Chapitre 3

Régularité maximale de la solution stricte

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la régularité maximale de la solution stricte du problème aux limites (2.1)-(2.2).

On va démontrer un résultat plus fort qui caractérise l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte du problème aux limites (2.1)-(2.2).

Pour cela, on se basera sur la théorie d'interpolation.

On fera les six hypothèses suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans } X\text{, tel que} \\ \forall\lambda \geqslant 0,\ \exists\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \in L(X) \text{ avec} \\ \left\|\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant C/(1+\lambda), \end{array}\right. \tag{2.3}$$

$$D(A) \subseteq D\left(B^2\right), \tag{2.6}$$

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subseteq D(B), \tag{2.7}$$

$$\forall y \in D(B),\ B\left(B^2 - A\right)^{-1} y = \left(B^2 - A\right)^{-1} By. \tag{2.44}$$

$$\text{L'opérateur } A \text{ est inversible et son inverse est borné,} \tag{2.45}$$

$$\text{Les opérateurs } B-\left(B^2-A\right)^{1/2} \text{ et } -\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \text{ engendrent} \tag{2.46}$$

les semi-groupes analytiques $\{U_1(t)\}$ et $\{U_2(t)\}$ respectivement dans X.

3.2 Résultat essentiel de régularité maximale

On rappelle ici que :

L'espace $D_{-(B^2-A)}(\theta/2;\infty)$ est l'espace d'interpolation réel $(D(B^2-A);X)_{1-\theta/2,\infty}$ caractérisé par

$$D_{-(B^2-A)}(\theta/2;\infty)=\left\{\varphi\in X\ /\ \sup_{r>0} r^{\theta}\left\|\left(B^2-A\right)\left(B^2-A+rI\right)^{-1}\varphi\right\|_X<+\infty\right\}.$$

On montrera le résultat essentiel suivant :

Théorème 3.2.1 *Supposons que les conditions* (2.3), (2.6), (2.7), (2.44), (2.45) *et* (2.46) *sont vérifiées. Si, de plus* $D(BA)\subset D(B^3)$, *alors pour toute fonction* $f\in C^{\theta}([0,1];X)$, $0<\theta<1$ *et pour chaque* $u_0,u_1\in D(A)$, *satisfaisant*

$f(i),\ Au_i\in D_{-(B^2-A)}(\theta/2;\infty)=(D(A);X)_{1-\theta/2,\infty}$, $i=0,\ 1,$

la solution stricte unique $u(.)$ *du problème aux limites* (2.1)-(2.2) *possède la propriété de régularité maximale* u'', Bu', $Au\in C^{\theta}([0,1];X)$.

Preuve. du théorème 3.2.1

On a vu au chapitre 2, que la solution stricte unique $u(.)$ *du problème aux limites* (2.1)-(2.2) *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{aligned} u(t)= &\ U_2(t)\xi_0+U_1(1-t)\xi_1\\ &-\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2(t-s)f(s)\,ds+\int_t^1 U_1(s-t)f(s)\,ds\right),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_0= &\ (I-Z)^{-1}(u_0-U_1(1)u_1)\\ &+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(B^2-A)^{-1/2}\left(\int_0^1 U_1(s)f(s)\,ds-U_1(1)\int_0^1 U_2(1-s)f(s)\,ds\right),\\ \xi_1= &\ (I-Z)^{-1}(u_1-U_2(1)u_0)\\ &+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(B^2-A)^{-1/2}\left(\int_0^1 U_2(1-s)f(s)\,ds-U_2(1)\int_0^1 U_1(s)f(s)\,ds\right).\end{aligned}$$

où $\{U_1(t)\}$, $\{U_2(t)\}$ désignent les semi-groupes analytiques engendrés par les opérateurs $B-(B^2-A)^{1/2}$ et $-\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)$ respectivement.
Ainsi pour étudier la régularité maximale de cette solution, on procède de la manière suivante : ■

3.2.1 $Au(.)\in C^{\theta}([0,1];X)$, $0<\theta<1$.

En effet, du fait que

$$\begin{aligned} A &= \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \\ &= \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right), \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} Au(t) &= U_2(t)A\xi_0+U_1(1-t)A\xi_1 \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2(t-s)f(s)\,ds+\int_t^1 U_1(s-t)f(s)\,ds\right) \\ &= I(t)+II(t), \end{aligned}$$

grâce au lemme 2.2.4, on a

$$\begin{aligned} II(t) &= -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2(t-s)f(s)\,ds+\int_t^1 U_1(s-t)f(s)\,ds\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^t U_2(t-s)f(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_t^1 U_1(s-t)f(s)\,ds. \end{aligned}$$

Puisque $f(s)=(f(s)-f(t))+f(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} II(t) &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_0^t\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(t-s)(f(s)-f(t))\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_0^t\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(t-s)f(t)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\int_t^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s-t)(f(s)-f(t))\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\int_t^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s-t)f(t)\,ds. \end{aligned}$$

En vertu du lemme 2.2.4 et de la remarque 2.2.1 (chapitre 2), on aura

$$\begin{aligned}
\int_0^t U_2(t-s) f(t) \, ds &= \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s) f(s) \, ds \\
&= J_-(t, f(t)) \\
&= \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(I - e^{-tB} V(t)\right) f(t) \\
&= \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(I - U_2(t)\right) f(t),
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\int_t^1 U_1(s-t) f(t) \, ds &= \int_t^1 e^{(s-t)B} V(t) V(s-t) f(s) \, ds \\
&= J_+(1-t, f(t)) \\
&= \left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(I - e^{(1-t)B} V(1-t)\right) f(t) \\
&= \left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(I - U_1(1-t)\right) f(t).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
II(t) &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} - I\right) \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} U_2(t-s) \left(f(s) - f(t)\right) ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} + I\right) \int_t^1 \frac{\partial}{\partial s} U_1(s-t) \left(f(s) - f(t)\right) ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} - I\right) f(t) + \frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} - I\right) U_2(t) f(t) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} + I\right) f(t) - \frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} + I\right) U_1(1-t) f(t).
\end{aligned}$$

Enfin, du fait que

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left(f(t) - f(0)\right) + f(0) \\
&= \left(f(t) - f(1)\right) + f(1),
\end{aligned}$$

on aura

$$
\begin{aligned}
II\left(t\right) &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_{0}^{t}\frac{\partial}{\partial s}U_{2}\left(t-s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(t\right)\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}+I\right)\int_{t}^{1}\frac{\partial}{\partial s}U_{1}\left(s-t\right)\left(f\left(s\right)-f\left(t\right)\right)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}-I\right)U_{2}\left(t\right)\left(f\left(t\right)-f\left(0\right)\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}-I\right)U_{2}\left(t\right)f\left(0\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}+I\right)U_{1}\left(1-t\right)\left(f\left(t\right)-f\left(1\right)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}+I\right)U_{1}\left(1-t\right)f\left(1\right) \\
&\quad +f\left(t\right).
\end{aligned}
$$

En d'autres termes

$$
II\left(t\right)=II_{1}\left(t\right)+II_{2}\left(t\right)+II_{3}\left(t\right)+II_{4}\left(t\right)+II_{5}\left(t\right)+II_{6}\left(t\right)+f\left(t\right).
$$

a) Montrons que $II\left(.\right)\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right),\ 0<\theta<1.$

Pour cela on étudie chacun des termes $\left(II_{i}\right)_{i=1,\ldots,6}$.

Soit $0\leqslant\tau<t\leqslant1$, on a

$$
II_{1}\left(t\right)=-\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_{0}^{t}\frac{\partial}{\partial s}U_{2}\left(t-s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(t\right)\right)ds.
$$

D'où (voir le lemme 2.2.4 (chapitre 2)

$$
\begin{aligned}
II_{1}\left(t\right)-II_{1}\left(\tau\right) &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_{0}^{t}\frac{\partial}{\partial s}U_{2}\left(t-s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(t\right)\right)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_{0}^{\tau}\frac{\partial}{\partial s}U_{2}\left(\tau-s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(\tau\right)\right)ds \\
&= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}-I\right) \\
&\quad \int_{0}^{t}\left(-\left(B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)U_{2}\left(t-s\right)\right)\left(f\left(s\right)-f\left(t\right)\right)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(B\left(B^{2}-A\right)^{-1/2}-I\right) \\
&\quad \int_{0}^{\tau}\left(-\left(B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)U_{2}\left(\tau-s\right)\right)\left(f\left(s\right)-f\left(\tau\right)\right)ds.
\end{aligned}
$$

Du fait que $-\sigma = -\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $\{U_2(t)\}$ dans X, alors

$$\int_0^t \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_2(t-s)\right)(f(s) - f(t))\,ds$$
$$= \int_0^t \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) e^{-(t-s)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}\right)(f(s) - f(t))\,ds,$$

et en vertu du théorème 1.7.3 (chapitre 1), il résulte que

$$\int_0^t \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_2(t-s)\right)(f(s) - f(t))\,ds \in C^\theta([0,1];X).$$

Le même raisonnement s'applique pour affirmer que

$$\int_0^\tau \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_2(\tau-s)\right)(f(s) - f(\tau))\,ds \in C^\theta([0,1];X).$$

Par conséquent

$$II_1(.) \in C^\theta([0,1];X).$$

De manière analogue, on montre que $II_2(.) \in C^\theta([0,1];X)$.

Regardons maintenant $II_3(.) = \frac{1}{2}\left(B(B^2 - A)^{-1/2} - I\right) U_2(t)(f(t) - f(0))$.

On a

$$\begin{aligned} II_3(t) - II_3(\tau) &= \frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} - I\right) \\ &\quad (U_2(t)(f(t) - f(0)) - U_2(\tau)(f(\tau) - f(0))). \end{aligned}$$

D'où grâce au lemme 2.2.4 (chapitre 2), on a

$$U_2(t)(f(t) - f(0)) - U_2(\tau)(f(\tau) - f(0))$$
$$= e^{-t\sigma}(f(t) - f(0)) - e^{-\tau\sigma}(f(\tau) - f(0)),$$

où $-\sigma = -\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $\{U_2(t)\}$ dans X. D'où

$$\begin{aligned} II_3(t) - II_3(\tau) &= \frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} - I\right) U_2(t)\,e^{-t\sigma}(f(t) - f(0)) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} - I\right) e^{-\tau\sigma} U_2(\tau)(f(\tau) - f(0)) \end{aligned}$$

Grâce au théorème 1.7.3 (chapitre 1), il résulte que $II_3(.) \in C^\theta([0,1];X)$.

Pour $II_4(t) = \dfrac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} - I\right) U_2(t) f(0)$, on a

$$II_4(t) - II_4(\tau) = \frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} - I\right)\left(U_2(t) - U_2(\tau)\right) f(0).$$

En appliquant le lemme 2.2.4, on aura

$$\begin{aligned} U_2(t) - U_2(\tau) &= e^{-t\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)} - e^{-\tau\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)} \\ &= e^{-t\sigma} - e^{-\tau\sigma}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} II_4(t) - II_4(\tau) &= \frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} - I\right) e^{-t\sigma} f(0) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} - I\right) e^{-\tau\sigma} f(0). \end{aligned}$$

Or, par hypothèse

$$f(0) \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2; \infty) = D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta; +\infty),$$

(voir la remarque 1.4.2 (chapitre 1)). D'après la proposition 1.7.3 (chapitre 1), il vient

$$e^{-t\sigma} f(0), \quad e^{-\tau\sigma} f(0) \in C^\theta([0,1]; X).$$

Donc $II_4(.) \in C^\theta([0,1]; X)$.

Concernant $II_5(t) = -\dfrac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} + I\right) U_1(1-t)\left(f(t) - f(1)\right)$, on a

$$\begin{aligned} II_5(t) - II_5(\tau) &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} + I\right) U_1(1-t)\left(f(t) - f(1)\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} + I\right) U_1(1-\tau)\left(f(\tau) - f(1)\right). \end{aligned}$$

En vertu du lemme 2.2.4, il est clair que

$$U_1(1-t) = e^{(1-t)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)} = e^{(1-t)\delta},$$

où $\delta = \left(B - \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$ test le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $\{U_1(1-t)\}$ dans X. D'où

$$\begin{aligned} II_5(t) - II_5(\tau) &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} + I\right) e^{(1-t)\delta}\left(f(t) - f(1)\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} + I\right) e^{(1-\tau)\delta}\left(f(\tau) - f(1)\right). \end{aligned}$$

En vertu du théorème 1.7.3 (chapitre 1), il en résulte

$$e^{(1-t)\delta}\left(f\left(t\right)-f\left(1\right)\right),\ e^{(1-\tau)\delta}\left(f\left(\tau\right)-f\left(1\right)\right)\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right).$$

Par conséquent $II_5\left(.\right)\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right)$.

Finalement, pour $II_6\left(t\right)=-\dfrac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)U_1\left(1-t\right)f\left(1\right)$, on aura

$$\begin{aligned} II_6\left(t\right)-II_6\left(\tau\right) &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(U_1\left(1-t\right)-U_1\left(1-\tau\right)\right)f\left(1\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(e^{(1-t)\delta}-e^{(1-\tau)\delta}\right)f\left(1\right). \end{aligned}$$

Donc $II_6\left(.\right)\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right)$. Enfin, puisque $f\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right)$ par hypothèse, alors

$$II\left(.\right)\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right).$$

Montrons maintenant que $I\left(.\right)\in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right)$. On a

$$\begin{aligned} I\left(t\right) &= U_2\left(t\right)A\xi_0+U_1\left(1-t\right)A\xi_1\\ &= U_2\left(t\right)\left(I-Z\right)^{-1}A\left(u_0-U_1\left(1\right)u_1\right)\\ &\quad +\frac{1}{2}U_2\left(t\right)\left(I-Z\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}A\\ &\quad \left(\int_0^1 U_1\left(s\right)f\left(s\right)ds-U_1\left(1\right)\int_0^1 U_2\left(1-s\right)f\left(s\right)ds\right)\\ &\quad +U_1\left(1-t\right)\left(I-Z\right)^{-1}A\left(u_1-U_2\left(1\right)u_0\right)\\ &\quad +\frac{1}{2}U_1\left(1-t\right)\left(I-Z\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}A\\ &\quad \left(\int_0^1 U_2\left(1-s\right)f\left(s\right)ds-U_2\left(1\right)\int_0^1 U_1\left(s\right)f\left(s\right)ds\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} I\left(t\right) &= \left(I-Z\right)^{-1}U_2\left(t\right)Au_0-\left(I-Z\right)^{-1}U_1\left(1\right)U_2\left(t\right)Au_1\\ &\quad +\left(I-Z\right)^{-1}U_1\left(1-t\right)Au_1-\left(I-Z\right)^{-1}U_2\left(1\right)U_1\left(1-t\right)Au_0\\ &\quad +\frac{1}{2}\left(I-Z\right)^{-1}U_2\left(t\right)A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1\left(s\right)f\left(s\right)ds\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(I-Z\right)^{-1}U_2\left(t\right)U_1\left(1\right)A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2\left(1-s\right)f\left(s\right)ds\\ &\quad +\frac{1}{2}\left(I-Z\right)^{-1}U_1\left(1-t\right)A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2\left(1-s\right)f\left(s\right)ds\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(I-Z\right)^{-1}U_2\left(1\right)U_1\left(1-t\right)A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1\left(s\right)f\left(s\right)ds. \end{aligned}$$

Donc

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t) + I_6(t).$$

On a

$$I_1(t) = (I - Z)^{-1} U_2(t) Au_0 - (I - Z)^{-1} U_1(1) U_2(t) Au_1.$$

On écrit, pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$

$$\begin{aligned} I_1(t) - I_1(\tau) &= (I - Z)^{-1} U_2(t) Au_0 - (I - Z)^{-1} U_1(1) U_2(t) Au_1 \\ &\quad - (I - Z)^{-1} U_2(\tau) Au_0 - (I - Z)^{-1} U_1(1) U_2(\tau) Au_1 \\ &= (I - Z)^{-1} (U_2(t) - U_2(\tau)) (Au_0 - U_1(1) Au_1), \end{aligned}$$

posons $\sigma = B + (B^2 - A)^{1/2}$, où $-\sigma$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $\{U_2(t)\}$ dans X. D'où

$$I_1(t) - I_1(\tau) = (I - Z)^{-1} \left(e^{-t\sigma} - e^{-\tau\sigma}\right) (Au_0 - U_1(1) Au_1).$$

Or par hypothèse $Au_0, Au_1 \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2; \infty) = D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta; +\infty)$, (voir la remarque 1.4.2 (chapitre 1)). Grâce au théorème 1.7.3, on obtient

$$e^{-t\sigma}(Au_0 - U_1(1) Au_1),\ e^{-\tau\sigma}(Au_0 - U_1(1) Au_1) \in C^\theta([0,1]; X).$$

Donc $I_1(.) \in C^\theta([0,1]; X)$.

Pour $I_2(t) = (I - Z)^{-1} U_1(1-t) Au_1 - (I - Z)^{-1} U_2(1) U_1(1-t) Au_0$, de manière semblable à la précédente, il est facile de montrer que

$$I_2(.) \in C^\theta([0,1]; X).$$

Pour $I_3(t) = \dfrac{1}{2}(I - Z)^{-1} U_2(t) A (B^2 - A)^{-1/2} \displaystyle\int_0^1 U_1(s) f(s)\, ds$, on a

$$I_3(t) - I_3(\tau) = \frac{1}{2}(I - Z)^{-1} (U_2(t) - U_2(\tau)) A \left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_0^1 U_1(s) f(s)\, ds.$$

Or $f(s) = (f(s) - f(0)) - f(0)$, d'où

$$\begin{aligned}
&A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds\\
&\quad=\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds\\
&\quad=\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^1 U_1(s)\,(f(s)-f(0))\,ds\\
&\qquad+\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^1 U_1(s)\,f(0)\,ds.
\end{aligned}$$

En vertu du lemme 2.2.3 (chapitre 2), on aura

$$\begin{aligned}
&A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds\\
&\quad=\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s)\,(f(s)-f(0))\,ds\\
&\qquad+\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)(U_1(1)-I)\,f(0)\\
&\quad=\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\beta_1+\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\beta_2.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&I_3(t)-I_3(\tau)\\
=\;&\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)(U_2(t)-U_2(\tau))\\
&\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s)\,(f(s)-f(0))\,ds\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)(U_2(t)-U_2(\tau))\,(U_1(1)-I)\,f(0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3(t)-I_3(\tau)=\;&\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)U_2(t)\\
&\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s)\,(f(s)-f(0))\,ds\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)U_2(\tau)\\
&\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s)\,(f(s)-f(0))\,ds\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)U_2(t)\,(U_1(1)-I)\,f(0)\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)U_2(\tau)\,(U_1(1)-I)\,f(0).
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème 1.7.3 (chapitre 1), on a

$$\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s)\,(f(s)-f(0))\,ds\in D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta;+\infty).$$

D'où
$$U_2(t)\int_0^1 \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s)\left(f(s)-f(0)\right)ds \in C^\theta\left([0,1];X\right).$$
La même chose pour
$$U_2(\tau)\int_0^1 \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s)\left(f(s)-f(0)\right)ds \in C^\theta\left([0,1];X\right).$$
D'autre part, puisque
$$f(0)\in D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}\left(\theta;+\infty\right),$$
alors
$$U_2(t)\,f(0),\ U_2(\tau)\,f(0)\in C^\theta\left([0,1];X\right).$$
Donc
$$I_3(.)\in C^\theta\left([0,1];X\right).$$
Pour $I_4(t)=-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}U_2(t)\,U_1(1)\,A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds$, on a
$$\begin{aligned}&I_4(t)-I_4(\tau)\\ =\;&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(U_2(t)-U_2(\tau)\right)U_1(1)\,A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds.\end{aligned}$$
Ensuite, du fait que $f(s)=(f(s)-f(1))+f(1)$, on aura
$$\begin{aligned}&A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds\\
&=\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds\\
&=\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^1 U_2(1-s)\left(f(s)-f(1)\right)ds\\
&\quad+\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^1 U_2(1-s)\,f(1)\,ds.\end{aligned}$$
En vertu du lemme 2.2.3 (chapitre 2), on aura
$$\begin{aligned}&A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds\\
&=\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_0^1\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(1-s)\left(f(s)-f(1)\right)ds\\
&\quad+\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\left(I-U_2(1)\right)f(1).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
I_4(t)-I_4(\tau) &= -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)U_1(1)\,U_2(t)\\
&\int_0^1 \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(1-s)\,(f(s)-f(1))\,ds\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)U_1(1)\,U_2(\tau)\\
&\int_0^1 \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(1-s)\,(f(s)-f(1))\,ds\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)U_1(1)\,U_2(t)\,((I-U_2(1))\,f(1))\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)U_1(1)\,U_2(\tau)\,((I-U_2(1))\,f(1)).
\end{aligned}$$

D'après le théorème 1.7.3, du fait que

$$\int_0^1 \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(1-s)\,(f(s)-f(1))\,ds\in D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta;+\infty),$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}
U_2(t)\int_0^1 \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(1-s)\,(f(s)-f(1))\,ds &\in C^\theta([0,1];X),\\
U_2(\tau)\int_0^1 \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(1-s)\,(f(s)-f(1))\,ds &\in C^\theta([0,1];X).
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque

$$f(1)\in D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta;+\infty),$$

on en déduit que

$$U_2(t)\,f(1)\,,U_2(\tau)\,f(1)\in C^\theta([0,1];X).$$

Par conséquent

$$I_4(.)\in C^\theta([0,1];X).$$

Concernant $I_5(t)=\dfrac{1}{2}(I-Z)^{-1}U_1(1-t)\,A\,(B^2-A)^{-1/2}\displaystyle\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds$, on a

$$\begin{aligned}
&I_5(t)-I_5(\tau)\\
=\;&\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(U_1(1-t)-U_1(1-\tau))\,A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

D'après le raisonnement fait pour $II_5(.)$ et $II_6(.)$, on a

$$U_1(1-t) - U_1(1-\tau) = U_1(1)\left(e^{-t\delta} - e^{-\tau\delta}\right).$$

Le fait que $f(s) = (f(s) - f(1)) + f(1)$ implique

$$\begin{aligned}
&A(B^2-A)^{-1/2}\int_0^1 U_2(1-s) f(s)\, ds \\
&= \left(B(B^2-A)^{-1/2} - I\right)\int_0^1 \left(B + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right) U_2(1-s)(f(s)-f(1))\, ds \\
&\quad + \left(B(B^2-A)^{-1/2} - I\right)\left(B + (B^2-A)^{1/2}\right)\int_0^1 U_2(1-s) f(1)\, ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_5(t) - I_5(\tau) &= \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} - I\right) U_1(1)\left(e^{-t\delta} - e^{-\tau\delta}\right) \\
&\quad \int_0^1 \left(B + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right) U_2(1-s)(f(s)-f(1))\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2} - I\right) U_1(1)\left(e^{-t\delta} - e^{-\tau\delta}\right) \\
&\quad \left(B + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^1 U_2(1-s) f(1)\, ds.
\end{aligned}$$

En faisant de même que pour $I_4(.)$, il est facile de montrer que

$$I_5(.) \in C^\theta([0,1]; X).$$

Finalemet, pour

$$I_6(t) = -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1} U_2(1) U_1(1-t) A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1(s) f(s)\, ds,$$

on a

$$\begin{aligned}
I_6(t) - I_6(\tau) &= -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1} U_2(1)(U_1(1-t) - U_1(1-\tau)) \\
&\quad A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1(s) f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer le même raisonnement utilisé pour $I_5(.)$ pour montrer que

$$I_6(.) \in C^\theta([0,1]; X).$$

Donc montrer que

$$I\left(.\right) \in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right),\ 0<\theta<1.$$

Rappelons qu'on avait montré que pour $Au\left(t\right)=I\left(t\right)+II\left(t\right)$, alors

$$I\left(.\right),II\left(.\right) \in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right),\ 0<\theta<1.$$

En conclusion

$$Au\left(.\right) \in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right),\ 0<\theta<1.$$

3.2.2 $Bu'\left(.\right) \in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right),\ 0<\theta<1$

Calculons $Bu'\left(t\right)$. On a

$$\begin{aligned} u'\left(t\right)= & \frac{d}{dt}U_2\left(t\right)\xi_0+\frac{d}{dt}U_1\left(1-t\right)\xi_1 \\ & -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2\left(t-s\right)f\left(s\right)ds+\int_t^1 U_1\left(s-t\right)f\left(s\right)ds\right)\right) \end{aligned}$$

En vertu du lemme 2.2.4, puis en utilisant les formules $(2.31')$ et $(2.37')$, on aura

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2\left(t-s\right)f\left(s\right)ds+\int_t^1 U_1\left(s-t\right)f\left(s\right)ds\right)\right) \\ & \qquad =\frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^t U_2\left(t-s\right)f\left(s\right)ds \\ & \qquad\quad -\frac{1}{2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1 U_1\left(s-t\right)f\left(s\right)ds. \end{aligned}$$

Du fait que $f\left(s\right)=\left(f\left(s\right)-f\left(t\right)\right)+f\left(t\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} u'\left(t\right)= & -\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2\left(t\right)\xi_0-\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1\left(1-t\right)\xi_1 \\ & +\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^t U_2\left(t-s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(t\right)\right)ds \\ & +\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^t U_2\left(t-s\right)f\left(t\right)ds \\ & +\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_t^1 U_1\left(s-t\right)\left(f\left(s\right)-f\left(t\right)\right)ds \\ & +\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_t^1 U_1\left(s-t\right)f\left(t\right)ds. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 2.2.3 (chapitre 2), on en déduit que

$$\begin{aligned} u'(t) = \quad & -U_2(t)\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)\xi_0 - U_1(1-t)\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)\xi_1 \\ & +\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)\int_0^t U_2(t-s)(f(s)-f(t))\,ds \\ & +\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}(I-U_2(t))f(t) \\ & +\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)\int_t^1 U_1(s-t)(f(s)-f(t))\,ds \\ & +\frac{1}{2}(B^2-A)^{-1/2}(U_1(1-t)-I)f(t). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & Bu'(t) \\ = \quad & -U_2(t)B\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_0 - U_1(1-t)B\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_1 \\ & +\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2} \\ & \left(\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_0^t U_2(t-s)(f(s)-f(t))\,ds+(I-U_2(t))f(t)\right) \\ & +\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2} \\ & \left(\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\int_t^1 U_1(s-t)(f(s)-f(t))\,ds+(U_1(1-t)-I)f(t)\right). \end{aligned}$$

En d'autres termes

$$Bu'(t) = F_1(t)+F_2(t)+F_3(t)+F_4(t).$$

Montrons maintenant que $Bu'(.) \in C^\theta([0,1];X)$, $0<\theta<1$.

Pour $F_1(t) = -U_2(t)B\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)\xi_0$, puisque $\xi_0 \in D(A)$ alors on peut écrire

$$F_1(t) = -U_2(t)B\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}A\xi_0.$$

Grâce au lemme 2.2.2 (chapitre 2), on obtient

$$F_1(t) = -U_2(t)B\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}A\xi_0.$$

Pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$, on a

$$F_1(t)-F_1(\tau) = -B\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}(U_2(t)-U_2(\tau))A\xi_0,$$

ensuite, pour $\sigma = -\left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)$, on écrit

$$(U_2(t) - U_2(\tau)) A\xi_0 = \left(e^{-t\sigma} - e^{-\tau\sigma}\right) A\xi_0.$$

D'où

$$\begin{aligned} F_1(t) - F_1(\tau) &= -B\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} U_2(t) A\xi_0 \\ &\quad + B\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} U_2(\tau) A\xi_0. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse et d'après la remarque 1.4.3, il est clair que

$$A\xi_0 \in D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta; +\infty).$$

En vertu de la proposition 1.7.3, il vient

$$e^{-t\sigma} A\xi_0, e^{-\tau\sigma} A\xi_0 \in C^\theta([0,1]; X).$$

Donc

$$F_1(.) \in C^\theta([0,1]; X).$$

Concernant $F_2(t) = -U_1(1-t) B\left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)\xi_1$, puisque $\xi_0 \in D(A)$ alors on peut écrire

$$F_2(t) = -U_1(1-t) B\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) A^{-1} A\xi_1.$$

Grâce au lemme 2.2.2 (chapitre 2), on aura

$$F_2(t) = -U_1(1-t) B\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} A\xi_1.$$

Ensuite, pour $\delta = B - (B^2 - A)^{1/2}$on a

$$\begin{aligned} F_2(t) - F_2(\tau) &= -B\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} (U_1(1-t) - U_1(1-\tau)) A\xi_1 \\ &= -B\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(e^{-t\delta} - e^{-\tau\delta}\right) A\xi_1. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse et d'après la remarque 1.4.3, il est clair que

$$A\xi_1 \in D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta; +\infty).$$

En vertu de la proposition 1.7.3, on obtient

$$e^{-t\delta}A\xi_1, e^{-\tau\delta}A\xi_1 \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right).$$

Donc

$$F_2\left(.\right) \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right).$$

Pour

$$F_2\left(t\right) = \frac{1}{2}B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}$$
$$\left(\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\int_0^t U_2\left(t-s\right)\left(f\left(s\right) - f\left(t\right)\right)ds + \left(I - U_2\left(t\right)\right)f\left(t\right)\right),$$

du fait que $f\left(t\right) = \left(f\left(t\right) - f\left(0\right)\right) + f\left(0\right)$, on a

$$\begin{aligned}
F_3\left(t\right) &= \frac{1}{2}B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\int_0^t \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)U_2\left(t-s\right)\left(f\left(s\right) - f\left(t\right)\right)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)f\left(t\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)U_2\left(t\right)\left(f\left(t\right) - f\left(0\right)\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)U_2\left(t\right)f\left(0\right).
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$F_3\left(t\right) = Y_1\left(t\right) + Y_2\left(t\right) + Y_3\left(t\right) + Y_4\left(t\right).$$

Pour $Y_1\left(t\right) = \frac{1}{2}B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\int_0^t \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)U_2\left(t-s\right)\left(f\left(s\right) - f\left(t\right)\right)ds.$

Du fait que $-\sigma = -\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $\{U_2\left(t\right)\}$ dans X, alors d'après le théorème 1.7.3, il vient

$$\int_0^t \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)U_2\left(t-s\right)\left(f\left(s\right) - f\left(t\right)\right)ds \in D_{-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}}\left(\theta; +\infty\right).$$

Donc

$$Y_1\left(.\right) \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right).$$

Concernant $Y_2\left(t\right) = \frac{1}{2}B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)f\left(t\right)$,

du fait que $f \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right)$, on en déduit aussitôt que

$$Y_2\left(.\right) \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right).$$

En appliquant le théorème 1.7.3, il est est facile d'affirmer que

$$Y_3\left(.\right) \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right).$$

Pour $Y_4(t) = -\dfrac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_2(t)\,f(0)$, il suffit d'appliquer la proposition 1.7.3 pour montrer que

$$Y_4(.) \in C^{\theta}([0,1];X).$$

Par conséquent

$$F_3(.) \in C^{\theta}([0,1];X).$$

Concernant $F_4(t)$, on a

$$\begin{aligned}
F_4(t) &= \frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s-t)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad+\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(1-t)\,f(t) \\
&\quad-\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)f(t).
\end{aligned}$$

Du fait que $f(t) = (f(t)-f(1)) + f(1)$, on aura

$$\begin{aligned}
F_4(t) &= \frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s-t)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad+\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(1-t)\left(f(t)-f(1)\right) \\
&\quad+\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(1-t)\,f(1) \\
&\quad-\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)f(t).
\end{aligned}$$

D'où

$$F_4(t) = Z_1(t) + Z_2(t) + Z_3(t) + Z_4(t).$$

Pour

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= \frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1(s-t)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&= \frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1\frac{\partial}{\partial s}U_1(s-t)\left(f(s)-f(t)\right)ds.
\end{aligned}$$

De manière analogue à celle faite pour $F_1(.)$, il est est facile de montrer que

$$Z_1(.) \in C^{\theta}([0,1];X).$$

Pour $Z_2(t)$, en appliquant le théorème 1.7.3, on aura

$$Z_2(.) \in C^\theta([0,1];X).$$

De la même manière, on obtient

$$Z_3(.) \in C^\theta([0,1];X).$$

Finalement, pour $Z_4(t)$ du fait que $f \in C^\theta([0,1];X)$ on obtient

$$Z_4(.) \in C^\theta([0,1];X).$$

Ainsi

$$F_4(.) \in C^\theta([0,1];X).$$

En conclusion

$$Bu'(.) \in C^\theta([0,1];X),\ 0<\theta<1.$$

3.2.3 $u''(.) \in C^\theta([0,1];X),\ 0<\theta<1$

Calculons d'abord $u''(t)$, on a

$$\begin{aligned} u''(t) = \ & \frac{d^2}{dt^2}\left(U_2(t)\xi_0 + U_1(1-t)\xi_1\right) \\ & -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2(t-s)f(s)\,ds + \int_t^1 U_1(s-t)f(s)\,ds\right)\right) \end{aligned}$$

On pose

$$u''(t) = Q_1(t) + Q_2(t).$$

Concernant $Q_1(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(U_2(t)\xi_0 + U_1(1-t)\xi_1\right)$, d'après le calcul précédent de $u'(t)$ et grâce au lemme 2.2.4 (chapitre 2), on a

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{d}{dt}\left(-U_2(t)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_0 - U_1(1-t)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_1\right) \\ &= -\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\frac{d}{dt}U_2(t)\xi_0 - \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\frac{d}{dt}U_1(1-t)\xi_1 \\ &= \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2 U_2(t)\xi_0 + \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2 U_1(1-t)\xi_1. \end{aligned}$$

Pour $Q_2(t)$, puisque $Q_2(t)$ désigne la solution particulière de l'équation différentielle (2.1) alors d'après les calculs faits au chapitre 2, on obtient

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= f(t) - \frac{1}{2}\left(\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\right)^2 \\ &\quad \left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)} f(s)\, ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\right)^2 \left(B^2 - A\right)^{1/2} \\ &\quad \int_t^1 e^{(t-s)\left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)} f(s)\, ds \end{aligned}$$

Explicitons encore l'expression de $Q_2(t)$. En vertu du lemme 2.2.4, on a

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= f(t) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \\ &\quad \int_0^t \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_2(t-s)\, f(s)\, ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \\ &\quad \int_t^1 \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s-t)\, f(s)\, ds, \end{aligned}$$

et puisque $f(s) = (f(s) - f(t)) + f(t)$, alors

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= f(t) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_0^t \frac{d}{dt} U_2(t-s)\,(f(s) - f(t))\, ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2 \left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_0^t U_2(t-s)\, f(t)\, ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2 \left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_t^1 \frac{d}{dt} U_1(s-t)\, f(s)\, ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2 \left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_t^1 U_1(s-t)\, f(s)\, ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2.3 et la remarque 2.2.1 (chapitre 2), on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t U_2(t-s)\, f(t)\, ds \\
&\qquad = J_-(t, f(t)) \\
&\qquad = \left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1} \left(I - e^{-tB} V(t)\right) f(t) \\
&\qquad = \left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1} (I - U_2(t))\, f(t) \\
&\qquad = \left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1} f(t) - \left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1} U_2(t)\, f(t),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_t^1 U_1(s-t)\, f(s)\, ds \\
&\qquad = J_+(1-t, f(t)) \\
&\qquad = -\left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1} \left(I - e^{(1-t)B} V(1-t)\right) f(t) \\
&\qquad = -\left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1} f(t) + \left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1} U_1(1-t)\, f(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
Q_2(t) \quad = \quad & f(t) \\
& -\frac{1}{2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_0^t \frac{d}{dt} U_2(t-s)\, (f(s) - f(t))\, ds \\
& -\frac{1}{2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(t) \\
& +\frac{1}{2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} U_2(t)\, f(t) \\
& -\frac{1}{2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_t^1 \frac{d}{dt} U_1(s-t)\, (f(s) - f(t))\, ds \\
& +\frac{1}{2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2 \left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(t) \\
& -\frac{1}{2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2 \left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_t^1 U_1(s-t)\, f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
Q_2(t) = & -\frac{1}{2}\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)(B^2 - A)^{-1/2} \int_0^t \frac{d}{dt} U_2(t-s)\, (f(s) - f(t))\, ds \\
& -\frac{1}{2}\left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)(B^2 - A)^{-1/2} \int_t^1 \frac{d}{dt} U_1(s-t)\, (f(s) - f(t))\, ds \\
& +\frac{1}{2}\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)(B^2 - A)^{-1/2} U_2(t)\, f(t) \\
& -\frac{1}{2}\left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)(B^2 - A)^{-1/2} U_1(1-t)\, f(t).
\end{aligned}$$

En conclusion, on aura

$$\begin{aligned}
u''(t) &= \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2 U_2(t)\,\xi_0 + \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2 U_1(1-t)\,\xi_1 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^t \frac{d}{dt}U_2(t-s)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1 \frac{d}{dt}U_1(s-t)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}U_2(t)\,f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}U_1(1-t)\,f(t).
\end{aligned}$$

Du fait que

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left(f(t)-f(0)\right)+f(0), \\
f(t) &= \left(f(t)-f(1)\right)+f(1),
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
u''(t) &= \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2 U_2(t)\,\xi_0 + \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2 U_1(1-t)\,\xi_1 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^t \frac{d}{dt}U_2(t-s)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1 \frac{d}{dt}U_1(s-t)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}U_2(t)\left(f(t)-f(0)\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}U_2(t)\,f(0) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}U_1(1-t)\left(f(t)-f(1)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}U_1(1-t)\,f(1).
\end{aligned}$$

En d'autres termes

$$u''(t)=\sum_{i=1}^{8}R_i(t).$$

Il est facile de montrer que $u''(.) \in C^\theta\left([0,1];X\right)$, $0<\theta<1$.

En effet, pour $R_1(.)$ et $R_2(.)$, en appliquant le raisonnement fait pour $F_1(.)$ et $F_2(.)$ respectivement, on peut affirmer que

$$R_1(.), R_2(.) \in C^{\theta}([0,1]; X), 0 < \theta < 1$$

De même, pour $R_3(.)$ et $R_4(.)$, en raisonnant de la même manière que pour $II_1(.)$ et $II_2(.)$, on aura

$$R_3(.), R_4(.) \in C^{\theta}([0,1]; X), 0 < \theta < 1.$$

Concernant $R_5(.)$ et $R_6(.)$, en raisonnant de la même manière que pour $II_3(.)$ et $II_4(.)$, on aura

$$R_5(.), R_6(.) \in C^{\theta}([0,1]; X), 0 < \theta < 1.$$

Enfin, pour $R_7(.)$ et $R_8(.)$, il suffit de suivre le raisonnement fait pour $II_5(.)$ et $II_6(.)$ afin d'avoir

$$R_7(.), R_8(.) \in C^{\theta}([0,1]; X), 0 < \theta < 1.$$

Le théorème 3.2.1 est ainsi complètement démontré.

Au chapitre suivant, on va illustrater les résultats obtenus à l'aide d'exemples d'équations aux dérivées partielles.