha\right) \subseteq D\left((-A)^\alpha\right) = D(A) \subseteq D\left(\left(B^2\right)^\alpha\right).$$

En particulier, pour $\alpha = 1/2$, on aura $D\left((B^2 - A)^{1/2}\right) \subseteq D(B)$.

Donc les hypothèses (2.3)-(2.7) sont satisfaites. Pour pouvoir appliquer le théorème principal, il nous reste à vérifier que chacun des opérateurs linéaires A et $B + (B^2 - A)^{1/2}$ et son inverse est borné.

i) Concernant l'opérateur linéaire A, on a

$$A : D(A) \subset X \to X.$$
$$u \mapsto Au = au^{(4)} - cu, C > 0.$$

Montrons que l'opérateur linéaire A est bijectif (inversible), i.e. :

$$\forall f \in X,\ \exists! u \in D(A) = H^4(\mathbb{R}) \text{ tel que } Au = f.$$

En utilisant la transformation de Fourier, il vient

$$\widehat{f}(\zeta) = \left(a\zeta^4 - c\right)\widehat{u}(\zeta).$$

Ensuite, du fait que $a + b^2 < 0$, d'où $a < 0$ et $c > 0$ impliquent $a\zeta^4 - c \neq 0$, $\forall \zeta$,
On obtient

$$\widehat{u}(\zeta) = \frac{\widehat{f}(\zeta)}{a\zeta^4 - c},$$

et grâce à la transformation inverse de Fourier, on aura

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x\zeta}\widehat{f}(\zeta)}{a\zeta^4 - c} d\zeta.$$

En d'autres termes

$$\left(A^{-1}f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x\zeta}\widehat{f}(\zeta)}{a\zeta^4 - c} d\zeta.$$

D'où $u, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})$. Il reste à prouver que $u', u'', u^{(3)}, u^{(4)} \in L^2(\mathbb{R})$.
Pour cela, il suffit que procéder comme dans la vérification de l'hypothèse (2.3).
Donc

$$\exists! u \in H^4(\mathbb{R}),\ u = A^{-1}f \quad \text{tel que } Au = f.$$

Ainsi l'opérateur linéaire A est inversible. D'où l'opérateur linéaire A^{-1} existe.
Du fait que l'opérateur linéaire A est bijectif et continu (car $\|Au\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant k\|u\|_{H^4(\mathbb{R})}$), il en résulte que $A^{-1} \in L(X)$.
ii) Montrons maintenant que l'opérateur linéaire $B + (B^2 - A)^{1/2}$ est bijectif (inversible). Il suffit de résoudre l'équation $\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)u = f,\ \forall f \in X$.
Ceci sachant que

$$\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)u = ibu'' + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1}\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} v d\lambda \in L(X).$$

L'opérateur linéaire $B+(B^2-A)^{1/2}$ est bijectif et continu, d'où $\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1}$ l'est. Donc $\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1} \in L(X)$.

Ainsi toutes les hypothèses du théorème 2.2.1 sont satisfaites. Donc le problème aux limites (P_1) suivant admet une solution stricte unique $u(.)$ sur l'intervalle $[0.1]$:

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)+2ib\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\left(a\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}-cu\right)(t,x)=f(t,x),(t,x)\in(0,1)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x)=u_0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(1,x)=u_1,\ x\in\mathbb{R}. \\ \text{où } u_0,u_1\in H^4(\mathbb{R}), \text{ pouvu que } f\in C^\theta([0,1];L^2(\mathbb{R})),\ 0<\theta<1. \end{cases}$$

4.1.2 Application du théorème 2.2.2

En vertu du point 4.4.1 précédent, on constate que les hypothèses (2.3), (2.6), (2.7) et (2.45) sont déjà vérifiées. Il nous reste à vérifier les hypothèses (2.44), (2.46) et la condition $D(BA)\subset D(B^3)$.

Vérification de l'hypothèse (2.44)

On constate que pour $u\in X$, $(B^2-A)^{-1}u=(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{-1/2}u$.

Grâce à la formule (2.11) de la proposition 2.2.1, on obtient

$$\begin{aligned}\forall u\in D(B), B(B^2-A)^{-1}u &= B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{-1/2}u \\ &= (B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{-1/2}Bu \\ &= (B^2-A)^{-1}Bu.\end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (2.44) est vérifiée.

Vérification de l'hypothèse (2.46)

D'après l'hypothèse (2.7), on a $D\left((B^2-A)^{1/2}\right)\subseteq D(B)$.

Considérons l'opérateur linéaire N défini par

$$N: D(-iB)=H^2(\mathbb{R})\to X.$$
$$Nu=-iBu=bu''.$$

L'opérateur linéaire N est auto-adjoint.

Grâce au point 6°) des commentaires (chapitre 2), il en résulte que les opérateurs linéaires $-(B^2-A)^{1/2}\pm iN=-(B^2-A)^{1/2}\pm B$ engendrent des semi-groupes analytiques, donc l'hypothèse (2.46) est vérifiée.

Enfin, il nous reste à vérifier la condition $D(BA)\subset D(B^3)$.

En effet, puisque toutes les conditions du théorème 2.2.1 sont vérifiées alors l'opérateur linéaire $B+(B^2-A)^{1/2}$ est inversible et son inverse est borné.

Par ailleurs, en vertu du lemme 2.2.8 (chapitre 2), on en déduit aussitôt que $D(BA)\subset D(B^3)$. On peut aussi vérifier la condition $D(BA)\subset D(B^3)$ d'une autre manière : Soit $u\in D(BA)$, on a

$$\begin{cases} u\in D(A)=H^4(\mathbb{R}), \\ Au=au^{(4)}-cu, \end{cases} \text{d'où} \quad \begin{cases} u',u'',u^{(3)} \text{ et } u^{(4)}\in L^2(\mathbb{R}), \\ Au=au^{(4)}-cu, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} Au\in D(B)=H^2(\mathbb{R}), \\ B(Au)=ibu^{(6)}-ibcu'', \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} au^{(4)}-cu, au^{(5)}-cu' \text{ et } au^{(6)}-cu''\in L^2(\mathbb{R}), \\ B(Au)=ibu^{(6)}-ibcu''. \end{cases}$$

Donc $u\in H^6(\mathbb{R})$. D'autre part, on a

$$D\left(B^3\right)=\left\{u\in H^6(\mathbb{R}) : B^3u=ibu^{(6)}\right\}.$$

Par conséquent

$$u\in D\left(B^3\right).$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème 2.2.2 sont satisfaites, donc le problème aux limites (P_1) admet une solution stricte unique $u(.)$ sur l'intervalle $[0.1]$.

4.1.3 Application du théorème 3.2.1

Grâce au point 4.1.2 de cet exemple, pour conclure il suffit d'étudier la régularité maximale de solution stricte unique $u(.)$.

Pour cela, on a besoin de la caractérisation de l'espace d'interpolation (pour $0<\theta<1$)

$$\begin{aligned} D_{-(B^2-A)}(\theta/2;\infty) &= \left(D\left(B^2-A\right);X\right)_{1-\theta/2,\infty}=D_{(B^2-A)^{1/2}}(\theta;\infty) \\ &= \left(H^4(\mathbb{R});L^2(\mathbb{R})\right)_{1-\theta/2,\infty}. \end{aligned}$$

Cet espace d'interpolation coincide avec l'espace de Besov $B^{2\theta}_{2,\infty}(\mathbb{R})$.

On rappelle que dernier est défini, pour $0<\theta<1/2$, par

$$B^{2\theta}_{2,\infty}(\mathbb{R})=\left\{g\in L^2(\mathbb{R}) : \sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{1}{|t|^{2\theta}}\left(\int_{\mathbb{R}}|g(x+t)-g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}<\infty\right\},$$

pour $1/2 < \theta < 1$, par

$$B_{2,\infty}^{2\theta}(\mathbb{R}) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) : g' \in B_{2,\infty}^{2\theta-1}(\mathbb{R}) \right\},$$

et pour $\theta = 1/2$, par

$$B_{2,\infty}^{1}(\mathbb{R}) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) : \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{|t|} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x+t) - 2g(x) + g(x-t)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Ainsi, il suffit d'utiliser la proposition suivante (voir El Haial [5], 1999, p.77):

Proposition 4.1.2 *Soit* $f \in C^\theta([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$, $0 < \theta < 1$, *telle que les applications* $x \mapsto f(j,x)$ *appartiennent à* $B_{2,\infty}^{2\theta}(\mathbb{R})$, *pour* $j = 0, 1$.
On suppose que $u_0, u_1 \in H^4(\mathbb{R})$ *et que* $Au_0 = au_0^{(4)} - cu_0$,
$Au_1 = au_1^{(4)} - cu_1 \in B_{2,\infty}^{2\theta}(\mathbb{R})$. *Alors le problème aux limites* (P_1) *admet une solution stricte unique* $u(.)$ *sur l'intervalle* $[0.1]$, *vérifiant :*
i) $u \in C^2([0,1]; L^2(\mathbb{R})) \cap C([0,1]; H^4(\mathbb{R}))$ *et* $u' \in C\left([0,1]; H^{é}(\mathbb{R})\right)$.
ii) $u'', ib\partial_x^2 u$ *et* $a\partial_x^4 u - cu \in C^\theta([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$, *(la régularité maximale de* u*).*

Finalement, on peut appliquer les résultats du théorème3.2.1 au problème (P_1).

4.2 Exemple 2

On pose $X = L^2(0,1)$ et on considère l'opérateur linéaire $T : D(T) \subset X \to X$, défini par

$$\begin{cases} D(T) = \{u \in H^1(\mathbb{R}) \,/\, u(0) = u(1)\} \subset L^2(0,1), \\ Tu = iu'. \end{cases}$$

L'opérateur linéaire T est auto-adjoint. En effet, d'après la proposition (voir Brezis [2], p.113), on a $D(T) = X$. De plus

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle = \langle iu', v \rangle = -\langle iu, v' \rangle &= -\int_0^1 iu(x)\, v'(x)\, dx \\ &= \int_0^1 u(x)\,(iv'(x))\, dx \\ &= \langle u, Tv \rangle, \text{ pour tout } u, v \in D(T). \end{aligned}$$

D'où l'opérateur linéaire T est symétrique. D'autre part, on a

$$\langle Tu, u\rangle = \langle iu', u\rangle = -\int_0^1 iu\,(x)\,u'\,(x)\,dx.$$

Par intégration par parties, on aura $\displaystyle\int_0^1 u'\,(x)\,\overline{u\,(x)}dx > 0$. On déduit que l'opérateur linéaire T est monotone.

Enfin, pour que l'opérateur linéaire T soit maximal monotone, il nous reste à vérifier la condition $R\,(T+I) = X$. Ceci nécéssite la résolution de l'équation différentielle :

$$iu' + u = f, \quad f \in X = L^2\,(0,1)\,.$$

Il est facile d'affirmer ceci par un calcul simple. Par conséquent, l'opérateur linéaire T est auto-adjoint. L'opérateur linéaire T^2 est défini par

$$\begin{cases} D\,(T^2) = \{u \in H^2\,(\mathbb{R})\,/\ u\,(0) = u\,(1)\,, u'\,(0) = u'\,(1)\} \subset L^2\,(0,1)\,, \\ T^2 u = -u''. \end{cases}$$

L'opérateur linéaire T^2 est auto-adjoint (il suffit de procéder comme pout l'opérateur$T$).
L'opérateur linéaire T^2 est positif, car pour $u \in D\,(T^2)$ on a

$$\left\langle T^2 u, u\right\rangle = \langle -u'', u\rangle = -\int_0^1 u\,(x)\,\overline{u''\,(x)}dx.$$

Et par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle T^2 u, u\right\rangle &= -\left[u\,(x)\,u'\,(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'\,(x)\,\overline{u'\,(x)}dx \\ &= \int_0^1 \left|u'\,(x)\right|^2 dx. \end{aligned}$$

D'où $\langle T^2 u, u\rangle > 0$, $\forall u \neq 0$.

Maintenant, on introduit les deux opérateurs linéaires A et B définis par

$$\begin{cases} D\,(B) = D\,(T)\,, \\ Bu = iTu'' = u', \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D\,(A) = D\,(T^2)\,, \\ Au = 2u'' - au, \quad a > 0. \end{cases}$$

On peut affirmer que les opérateurs linéaires A et B sont fermés (car ils sont auto-adjoints). Ensuite, on a

$$\begin{cases} D\,(B^2) = D\,(T^2)\,, \\ B^2 u = u'', \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D\,(B^2 - A) = D\,(T^2)\,, \\ (B^2 - A)\,u = -u'' + au, \quad a > 0. \end{cases}$$

4.2.1 Application du théorème 2.2.1

Vérification de l'hypothèse (2.3)

L'opérateur linéaire $B^2 - A$ est auto-adjoint, car les opérateurs T^2 et A le sont. L'opérateur linéaire $B^2 - A$ est fermé car il est auto-adjoint et $D(B^2 - A)$ est dense dans X. D'autre part, l'opérateur linéaire $B^2 - A$ est positif, car

$$\begin{aligned}\left\langle \left(B^2 - A\right) u, u\right\rangle &= \langle -u'' + au, u\rangle \\ &= \langle -u'', u\rangle + a\int_0^1 |u(x)|^2\, dx \\ &\geqslant a\,\|u\|^2_{L^2(0,1)}.\end{aligned}$$

D'où $\langle (B^2 - A) u, u\rangle > 0, \forall u \neq 0$. Alors, il est facile d'affirmer que l'opérateur linéaire $B^2 - A$ est maximal monotone. Grâce à la proposition 4.4.1, il en résulte que l'hypothèse (2.3) est vérifiée. Par conséquent et d'après le thérème 1.3.4 (chapitre1) l'opérateur linéaire $-(B^2 - A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.

Vérification de l'hypothèse (2.4)

Pour cela, il suffit de résoudre les deux équations spéctrales :

$$\left(B^2 - A\right) u + \lambda u = f \quad \text{et} \quad Bu - \mu u = f, \;\text{ pour }\; f \in L^2(0,1), \lambda > 0 \text{ et } \operatorname{Re}\mu \neq 0.$$

Ceci afin d'obtenir les résolvantes $(B^2 - A + \lambda I)^{-1}$ et $(B - \mu I)^{-1}$ ensuite de vérifier la commutativité de ces dernières. D'où par un calcul simple, on déduit que l'hypothèse (2.4) est vérifiée.

Vérification de l'hypothèse (2.5)

En vertu du théorème de Stone (voir exemple 1), il suffit d'affirmer que l'opérateur linéaire iB est auto-adjoint. Puisque $iB = T$ qui est auto-adjoint, alors l'hypothèse (2.5) est vérifiée.

Vérification de l'hypothèse (2.6) : Elle est évidente.

Vérification de l'hypothèse (2.7)

Du fait que $D(B^2 - A) \subseteq D(T^2)$ et que les opérateurs $B^2 - A$ et T^2sont positifs et auto-adjoints, alors d'après le corollaire 1.3.1 (du théorème de Heinz), on en déduit

que $D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \subseteq D(T) = D(B) \subset X$. Donc l'hypothèse (2.7) est vérifiée. Pour conclure, il nous reste à vérifier que chacun des opérateurs linéaires $B + \left(B^2-A\right)^{1/2}$ et A est inversible et que son inverse est borné. Pour cela, il suffit de procéder comme dans l'exemple1. Ainsi toutes les hypothèses du théorème 2.2.1 sont satisfaites.
Donc le problème aux limites (P_2) suivant :

$$(P_2)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - au(x,t) = f(x,t), (x,t) \in (0,1)^2, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(x,1) = u_1(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t), \quad 0 < t < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t), \quad 0 < t < 1, \\ \text{où } u_0, u_1 \in D(A), \text{ pouvu que } f \in C^{\theta}\left([0,1]; L^2(0,1)\right), 0 < \theta < 1. \end{cases}$$

admet une solution stricte unique $u(.)$ sur l'intervalle $[0,1]$.

4.2.2 Application du théorème 2.2.2

En vertu du point 4.2.1 de cet exemple, on constate que les hypothèses (2.3), (2.6),(2.7) et (2.45) sont déjà vérifiées. Il nous reste à vérifier les hypothèses (2.44), (2.46) et la condition $D(BA) \subset D(B^3)$.

Vérification de l'hypothèse (2.44)

On constate que pour $u \in X$, $\left(B^2-A\right)^{-1}u = \left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}u$.

Grâce à la formule (2.11) de la proposition 2.2.1, on obtient

$$\begin{aligned} \forall u \in D(B), B\left(B^2-A\right)^{-1}u &= B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}u \\ &= \left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}Bu \\ &= \left(B^2-A\right)^{-1}Bu. \end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (2.44) est vérifiée.

Vérification de l'hypothèse (2.46)

Grâce au théorème 2.2.1 et d'après le lemme 2.2.4, on en déduit que l'hypothèse (2.46) est vérifiée. Enfin, il nous reste à vérifier la condition $D(BA) \subset D(B^3)$.
En effet, grâce au théorème 2.2.1, l'opérateur linéaire $B + \left(B^2-A\right)^{1/2}$ est inversible et son inverse est borné et du fait que les hypothèses (2.3), (2.6), (2.7), (2.44) et

(2.45) sont vérifiées, alors en vertu du lemme 2.2.8 (chapitre 2), on en déduit aussitôt que la condition $D(BA) \subset D(B^3)$ est vérifiée.

Ainsi toutes les hypothèses du théorème 2.2.2 sont satisfaites, donc le problème aux limites (P_2) admet une solution stricte unique $u(.)$ sur l'intervalle [0.1].

4.2.3 Application du théorème 3.2.1

Grâce au point 2.2.2 de cet exemple, pour conclure il suffit d'étudier la régularité maximale de la solution stricte u. Le domaine $D(T)$ coincide avec l'espace d'interpolation : (voir Triebel [23], p.143)

$$\begin{aligned}
\left[D\left(T^2\right);X\right]_{1/2} &= \left(D\left(T^2\right);X\right)_{1/2,2}, \\
\left[D\left(B^3\right);X\right]_{1/2} &= \left(D\left(B^3\right);X\right)_{1/2,2}.
\end{aligned}$$

Donc on peut appliquer les résultats du théorème 3.2.1 au problème aux limites (P_2).

4.3 Exemple 3

Soit $X = L^2(\Omega)$ un espace de Hilbert, où Ω désigne un domaine borné de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ de frontière régulière $\partial\Omega$.

4.3.1 Application du théorème 3.2.1

Considérons l'opérateur linéaire $B : D(B) \subset X \to X$, défini par

$$\begin{cases}
D(B) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(0,1), \\
Bu = -\triangle u = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},\ u \in D(B).
\end{cases}$$

$\triangle$ est l'opérateur de Laplace.

L'opérateur linéaire B est fermé et auto-adjoint, car pour tout $u, v \in D(B)$, on a

$$\langle Bu, v\rangle = \langle -\triangle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \langle u, -\triangle v\rangle = \langle u, Bv\rangle,$$

d'où B est symétrique et grâce à la proposition (voir Brezis [2], p.101), on en déduit que B est auto-adjoint. L'opérateur linéaire B est positif, car pour $u \in D(B)$

$$\langle Bu, u\rangle = \langle -\triangle u, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx = \|\nabla u\|_X^2 .$$

D'où $\langle Bu, u\rangle > 0, \forall u \neq 0$. Il en est de même pour l'opérateur linéaire $B^2 = \triangle^2$.
Considérons l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$, défini par

$$\begin{cases} D(A) = \left\{u \in H^6(\Omega) \,/\, u_{|\partial\Omega} = \triangle u_{|\partial\Omega} = \triangle^2 u_{|\partial\Omega} = 0\right\} \subset L^2(0,1), \\ Au = \triangle^3 u = \sum\limits_{i,j,k=1}^{n} \dfrac{\partial^6 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2 \partial x_k^2},\ u \in D(A). \end{cases}$$

L'opérateur linéaire A est fermé et auto-adjoint, car l'opérateur linéaire $\triangle$ l'est.
On constate que:
- $B^2 - A = B^2 + B^3 = B^2 + (B^2)^{3/2}$.
- $D(B^2 - A) = D(B^2) \cap D(B^3) = D(B^3)$, (car $D(B^3) \subset D(B^2)$).
- $B^2 - A$ est auto-adjoint et positif, d'où l'opérateur linéaire $-(B^2 - A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique avec $D\left((B^2 - A)^{1/2}\right) = D\left(B^{3/2}\right)$.

D'autre part, on a

$$\|Bu\| = \left\|B^{3/2}u\right\| = \left(\left\|B^{3/2}u\right\|^2\right)^{1/3},$$

ensuite (voir le théorème 1.3.6 (chapitre 1)

$$\left\|B^{3/2}u\right\|^2 \leqslant 4\left\|B^3 u\right\| \|u\|,$$

$$\begin{aligned} \left(\left\|B^{3/2}u\right\|^2\right)^{1/3} &\leqslant 4^{1/3}\left\|B^3 u\right\|^{1/3} \|u\|^{1/3} \\ &\leqslant 4^{1/3}\left\|\left(B^{3/2}\right)^2 u\right\|^{1/3} \|u\|^{1/3} \\ &\leqslant C\left\|B^{3/2}u\right\|^{2/3} \|u\|^{1/3}, \forall u \in D\left(B^{3/2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|Bu\| &\leqslant C\left\|B^{3/2}u\right\|^{2/3} \|u\|^{1/3} \\ &\leqslant C\left\|B^{3/2}\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B^2 - A\right)^{1/2} u\right\|^{2/3} \|u\|^{1/3}. \end{aligned}$$

Donc les opérateurs linéaires $\pm B$ sont bornés par rapport à l'opérateur $-(B^2 - A)^{1/2}$.
Grâce au théorème 2.2.2, il en résulte que les opérateurs linéaires $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$

engendrent des semi-groupes analytiques, donc l'hypothèse (2.46) est vérifiée.

L'hypothèse (2.46) et le lemme 2.2.5 impliquent que les hypothèses (2.3) , (2.6), (2.7), (2.44) et (2.45) sont satisfaites. Par ailleurs, l'opérateur linéaire $B + (B^2 - A)^{1/2}$est inversible et son inverse est borné. En vertu du lemme 2.2.8 (chapitre 2), on en déduit aussitôt que la condition $D(BA) \subset D(B^3)$ est vérifiée.

D'autre part, grâce au théorème 1.4.2, le domaine $D\left((B^2 - A)^{1/2}\right) = D\left(B^{3/2}\right)$ coincide avec l'espace d'interpolation (voir [11] et [23], p.143) :

$$\left[D\left(B^3\right); X\right]_{1/2} = \left(D\left(B^3\right); X\right)_{1/2,2}.$$

Donc on peut appliquer les résultats du théorème 3.2.1 au problème aux limites (P_3):

$$(P_3)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 2\triangle \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \triangle^3 u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in \Omega \times (0,1), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,1) = u_1(x), x \in \Omega, \\ u(\sigma,t) = \triangle u(\sigma,t) = \triangle^2 u(\sigma,t) = 0, \quad (\sigma,t) \in \partial\Omega \times (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\sigma,t) = 0, \quad (\sigma,t) \in \partial\Omega \times (0,1) \\ \text{avec } u_0, u_1 \in D(A), \text{ pouvu que } f \in C^\theta([0,1]; L^2(\Omega)), 0 < \theta < 1. \end{cases}$$

4.4 Exemple 4

Soit K le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'angle π dans un espace de Banach complexe X. Autrement dit K est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X et pour chaque $\varepsilon \in]0, \pi/2[$, il existe $M_\varepsilon \geqslant 0$ tel que

$$\left\|(K - \lambda I)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}, \text{ pour tout } \lambda \in \textstyle\sum_{\pi-\varepsilon}$$

où $\sum_{\pi-\varepsilon} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* / \ |\arg \lambda| < \pi - \varepsilon\}$. Supposons aussi que $0 \in \rho(K)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur linéaire $-K^{2^n}$engendre un semi-groupe analytique d'angle π.

4.4.1 Application du théorème 3.2.1

Considérons les deux opérateurs linéaires A et B définis par :

$$\begin{cases} D(B) = D(K), \\ Bu = -Ku, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D(A) = D\left(K^{2^r}\right), \ r \geqslant 2, \\ Au = -K^{2^r} u, \end{cases}$$

On a $B^2 - A = K^2 + K^{2^r}$ et $-\left(B^2 - A\right)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique et les opérateurs $\pm B$ sont bornés par rapport à $-\left(B^2 - A\right)^{1/2}$ (voir exemple 3).

Grâce au théorème 2.2.2, il en résulte que les les opérateurs $\pm B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}$ engendrent des semi-groupes analytiques. Donc l'hypothèse (2.46) est vérifiée.

On a aussi, l'opérateur linéaire $B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}$est inversible et son inverse est borné.

De plus, en vertu du lemme 2.2.8 (chapitre 2), on en déduit aussitôt que la condition $D\left(BA\right) \subset D\left(B^3\right)$ est vérifiée.

D'autre part et grâce au théorème 1.4.2, le domaine $D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) = D\left(K^{2^{r-1}}\right)$ coincide avec l'espace d'interpolation (voir [23], p.143) :

$$\left[D\left(B^2 - A\right); X\right]_{1/2} = \left[D\left(K^{2^r}\right); X\right]_{1/2} = \left(D\left(K^{2^r}\right); X\right)_{1/2,2}.$$

Considérons maintenant l'espace $X = L^p\left(\Omega\right), 1 < p < \infty$, où Ω désigne un domaine borné de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$de frontière régulière $\partial\Omega$ et les opérateurs linéaires A et B définis par

$$\begin{cases} D\left(B\right) = W^{2,p}\left(\Omega\right) \cap W_0^{1,p}\left(\Omega\right), \\ Bu = -\triangle u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D\left(A\right) = \left\{u \in W^{8,p}\left(\Omega\right) / \ \triangle^j u_{|\partial\Omega} = 0, \text{ pour } j = 0,1,2,3\right\}, \\ Au = -\triangle^4 u = -\sum\limits_{i,j,k=1}^{n} \dfrac{\partial^8 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2 \partial x_k^2}, \ u \in D\left(A\right). \end{cases}$$

Donc on peut appliquer les résultats du théorème 3.2.1 au problème aux limites (P_4):

$$(P_4) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x,t\right) - 2\triangle \dfrac{\partial u}{\partial t}\left(x,t\right) + \triangle^4 u\left(x,t\right) = f\left(x,t\right), \left(x,t\right) \in \Omega \times \left(0,1\right), \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad u\left(x,1\right) = u_1\left(x\right), x \in \Omega, \\ u\left(\sigma,t\right) = \triangle u\left(\sigma,t\right) = \triangle^2 u\left(\sigma,t\right) = \triangle^2 u\left(\sigma,t\right) = 0, \left(\sigma,t\right) \in \partial\Omega \times \left(0,1\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\sigma,t\right) = 0, \quad \left(\sigma,t\right) \in \partial\Omega \times \left(0,1\right), \\ \text{avec } u_0, u_1 \in D\left(A\right), \text{ pouvu que } f \in C^\theta\left(\left[0,1\right]; L^p\left(\Omega\right)\right), 0 < \theta < 1. \end{cases}$$