Chapitre 2

Étude d'existence et d'unicité de la solution stricte

2.1 Position du problème et hypothèses

Soit X un espace de Banach complexe.

Ce travail est consacré à l'étude de l'équation différentielle abstraite complète de type elliptique du second ordre

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t \in (0,1), \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites non homogènes

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \in D(A), \\ u(1) = u_1 \in D(A), \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f \in C^{\theta}([0,1]; X)$, avec $0 < \theta < 1$, désigne une fonction de Hölder à exposant θ, définie sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans X. A et B étant deux opérateurs linéaires fermés à domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans X.

On cherche une solution stricte u du problème aux limites (2.1)-(2.2), autrement dit : On cherche une fonction u satisfaisant (2.1)-(2.2) et aussi

$u \in C^2([0,1]; X) \cap C([0,1]; D(A))$ avec $u' \in C([0,1]; D(B))$.

Dans tout ce chapitre, on s'intéressera à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution stricte du problème (2.1)-(2.2) et ceci en utilisant les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans } X, \text{ tel que} \\ \forall \lambda \geqslant 0, \exists \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \in L(X) \text{ avec} \\ \left\| \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant C/(1+\lambda), \end{cases} \tag{2.3}$$

Grâce au Théorème 1.3.4, l'hypothèse (2.3) implique que l'opérateur $-\left(B^2 - A\right)^{1/2}$est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{V(t)\}$, $t \geqslant 0$, dans X.

(voir Krein [14], p.119),

$$\begin{cases} \left(B^2 - A\right) \text{ et } B \text{ commutent au sens des résolvantes, i.e. :} \\ \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} (B - \mu I)^{-1} = (B - \mu I)^{-1} \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1}, \\ \forall \mu \in \rho(B), \forall \lambda \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\text{L'opérateur } B \text{ engendre un groupe fortement continu } \left\{e^{tB}\right\} \text{ dans } X, \tag{2.5}$$

$$D(A) \subseteq D\left(B^2\right), \tag{2.6}$$

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subseteq D(B). \tag{2.7}$$

Commentaires (sur les hypothèses)

1°) L'hypothèse (2.3) exprime l'ellipticité de l'équation différentielle (2.1), elle généralise celle faite par Krein [14], dans le cas $B = 0$.

Cet auteur a supposé que

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{1 + |\lambda|} \text{ pour } \lambda \leqslant 0.$$

Ce cas est dit elliptique, de plus cette hypothèse permet de définir les puissances fractionnaires $A^{-1/2}$ et $A^{1/2}$ de l'opérateur linéaire fermé A à domaine dense dans X. Par conséquent, il est possible d'utiliser les racines carrées de l'opérateur linéaire $B^2 - A$, en particulier les opérateurs linéaires $\left(B^2 - A\right)^{1/2}$ et $\left(B^2 - A\right)^{-1/2}$.

2°) L'hypothèse (2.5) implique que $\overline{D(B)} = X$ et que les opérateurs linéaires B

et $-B$ sont des générateurs infinitésimaux des C_0-semi-groupes $\left\{e^{tB}\right\}$ et $\left\{e^{-tB}\right\}$ respectivement.

3°) Les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.5) nous permettent d'appliquer la Théorie des sommes d'opérateurs linéaires comme dans Da Prato, G., Grisvard [4].

4°) Si X est un espace de Hilbert, les opérateurs linéaires B et $B^2 - A$ sont auto-adjoints et positifs (idem pour l'opérateur linéaire B^2). Si de plus $D(A) \subseteq D(B^2)$, alors du fait que $D(A) = D(B^2 - A) \subseteq D(B^2)$, une simple modification du théorème de Heinz (chapitre 1) nous donne $D\left((B^2 - A)^{1/2}\right) \subseteq D(B)$ (voir Tanabe [22], p. 44).

5°) Si X est un espace de Banach, le théorème 1.3.6 (chapitre 1) nous permet d'obtenir l'hypothèse (2.7).

6°) En vertu du théorème 1.3.8 (chapitre 1), en posant $L = (B^2 - A)^{1/2}$ et $B = iN$, alors les opérateurs $-L \pm iN$ engendrent des semi-groupes analytiques, d'où l'hypothèse (2.46) qu'on citera ultérieurement.

D'après les hypothèses (2.4), (2.6) et (2.7), il vient

$$B^2 \left(B^2 - A\right)^{-1} = B \left(B^2 - A\right)^{-1/2} B \left(B^2 - A\right)^{-1/2} \in L(X) \tag{2.8}$$

$$A \left(B^2 - A\right)^{-1} \in L(X) \tag{2.9}$$

7°) La condition

$$u(0),\ u(1) \in D(A), \tag{2.10}$$

est indispensable (très importante) pour que la fonction $u(.)$ soit solution de l'équation (2.1). En effet, on sait que $u \in C([0,1]; D(A))$, en particulier u est continue en 0 et en 1. Si $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = u(0)$ et $u(0)$, $u(0) \notin \overline{D(A)}$ cela signifie que l'équation (2.1) n'est pas vérifiée.

8°) Le terme "Abstrait" signifie que l'espace X considéré ici est de Banach de dimension infinie et que les opérateurs A et B sont abstraits.

2.2 Étude d'existence et d'unicité de la solution stricte

2.2.1 Résultat principal d'existence et d'unicité

On démontrera le résultat principal suivant :

Théorème 2.2.1 *Supposons que les conditions* (2.3) $\sim$ (2.7) *sont vérifiées et que, de plus, les opérateurs* A *et* $B+(B^2-A)^{1/2}$ *ont des inverses bornés. Alors pour toute fonction* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$ *avec* $0<\theta<1$ *et pour chaque* $u_0,\ u_1 \in D(A)$, *le problème aux limites* (2.1)-(2.2) *admet une solution stricte unique* $u(.)$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

La preuve de ce théorème nécessite plusieurs résultats péliminaires dont la :

Proposition 2.2.1 *Supposons que les conditions* (2.3) $\sim$ (2.7) *sont vérifiées et que, de plus, l'opérateur* A *admet un inverse borné alors*

$$B\left(B^2-A\right)^{-1/2}y=\left(B^2-A\right)^{-1/2}By,\quad \forall y\in D(B). \tag{2.11}$$

$$\left(B^2-A\right)^{1/2}BA^{-1}x=B\left(B^2-A\right)^{1/2}A^{-1}x,\ \forall x\in X. \tag{2.12}$$

Preuve. De l'hypothèse (2.3) on peut définir les puissances fractionnaires de l'opérateur linéaire B^2-A. En particulier, on définit l'opérateur linéaire $\left(B^2-A\right)^{-1/2}$ par

$$\left(B^2-A\right)^{-1/2}y=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\lambda^{-1/2}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}y\,d\lambda,$$

où γ est une courbe infinie joignant $\infty e^{-i\theta}$ à $\infty e^{i\theta}, 0<\theta<\pi$ et $\lambda\in\rho\left(-\left(B^2-A\right)\right)$.
Prouver la formule (2.11) revient à montrer l'égalité suivante pour $y\in D(B)$

$$B\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\lambda^{-1/2}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}y\,d\lambda\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\lambda^{-1/2}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By\,d\lambda.$$

Appliquons la proposition 1.1.1 (chapitre 1). Pour cela on vérifie que ses hypothèses sont satisfaites :

$i)$ L'opérateur linéaire B est fermé par hypothèse.

$ii)$ $\lambda^{-1/2}(B^2 - A + \lambda I)^{-1} y \in D(B)$, car pour $y \in X$, on a

$$\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y \in D\left(B^2 - A\right) = D(A)$$

et $D(A) \subseteq D(B^2) \subset D(B)$.

$iii)$ L'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \lambda^{-1/2}(B^2 - A + \lambda I)^{-1} y \, d\lambda$ est absolument convergente.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\gamma \lambda^{-1/2} \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y \, d\lambda \right\|_X &\leqslant \int_\gamma \left\| \lambda^{-1/2} \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y \right\|_X d\lambda \\
&\leqslant \int_\gamma |\lambda|^{-1/2} \left\| \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y \right\|_X d\lambda \\
&\leqslant \|y\|_X \int_\gamma |\lambda|^{-1/2} \left\| \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} d\lambda \\
&\leqslant \|y\|_X \int_\gamma |\lambda|^{-1/2} \frac{C}{1 + |\lambda|} d\lambda \\
&\leqslant \|y\|_X \int_\gamma \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} d\lambda.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est convergente, d'où $iii)$.

$iv)$ L'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \lambda^{-1/2} B(B^2 - A + \lambda I)^{-1} y \, d\lambda$ est absolument convergente.

D'abord, on doit montrer l'égalité suivante pour $\lambda \in \rho(-(B^2 - A))$

$$B\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y = \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} By, \ \forall y \in D(B).$$

On a, d'une part

$$\begin{aligned}
B\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y &= (B - \mu + \mu)\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y \\
&= (B - \mu)\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y + \mu\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y.
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par $(B - \mu)^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
(B - \mu)^{-1} B\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y &= \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y \\
&\quad + \mu (B - \mu)^{-1}\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y.
\end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part, en utilisant le même raisonnement pour $\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By$, on obtient

$$\begin{aligned}(B-\mu)^{-1}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By &= (B-\mu)^{-1}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}(B-\mu)\,y \\ &\quad +\mu\,(B-\mu)^{-1}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}y.\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (2.4), on aura

$$\begin{aligned}(B-\mu)^{-1}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By &= \left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}(B-\mu)^{-1}(B-\mu)\,y \\ &\quad +\mu\,(B-\mu)^{-1}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}y.\end{aligned} \tag{2}$$

De (1) et (2), on déduit

$$(B-\mu)^{-1}B\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}y=(B-\mu)^{-1}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By.$$

Ensuite, en multipliant les deux membres par l'opérateur linéaire $(B-\mu)$, on obtient

$$B\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}y=\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By,\ \forall y\in D(B). \tag{3}$$

Montrons maintenant *iv*).

Grâce à (3), on peut écrire

$$\int_\gamma \lambda^{-1/2}B\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}yd\lambda=\int_\gamma \lambda^{-1/2}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}Byd\lambda,\forall y\in D(B).$$

D'où

$$\begin{aligned}\left\|\int_\gamma \lambda^{-1/2}B\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}y\,d\lambda\right\|_X &= \left\|\int_\gamma \lambda^{-1/2}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By\,d\lambda\right\|_X \\ &\leqslant \int_\gamma \left\|\lambda^{-1/2}\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By\right\|_X d\lambda \\ &\leqslant \int_\gamma |\lambda|^{-1/2}\left\|\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}By\right\|_X d\lambda \\ &\leqslant \|y\|_X\int_\gamma |\lambda|^{-1/2}\left\|\left(B^2-A+\lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)}d\lambda \\ &\leqslant \|y\|_X\int_\gamma |\lambda|^{-1/2}\frac{C}{1+|\lambda|}d\lambda \\ &\leqslant \|y\|_X\int_\gamma \frac{C}{|\lambda|^{3/2}}d\lambda.\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est convergente, donc $iv)$ est prouvée.

Ainsi toutes les hypothèses de la proposition sont satisfaites, on en déduit que $(B^2 - A)^{-1/2} y \in D(B)$ et aussi que

$$\begin{aligned} B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} y &= B\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^{-1/2}\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y\, d\lambda\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^{-1/2} B\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} y\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^{-1/2}\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} By\, d\lambda \\ &= \left(B^2 - A\right)^{-1/2} By. \end{aligned}$$

D'où la formule (2.11). Montrons la formule (2.11).

Puisque $(B^2 - A)^{1/2} A^{-1}x = (B^2 - A)^{-1/2} (B^2 - A) A^{-1}x \in D\left((B^2 - A)^{1/2}\right) \subseteq D(B)$,

et $BA^{-1}x = B(B^2 - A)^{-1/2} (B^2 - A)^{1/2} A^{-1}x$, la formule (2.11) donne

$$BA^{-1}x = (B^2 - A)^{-1/2} B (B^2 - A)^{1/2} A^{-1}x.$$

Par conséquent

$$\left(B^2 - A\right)^{1/2} BA^{-1}x = B\left(B^2 - A\right)^{1/2} A^{-1}x,\ \forall x \in X.$$

D'où, on obtient la formule (2.12).

On remarque que la formule (2.12) peut s'écrire aussi sous la forme

$$\left(B^2 - A\right)^{1/2} By = B\left(B^2 - A\right)^{1/2} y,\ \forall y \in D(A) \tag{2.12'}$$

avec $D(A) \subseteq D\left((B^2 - A)^{1/2} B\right) \cap D\left(B(B^2 - A)^{1/2}\right)$. ■

Lemme 2.2.1 *Supposons que les conditions* (2.3) $\sim$ (2.7) *sont vérifiées et que, de plus, les opérateurs* A *et* $B + (B^2 - A)^{1/2}$ *ont des inverses bornés, alors l'opérateur* $B - (B^2 - A)^{1/2}$ *admet un inverse borné, avec*

$$\begin{cases} \left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right) A^{-1} = I, \\ \left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)\left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right) A^{-1} = I, \end{cases} \tag{2.13}$$

et

$$\begin{cases} \left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1} = \left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)A^{-1}, \\ \left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1} = \left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)A^{-1}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Preuve. *On procède de la manière suivante :*

I- Montrons la formule $\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)A^{-1}=I.$

D'abord, il faut prouver l'égalité suivante

$$D\left(\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\right)=D\left(A\right). \tag{2.15}$$

En effet, on a

i) $D\left(\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)\right)\subseteq D\left(A\right)$. *Il est facile de l'affirmer*

Soit $z\in D\left(\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)\right)$

$= D\left(\left((B^2-A)^{1/2}\right)\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)\right),$

et

$$x=\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)z \tag{2.16}$$

$$y=\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x.$$

D'où

$$y\in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right).$$

Puis

$$\left(B^2-A\right)^{1/2}y=\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x\in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right). \tag{2.17}$$

Par conséquent

$$y\in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)=D\left(A\right), \quad \textit{(voir l'hypothèse (2.6)).}$$

Ensuite

$$B\left(B^2-A\right)^{1/2}y=B\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x.$$

Et puisque $y\in D\left(A\right)$, *alors de la formule* $(2.12')$, *il vient*

$$\left(B^2-A\right)^{1/2}By=B\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x,$$

et

$$By = \left(B^2 - A\right)^{-1/2} B \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} x \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right).$$

De la formule (2.17), *on obtient*

$$\begin{aligned} x &= \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{1/2} y \qquad (2.18) \\ &= B\left(B^2 - A\right)^{1/2} y + \left(B^2 - A\right) y \\ &= \left(B^2 - A\right)^{1/2} By + \left(B^2 - A\right) y \\ &= \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) y. \end{aligned}$$

D'autre part, l'opérateur $(B^2 - A)^{1/2}\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)$ *est injectif.*
En effet, supposons que $(B^2 - A)^{1/2}\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right) y_0 = 0.$
D'où

$$\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) y_0 = \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) y_0 = 0.$$

Or l'opérateur $B + (B^2 - A)^{1/2}$ *est injectif (car il est bijectif), donc* $y_0 = 0$.
Enfin, grâce aux formules (2.16) *et* (2.18), *il résulte que*

$$z = y \in D(A), \text{ d'où i).}$$

ii) $D(A) \subseteq D\left(\left(B - (B^2 - A)^{1/2}\right)\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)\right)$.
En effet, supposons que $x \in D(A)$ *et montrons que*

$$x \in D\left(\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right).$$

On a, d'une part

$$D(A) \subseteq D\left(B^2\right) \subset D(B) \quad \text{et} \quad D(A) = D\left(\left(B^2 - A\right)\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right),$$

d'où

$$D(A) \subset D(B) \cap D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right).$$

Donc

$$D(A) \subset D\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right).$$

Par conséquent
$$x \in D\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right).$$
D'autre part, posons $y=\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)x$ *et montrons que*
$$y \in D\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)=D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right).$$
Du fait que $y=\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)x$, *il suffit de montrer les deux propriétés suivantes:*
a) $Bx \in \left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$.
Ceci est vrai, car d'après la formule $(2.12')$ *de la proposition 2.2.1, on a*
$$D\left(A\right) \subseteq D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}B\right).$$
D'où
$$x \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}B\right), \textit{ ce qui affirme a).}$$
b) $\left(B^2-A\right)^{1/2}x \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$.
En effet, pour $x \in D\left(A\right)$, *on a*
$$\left(B^2-A\right)^{1/2}x=\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)x \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right).$$
D'où b) est prouvée. Donc $\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)x \in D\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$.
Par conséquent $x \in D\left(\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\right)$, *d'où ii).*
Enfin, de i) et ii) on obtient la formule (2.15).
Grâce aux formules (2.12) *et* (2.15), *on obtient*
$$\begin{aligned}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)&\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}\\
&=B^2A^{-1}+B\left(B^2-A\right)^{1/2}A^{-1}-\left(B^2-A\right)^{1/2}BA^{-1}-\left(B^2-A\right)A^{-1}\\
&=B^2A^{-1}+B\left(B^2-A\right)^{1/2}A^{-1}-B\left(B^2-A\right)^{1/2}A^{-1}-B^2A^{-1}+AA^{-1}\\
&=I.\end{aligned}$$
Prouvons maintenent la formule
$$\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}=\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}.$$
Pour cela, on doit prouver que l'opérateur linéaire $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est bijectif.*

1°) *L'opérateur linéaire* $B-(B^2-A)^{1/2}$ *est surjectif.*
En effet, du fait que $\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)A^{-1}=I$, *il vient*

$$\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}y=y,\ \forall y\in X,$$

d'où, on déduit que

$$\forall y\in D\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)=D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right),\ \exists x\in D\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$$

tel que

$$y=\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)x.$$

En effet, il suffit de prendre $x=\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)A^{-1}y$. *Donc on a prouvé* 1°).
2°) *L'opérateur linéaire* $B-(B^2-A)^{1/2}$ *est injectif.*
En effet, soit $y\in D\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)=D\left((B^2-A)^{1/2}\right)$ *tel que*

$$\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)y=0$$

et montrons que $y=0$.
Puisque l'opérateur $\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)$ *est inversible, alors* $\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1}$ *existe et on a*

$$\begin{aligned}\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1}:X&\to D\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)=D\left((B^2-A)^{1/2}\right)\\ x&\mapsto\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1}x,\end{aligned}$$

alors, il existe $x\in X$ *tel que*

$$y=\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x.$$

Par conséquent

$$\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x=0. \tag{2.19}$$

Pour conclure, notons qu'on montre

$$D\left(\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\right)=D\left(A\right).$$

En effet, il suffit de voir la formule (2.15)*. Par conséquent*

$$\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-2}x\in D\left(A\right).$$

Ainsi la formule (2.19) *peut être écrite sous la forme :*

$$\begin{aligned} 0 &= \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x \\ &= \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-2}x \\ &= A\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-2}x \quad \textit{(voir la formule (2.13))} \\ &= A\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x. \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur linéaire A est bijectif, il en résulte que

$$\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}x=0.$$

Et du fait que l'opérateur linéaire $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ est bijectif, d'où

$$\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \text{ l'est aussi, on obtient } x=0.$$

Donc $y=0$. Ainsi l'opérateur $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ est injectif.
Par conséquent, l'opérateur linéaire $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ est bijectif.
Enfin, puisque $\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}=I$, on déduit que

$$\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}=\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}.$$

II- Montrons maintenant que $\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}=I$.
D'abord, il faut prouver l'égalité suivante :

$$D\left(\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\right)=D\left(A\right). \tag{2.15'}$$

En effet, puisque l'opérateur linéaire $\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}$ est bijectif, il suffit de suivre la même démarche que celle faite pour montrer l'égalité (2.15)*.*
Par conséquent

$$\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}=I.$$

Donc

$$\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}=\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}.$$

Les formules (2.13) *et* (2.14) *sont ainsi prouvées.*

Finalement, pour achever la preuve de ce lemme, il nous reste à prouver que l'opérateur linéaire $\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1}$ *est borné (i.e. l'opérateur linéaire* $\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1}\in L(X)$*). En vertu de la formule* (2.13), *on a*

$$\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}=\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}.$$

Or par hypothèse, l'opérateur$A$ *est bijectif à inverse borné, de même pour l'opérateur linéaire* $B+(B^2-A)^{1/2}$, *il en résulte que l'opérateur linéaire* $B-(B^2-A)^{1/2}$ *est bijectif à inverse borné. Donc le lemme 2.2.1 est prouvé.* ■

Lemme 2.2.2 *Supposons que les conditions* (2.3) $\sim$ (2.7) *sont vérifiées et que, de plus, les opérateurs* A *et* $B+$ $(B^2-A)^{1/2}$ *ont des inverses bornés, alors les opérateurs* $B-(B^2-A)^{1/2}$ *et* $B+(B^2-A)^{1/2}$ *sont linéaires et fermés.*

Preuve. 1°) *La linéarité des deux opérateurs* $B-(B^2-A)^{1/2}$ *et* $B+(B^2-A)^{1/2}$ *est évidente, car les opérateurs* B *et* $(B^2-A)^{1/2}$ *le sont.*

2°) *Montrons que les deux opérateurs* $B-(B^2-A)^{1/2}$ *et* $B+(B^2-A)^{1/2}$ *sont fermés. Posons* $L=B-(B^2-A)^{1/2}$ *et* $D(L)=D\left(B-(B^2-A)^{1/2}\right)=D\left((B^2-A)^{1/2}\right)$ *son domaine. On a*

$$L:D(L)\to X$$
$$u\mapsto Lu=x.$$

En vertu du lemme 2.2.1, l'opérateur L *est inversible, donc son inverse* L^{-1}*existe*

$$L^{-1}:X\to D(L)$$
$$x\mapsto L^{-1}x=u.$$

On considère l'opérateur $\mathcal{L}$ *défini par*

$$\mathcal{L}:X\to G(L)\subset X\times X$$
$$x\mapsto \mathcal{L}x=\left(L^{-1}(x),x\right),$$

où $G(L)=\{(u,Lu)\ /\ u\in D(L)\}$ *désigne le graphe de l'opérateur linéaire* L.

Montrons d'abord que l'opérateur $\mathcal{L}$ *est linéaire et continu.*

i) L'opérateur $\mathcal{L}$ *est linéaire car les opérateurs* L *et* L^{-1} *le sont.*

ii) L'opérateur $\mathcal{L}$ est continu, car on a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}x\|_{G(L)} &= \left\|\left(L^{-1}(x), x\right)\right\|_{X\times X} \\
&= \left\|L^{-1}(x)\right\|_X + \|x\|_X \\
&\leqslant \left\|L^{-1}\right\|_X \|x\|_X + \|x\|_X \\
&\leqslant \left(\left\|L^{-1}\right\|_X + 1\right) \|x\|_X \\
&\leqslant k\,\|x\|_X\,,
\end{aligned}$$

où k est une constante positive ($k \geqslant \|L^{-1}\|_X + 1$).

Montrons maintenant que l'opérateur linéaire L est fermé.

Pour cela, on utilise le fait que l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ est continu.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(L)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ dans } X, \text{ quand } n \to \infty \\ y_n = Lx_n \to y \text{ dans } X, \end{cases}$$

et montrons que

$$\begin{cases} x \in D(L), \\ y = Lx. \end{cases}$$

On a

$$y_n = Lx_n \quad \text{implique } x_n = L^{-1}y_n.$$

Puisque $\mathcal{L}$ est continu, alors

$$y_n \to y \quad \text{implique } \mathcal{L}y_n \to \mathcal{L}y.$$

D'où

$$\left(L^{-1}y_n, y_n\right) \to \left(L^{-1}y, y\right).$$

Donc

$$x_n = L^{-1}y_n \to L^{-1}y \in D(L).$$

Or $x_n \to x$ et de l'unicité de la limite, on déduit que

$$x = L^{-1}y \in D(L) \quad \text{et} \quad y = Lx.$$

Par conséquent l'opérateur linéaire $B - (B^2 - A)^{1/2}$ est fermé.

Pour montrer que l'opérateur $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est fermé, le raisonnement est identique au précédent.* ■

Lemme 2.2.3 *Supposons que les conditions* (2.3) $\sim$ (2.7) *sont vérifiées et que, de plus, les opérateurs* A *et* $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *ont des inverses bornés, alors pour tout* $x \in X$,

$$\int_0^t e^{-sB} V(s)\, x ds = J_-(t,x) = \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)x. \qquad (2.20)$$

$$\int_0^t e^{sB} V(s)\, x ds = J_+(t,x) = \left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{tB}V(t)\right)x. \qquad (2.21)$$

$$J_+(t,x) = \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}\left(e^{tB}V(t)-I\right)x. \qquad (2.22)$$

Preuve. *Du fait que* $D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$ *est dense dans* X, *alors la preuve de ce résultat se fait en deux étapes :*

Première étape

On commence par le cas perticulier $x \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$.

Grâce à la proposition 1.1.1 (chapitre 1), on aura

$$\begin{aligned}\left(B^2-A\right)^{1/2} J_-(t,x) &= \left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^t e^{-sB}V(s)\, x ds \\ &= \int_0^t e^{-sB}V(s)\left(B^2-A\right)^{1/2} x ds.\end{aligned}$$

Puisque l'opérateur $-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique* $\{V(t)\}$, $t \geqslant 0$, *alors*

$$\left(B^2-A\right)^{1/2} J_-(t,x) = -\int_0^t e^{-sB}\frac{\partial V(s)}{\partial s} x ds.$$

Et par intégration par parties, on obtient

$$\left(B^2-A\right)^{1/2} J_-(t,x) = x - e^{-tB}V(t)\, x - \int_0^t e^{-sB}V(s)\, Bx ds.$$

Et aussi grâce à la proposition 1.1.1, on aura

$$\left(B^2-A\right)^{1/2} J_-(t,x) = \left(I-e^{-tB}V(t)\right)x - B\int_0^t e^{-sB}V(s)\, x ds.$$

D'où
$$\left(B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)J_{-}\left(t,x\right)=\left(I-e^{-tB}V\left(t\right)\right)x. \tag{2.23}$$

Deuxième étape

Maintenant, on suppose que $x\in X$. *Puisque* $D\left(\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)$ *est dense dans* X, *alors il existe une suite* $\left(x_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\in D\left(\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)$ *telle que* $x_{n}\to x$ *quand* $n\to\infty$.
On a, d'une part
$$J_{-}\left(t,x_{n}\right)\in D\left(\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right).$$
Ensuite, en prenant $J_{-}\left(t,x_{n}\right)=y_{n}$ *et* $J_{-}\left(t,x\right)=y_{0}$, *il vient*
$$y_{n}\to y_{0} \text{ quand } \quad n\to\infty,$$
et aussi
$$\left(I-e^{-tB}V\left(t\right)\right)x_{n}\to\left(I-e^{-tB}V\left(t\right)\right)x, \quad \text{quand } n\to\infty. \tag{2.24}$$
D'autre part, grâce à la formule (2.23) *on obtient*
$$\left(I-e^{-tB}V\left(t\right)\right)x_{n}=\left(B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)J_{-}\left(t,x_{n}\right) \tag{2.25}$$
On a $y_{n}\in D\left(B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)=D\left(\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)$, *avec* $y_{n}\to y_{0}$ *quand* $n\to\infty$, *et* $\left(B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)y_{n}\to y_{1}$, *quand* $n\to\infty$. *Puis de la formule* (2.25) *on obtient*
$$\left(I-e^{-tB}V\left(t\right)\right)x_{n}\to y_{1}. \tag{2.26}$$
D'après les formules (2.24) *et* (2.26), *on aura*
$$y_{1}=\left(I-e^{-tB}V\left(t\right)\right)x. \tag{2.27}$$
Et puisque l'opérateur $B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}$ *est fermé, on en déduit que*
$$y_{1}\in D\left(B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)=D\left(\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right),$$
et que
$$y_{1}=\left(B+\left(B^{2}-A\right)^{1/2}\right)y_{0}. \tag{2.28}$$

D'après les formules (2.27) *et* (2.28), *on obtient*

$$\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) J_-(t,x)=\left(I-e^{-tB}V(t)\right)x.$$

Donc $J_-(t,x)=\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)x,$

ainsi on a prouvé la formule (2.20). *On remarque aussi que*

$$\left(B^2-A\right)^{1/2} J_-(t,x)=\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)x. \tag{2.29}$$

D'une manière analogue on prouve la formule (2.21) *et ceci sachant que l'opérateur* $-B+(B^2-A)^{1/2}$ *est fermé (voir lemme 2.2.2).*

Pour prouver la formule (2.22), *il est nécessaire d'utiliser le lemme 2.2.1.*

On a, en vertu de la formule (2.21)

$$\begin{aligned} J_+(t,x) &= \left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{tB}V(t)\right)x \\ &= \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(e^{tB}V(t)-I\right)x \\ &= \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}\left(e^{tB}V(t)-I\right)x. \end{aligned}$$

D'où la formule (2.22). *Ce qui achève la démonstration de ce lemme.* ■

Remarque 2.2.1 *Si* $0<t<1$, *alors*

$$J_+(1-t,x)=\int_0^1 e^{sB}V(s)\,xds=\int_t^1 e^{(s-t)B}V(s-t)\,xds. \tag{2.30}$$

On aura aussi besoin du lemme suivant, qui sera très utile dans notre travail :

Lemme 2.2.4 *Supposons que les conditions* (2.3) $\sim$ (2.7) *sont vérifiées et que, de plus, les opérateurs* A *et* $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *ont des inverses bornés, alors les opérateurs* $B-(B^2-A)^{1/2}$ *et* $B+(B^2-A)^{1/2}$ *engendrent les semi-groupes analytiques* $\{U_1(t)\}$ *et* $\{U_2(t)\}$ *respectivement, où* $U_1(t)=e^{tB}V(t),\ \ U_2(t)=e^{-tB}V(t).$

Preuve. *On rappelle tout d'abord qu'en vertu de l'hypothèse* (2.3) *et du fait que l'opérateur* $-(B^2-A)^{1/2}$ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique* $\{V(t)\}$, $t\geqslant 0$, *on a*

$$\begin{cases} D\left(-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)=\left\{x\in X \;\;/\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{V(t)\,x-x}{t}\;\;\textit{existe}\right\} \\ -\left(B^2-A\right)^{1/2}x=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{V(t)\,x-x}{t},\;\textit{pour}\; x\in D\left(-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)=D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right). \end{cases}$$

Ensuite, de l'hypothèse (2.5) *on obtient*

$$\begin{cases} D(B)=\left\{x\in X \;\;/\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^{tB}x-x}{t}\;\;\textit{existe}\right\} \\ Bx=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^{tB}x-x}{t},\;\textit{pour}\; x\in D(B). \end{cases}$$

Posons $L=B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *et* $\overline{L}=-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$, *avec*

$D(L)=D\left(\overline{L}\right)=D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$ *(voir l'hypothèse* (2.7)*).*

$1^\circ)$ *Ecrivons* $T(t)=e^{tB}V(t)$ *et montrons que* $\{T(t)\}$ *est un* C_0*-semi-groupe.*

Pour cela, on doit vérifier les propriétés suivantes :

i) $T(0)=e^0V(0)=I.$

ii) $\forall t\geqslant 0, T(t)=e^{tB}V(t)\in L(X),$ *car* $T(t)=e^{tB}\circ V(t),$

et aussi $e^{tB}\in L(X)$ *et* $V(t)\in L(X).$

iii) $\forall t\geqslant 0,\ \forall s\geqslant 0, T(t+s)=T(t)\circ T(s).$ *En effet, on a*

$$\begin{aligned} T(t+s) &= e^{(t+s)B}V(t+s) \\ &= e^{tB}\circ e^{sB}\circ V(t)\circ V(s). \end{aligned}$$

Pour conclure, il est indispensable de montrer la formule suivante

$$\forall t\geqslant 0,\forall s\geqslant 0,\;\; e^{tB}\circ V(t)=V(t)\circ e^{tB}.$$

Puisque $-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *engendre le semi-groupe analytique* $\{V(t)\}$, *alors d'après le théorème 1.2.7 et le théorème 1.7.7, p.30, Pazy* [21], *on a*

$$\begin{aligned} V(t)\,x &= e^{-t\left(B^2-A\right)^{1/2}}x \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{t\lambda}\left(\lambda+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}xd\lambda,\;\; x\in X, \end{aligned}$$

où γ *est une courbe régulière allant de* $\infty e^{-i\theta}$ *à* $\infty e^{i\theta}$, *pour* $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}+\delta,$

$0<\delta<\dfrac{\pi}{2}, \rho\left(-\left(B^2-A\right)\right)\supset\sum_\delta=\left\{\lambda/\left|\arg\lambda\right|<\dfrac{\pi}{2}+\delta\right\}$ *et*

$\left\| \left(\lambda + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{M}{|\lambda|}$, *pour* $\lambda \in \sum_\delta, \lambda \neq 0.$

Grâce à l'hypothèse (2.5) *et du théorème 1.7.1 (chapitre1), on a*

$$e^{sB} = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{sB}{n}\right)^{-n}.$$

D'où, on obtient

$$\begin{aligned}
e^{sB} \circ V(t)\, x &= e^{sB} (V(t))\, x, \; x \in X \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{sB}{n}\right)^{-n} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{t\lambda} \left(\lambda + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} x d\lambda \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{t\lambda} \left(\lambda + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{sB}{n}\right)^{-n} x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{t\lambda} \left(\lambda + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} e^{sB} x d\lambda \\
&= V(t) \left(e^{sB} x\right) \\
&= V(t) \circ e^{sB} x, \; x \in X.
\end{aligned}$$

En conclusion, on aura

$$\begin{aligned}
T(t+s) &= e^{tB} \circ V(t) \circ e^{sB} \circ V(s) \\
&= T(t) \circ T(s).
\end{aligned}$$

De plus, pour $x \in X$ *et* $t \geqslant 0$, *l'application* $t \mapsto T(t)\, x = e^{tB} \circ V(t)\, x$ *est continue.*

Donc, d'après i), ii) et iii), il en résulte que $\{T(t)\}$ *est un* C_0*-semi-groupe.*

2°) *Soit* E *le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}$ *et*

$D(E) = \left\{ x \in X \;\; / \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)\, x - x}{t} \text{ existe} \right\}$ *le domaine de l'opérateur linéaire* E, *d'où on a*

$$Ex = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)\, x - x}{t}, \quad x \in D(E).$$

Montrons que $E = L$. *Pour cela, il faut prouver les deux extensions* $L \subseteq E$ *et* $E \subseteq L$.

i) Prouvons que $L \subseteq E$ *(i.e.* $Lx = Ex, \forall x \in D(L)$*).*

Soit $x \in D(L) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)$ *et pour* $t > 0$*, on a*

$$\begin{aligned} Ex &= \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} x \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{tB} V(t) - I}{t} x \\ &= \lim_{t \to 0^+} e^{tB} \frac{V(t) - I}{t} x + \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{tB} - I}{t} x \\ &= -\left(B^2 - A\right)^{1/2} x + Bx \\ &= Lx. \end{aligned}$$

D'où i) est vérifiée.

ii) Réciproquement, on prouve que $E \subseteq L$ *(i.e.* $Ex = Lx, \forall x \in D(E)$*).*

Pour ce faire, il faut d'abord montrer que l'opérateur linéaire E *est injectif.*

Soit $x \in D(E)$*, tel que* $Ex = 0$ *et montrons que* $x = 0$*.*

Puisque $x \in D(E)$ *implique* $T(t)x \in D(E)$ *et d'après le théorème 1.2.4 (chapitre1), alors*

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = T(t)Ex = 0, \text{ pour } t > 0.$$

Et par intégration de 0 *à* t*, on obtient*

$$\int_0^t d(T(s)x) = [T(s)x]_0^t = 0,$$

d'où $T(t)x = x$*, en d'autres termes* $e^{tB}V(t)x = x$*. Donc* $V(t)x = e^{-tB}x$*.*

Du fait que $\{V(t)\}$ *est le semi-groupe engendré par* $-\left(B^2 - A\right)^{1/2}$ *implique*

$$\forall x \in X, \forall t > 0, \ V(t)x \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right),$$

on déduit que

$$V(t)x = e^{-tB}x \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subseteq D(B), \text{ pour } t > 0.$$

Puisque $V(t)x \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$, *alors pour* $h>0$, *on aura*

$$\begin{aligned}
-\left(B^2-A\right)^{1/2} V(t)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{V(h)-I}{h} V(t)x \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} x \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-(t+h)B}-e^{-tB}}{h} x, \ \text{car } V(t)x = e^{-tB}x \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-hB}-I}{h} e^{-tB}x \\
&= -Be^{-tB}x.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) V(t)x &= BV(t)x - \left(B^2-A\right)^{1/2} V(t)x, \text{car } V(t)x \in D(B) \\
&= Be^{-tB}x - Be^{-tB}x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $V(t)x = 0$, *pour chaque* $t>0$. *Cela implique que* $\lim\limits_{t\to 0^+} V(t)x = 0$.

Donc $x=0$ *et l'opérateur* E *est injectif.*

Prouvons maintenent ii).

Soit $x \in D(E)$, *on considère les deux opérateurs linéaires* E *et* L^{-1} *qui existent d'après le lemme 2.2.1 précédent.*

En posant $z = Ex \in X$ *et* $L^{-1}z = y \in D(L) \subset D(E)$, *on obtient*

$$Ex = Ly, \ \text{pour } y \in D(L).$$

Or du point i) on a $Ey = Ly$, *pour* $y \in D(L)$. *Donc* $Ex = Ey$.

Enfin, puisque l'opérateur linéaire E *est injectif, alors* $x = y$. *Ainsi :*

D'une part $x \in D(L)$ *d'où* $D(E) = D(L)$, *d'autre part* $Ex = Lx$, *pour tout* $x \in D(E)$.

Par conséquent $E = L$. *L'opérateur* L *est donc le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}$.

3°) *Pour conclure, il reste à prouver que le* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}$ *est analytique.*

Pour cela, on se base sur le théorème 1.2.7 (chapitre1).

Plus précisément, on affirme les deux propriétés i) et ii) suivantes :

i) $\{T(t)\}$ *est différentiable sur* $(0,\infty)$.

En effet, pour tout $x \in X$ *et* $t>0$, *en dérivant* $T(t)$ *par rapport à la variable* t, *il vient*

$$\begin{aligned}
&\frac{d(T(t)x)}{dt}\\
=\ & \frac{d}{dt}\left(e^{tB}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(t)x\right)\\
=\ & e^{tB}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(t)x+e^{tB}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\frac{dV(t)x}{dt}\\
=\ & e^{tB}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(t)x-e^{tB}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)V(t)x\\
=\ & LT(t)x.
\end{aligned}$$

ii) $\|LT(t)\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{t}$, $t>0$.

En effet, pour tout $x \in X$, *on a*

$$LT(t)x = L\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2}e^{tB}V(t)x,$$

et on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\|LT(t)x\|_X &\leqslant \left\|L\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right\|_{L(X)}\left\|\left(B^2-A\right)^{1/2}e^{tB}V(t)x\right\|_X\\
&\leqslant \left\|L\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right\|_{L(X)}\left\|\left(B^2-A\right)^{1/2}V(t)\right\|_{L(X)}\left\|e^{tB}x\right\|_X\\
&\leqslant \frac{C}{t},\ t>0.
\end{aligned}$$

Car le semi-groupe $\left\{e^{tB}\right\}, t \geqslant 0$, *est uniformément borné (*$\left\|e^{tB}x\right\|_X \leqslant k$*).*
voir l'hypothèse (2.3) *et le théorème 1.2.7 (chapitre1). Donc le semi-groupe* $\{T(t)\}$ *est analytique. Enfin, du fait que* $E=L$, *il résule que* $T(t)=U_1(t)$.
Donc L'opérateur linéaire $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique* $\{U_1(t)\}$, $t \geqslant 0$.
La même démarche donne le résultat désiré pour $\{U_2(t)\}$, $t \geqslant 0$.
Ce qui achève la preuve du lemme 2.2.4. ■

Preuve. du Théorème 2.2.1

Comme la solution générale de l'équation (2.1) *est la somme de la solution particulère de l'équation* (2.1) *et la solution générale de l'équation homogène*

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0,1),$$

alors la preuve se fait en deux étapes :

Première étape

Elle consiste à trouver la solution particulère de l'équation (2.1).

Pour cela, on introduit $\overline{u}(.)$ *par*

$$\begin{aligned} \overline{u}(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.31}$$

pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Grâce au lemme 2.2.4, *on peut aussi écrire* $\overline{u}(t)$ *sous la forme*

$$\begin{aligned} \overline{u}(t) &= -\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\int_0^t U_2(t-s) f(s)\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\int_t^1 U_1(s-t) f(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.31'}$$

pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ *(on utilisera la formule* $(2.31')$ *ultérieurement).*

Puisque les semi-groupes $\{U_1(t)\}$ *et* $\{U_2(t)\}$ *sont différentiables (car ils sont analytiques) et du fait que la fonction* f *est de Hölder, alors la fonction* $\overline{u}(.)$ *est différentiable, donc* $\overline{u}'(.)$ *existe. Calculons* $\overline{u}'(.)$ *:*

D'abord, on écrit la formule (2.31) *sous la forme*

$$\overline{u}(t) = I_1(t) + I_2(t),$$

avec

$$I_1(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\,ds,$$

$$I_2(t) = -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\,ds.$$

Calculons $I_1'(t)$.

Grâce à la proposition 1.1.2, en utilisant la formule de dérivation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^t f(t,s)\,ds\right) = f(t,t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} f(t,s)\,ds.$$

On aura

$$
\begin{aligned}
& I_1'(t) \\
= \; & -\frac{1}{2}V(0)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t)-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(e^{-(t-s)B}V(t-s)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\right)ds \\
= \; & -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t)+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}V(t-s)f(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\frac{d}{dt}V(t-s)f(s)\,ds \\
= \; & -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t)+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)B\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)V(t-s)f(s)\,ds \\
= \; & -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t)+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)B\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)f(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Car l'opérateur $-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *engendre le semi-groupe analytique* $\{V(t)\}, t \geqslant 0$.
Pour calculer $I_2'(t)$, *on utilisera la formule de dérivation suivante :*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_t^{t_0} f(t,s)\,ds\right)=-f(t,t)+\int_t^{t_0}\frac{d}{dt}f(t,s)\,ds.$$

D'où

$$
\begin{aligned}
& I_2'(t) \\
= \; & \frac{1}{2}V(0)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t)-\frac{1}{2}\int_t^1 \frac{d}{dt}\left(e^{-(t-s)B}V(s-t)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\right)ds \\
= \; & \frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t)+\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)B\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\frac{d}{dt}V(s-t)f(s)\,ds \\
= \; & \frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t)+\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)B\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(s-t)f(s)\,ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2'(t) &= \frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2} f(t) + \frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t)\, B\left(B^2-A\right)^{-1/2} f(s)\, ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t)\, f(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

On sait que

$$
\overline{u}'(t) = I_1'(t) + I_2'(t).
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\overline{u}'(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s)\, B\left(B^2-A\right)^{-1/2} f(s)\, ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t)\, B\left(B^2-A\right)^{-1/2} f(s)\, ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s)\, f(s)\, ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t)\, f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2}\left(v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + v_4(t)\right)..
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

On va étudier séparément chaque v_i, $i = 1, ..., 4$. Commençons par v_1.

On a

$$
v_1(t) = \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s)\, B\left(B^2-A\right)^{-1/2} f(s)\, ds.
$$

Grâce à la proposition 1.1.1, on a

$$
v_1(t) \in D(B) \;\; et \; Bv_1(.) \in C([0,1]; X).
$$

$$
\begin{aligned}
Bv_1(t) &= B\int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s)\, B\left(B^2-A\right)^{-1/2} f(s)\, ds \\
&= B^2\left(B^2-A\right)^{-1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s)\, f(s)\, ds \\
&= B^2\left(B^2-A\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s)\, f(s)\, ds,
\end{aligned}
$$

et du fait que

$$
\begin{aligned}
&f(s) = (f(s) - f(t)) + f(t), \\
&B^2\left(B^2-A\right)^{-1} = I + A\left(B^2-A\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

car

$$B^2\left(B^2-A\right)^{-1}-A\left(B^2-A\right)^{-1}=\left(B^2-A\right)\left(B^2-A\right)^{-1}=I.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
Bv_1(t) &= \left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(s)\,ds \\
&= \left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,(f(s)-f(t))\,ds \\
&\quad +\left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(t)\,ds \\
&= \left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\int_0^t e^{-(t-s)B}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(t-s)\,(f(s)-f(t))\,ds \\
&\quad +\left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(t)\,ds.
\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(t)\,ds.$
En utilisant le changement de variable $y=t-s$*, on aura d'après la formule* (2.20) *du lemme 2.2.3*

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(t)\,ds &= -\int_t^0 e^{-yB}V(y)\,f(t)\,dy \\
&= \int_0^t e^{-yB}V(y)\,f(t)\,dy \\
&= J_-(t,f(t)) \\
&= \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t)\,.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
Bv_1(t) &= \left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\int_0^t e^{-(t-s)B}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(t-s)\,(f(s)-f(t))\,ds \\
&\quad +\left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t) \\
&= \left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\int_0^t e^{-(t-s)B}\frac{\partial}{\partial s}V(t-s)\,(f(s)-f(t))\,ds \\
&\quad +\left(I+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t)\,.
\end{aligned}$$

Car $-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique* $\{V(t)\}$.

Regardons maintenant v_2, on a

$$v_2(t) = \int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) B \left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\, ds.$$

D'après la proposition 1.1.1, on a

$$v_2(t) \in D(B) \;\; et \; Bv_2(.) \in C([0,1]; X).$$

De manière analogue à la précédente, on a

$$\begin{aligned} Bv_2(t) &= B \int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) B \left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\, ds \\ &= B^2 \left(B^2 - A\right)^{-1} \left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) f(s)\, ds, \end{aligned}$$

et puisque

$$B^2 \left(B^2 - A\right)^{-1} = I + A\left(B^2 - A\right)^{-1},$$

alors

$$\begin{aligned} Bv_2(t) &= \left(I + A\left(B^2 - A\right)^{-1}\right) \left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) f(s)\, ds \\ &= \left(I + A\left(B^2 - A\right)^{-1}\right) \left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) (f(s) - f(t))\, ds \\ &\quad + \left(I + A\left(B^2 - A\right)^{-1}\right) \left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) f(t)\, ds \\ &= \left(I + A\left(B^2 - A\right)^{-1}\right) \int_t^1 e^{-(t-s)B} \left(B^2 - A\right)^{1/2} V(s-t) (f(s) - f(t))\, ds \\ &\quad + \left(I + A\left(B^2 - A\right)^{-1}\right) \left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) f(t)\, ds. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) f(t)\, ds.$

Pour cela, en utilisant le changement de variable $y_1 = s - t$, il vient

$$\begin{aligned} \int_t^1 e^{-(t-s)B} V(s-t) f(t)\, ds &= \int_0^1 e^{-y_1 B} V(y_1) f(t)\, dy_1 \qquad (2.34) \\ &= J_+(1-t, f(t)) \;\; , \textit{(d'après la remarque 2.2.1)} \\ &= \left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(I - e^{(1-t)B} V(1-t)\right) f(t) \\ &= \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(e^{(1-t)B} V(1-t) - I\right) f(t). \end{aligned}$$

(voir la formule (2.21) *du lemme 2.2.3).*

Ainsi

$$\begin{aligned} Bv_2(t) &= \left(I + A\left(B^2 - A\right)^{-1}\right) \int_t^1 e^{-(t-s)B} \frac{\partial}{\partial s} V(s-t)\left(f(s) - f(t)\right) ds \\ &+ \left(I + A\left(B^2 - A\right)^{-1}\right)\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\ &\left(e^{(1-t)B} V(1-t) - I\right) f(t). \end{aligned}$$

Quant à v_3*, on a*

$$v_3(t) = \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s) f(s)\, ds.$$

La proposition 1.1.1 permet de vérifier que

$$v_3(t) \in D(B) \text{ et } Bv_3(.) \in C([0,1]; X).$$

$$\begin{aligned} Bv_3(t) &= B \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s) f(s)\, ds \\ &= B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s) f(s)\, ds \\ &= B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B}\left(B^2 - A\right)^{1/2} V(t-s)\left(f(s) - f(t)\right) ds \\ &+ B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s) f(t)\, ds \\ &= B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B} \frac{\partial}{\partial s} V(t-s)\left(f(s) - f(t)\right) ds \\ &+ B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I - e^{-tB} V(t)\right) f(t). \end{aligned}$$

(voir la formule (2.33)*).*

Enfin, pour v_4*, avec les mêmes techniques de calcul précédentes et grâce à la formule* (2.34) *et la proposition 1.1.1, on obtient :*

$$v_4(t) \in D(B) \quad \text{et} \quad Bv_4(.) \in C([0,1]; X) \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} Bv_4(t) &= B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \int_t^1 e^{-(t-s)B} \frac{\partial}{\partial s} V(s-t)\left(f(s) - f(t)\right) ds \\ &+ B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\ &\left(e^{(1-t)B} V(1-t) - I\right) f(t). \end{aligned}$$

Maintenant, on introduit les notations suivantes :

$$G(t) = \int_0^t e^{-(t-s)B} \frac{\partial}{\partial s} V(t-s)(f(s)-f(t))\,ds,$$
$$H(t) = \int_t^1 e^{-(t-s)B} \frac{\partial}{\partial s} V(s-t)(f(s)-f(t))\,ds.$$

Ainsi, on obtient grâce aux calculs précédents

$$2B\overline{u}'(t) = Bv_1(t) + Bv_2(t) + Bv_3(t) + Bv_4(t).$$

$$\begin{aligned} 2B\overline{u}'(t) &= \left(\left(I + A\left(B^2-A\right)^{-1}\right) + B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right) G(t) \\ &+ \left(\left(I + A\left(B^2-A\right)^{-1}\right) - B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right) H(t) \\ &+ \left(I + A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\ &\quad \left(I - e^{-tB}V(t)\right) f(t) \\ &+ B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\ &\quad \left(I - e^{-tB}V(t)\right) f(t) \\ &- \left(I + A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\ &\quad \left(e^{(1-t)B}V(1-t) - I\right) f(t) \\ &- B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\ &\quad \left(e^{(1-t)B}V(1-t) - I\right) f(t). \end{aligned}$$

On sait que

$$I + A\left(B^2-A\right)^{-1} = B^2\left(B^2-A\right)^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2B\overline{u}'(t) &= \left(B^2\left(B^2-A\right)^{-1} + B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right) G(t) \\ &- \left(-B^2\left(B^2-A\right)^{-1} + B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right) H(t) \\ &+ B^2\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I - e^{-tB}V(t)\right) f(t) \\ &+ B\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I - e^{-tB}V(t)\right) f(t) \\ &+ B^2\left(B^2-A\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\ &\left(I - e^{(1-t)B}V(1-t)\right) f(t) \\ &- B\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I - e^{(1-t)B}V(1-t)\right) f(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, on aura

$$\begin{aligned}
& 2B\overline{u}'(t) \qquad\qquad \text{(2.35)} \\
= \; & \left(B^2\left(B^2-A\right)^{-1}+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)G(t) \\
& -\left(-B^2\left(B^2-A\right)^{-1}+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)H(t) \\
& +B\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t) \\
& +B\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\left(I-e^{(1-t)B}V(1-t)\right)f(t).
\end{aligned}$$

Notons que $2B\overline{u}'(.)\in C([0,1];X)$*, puisque les* v_i*,* $i=1,...,4$*, vérifient cette condition. Pour montrer que* $\overline{u}'(t)\in D(A)$ *et que* $A\overline{u}(.)\in C([0,1];X)$*, on écrit*

$$\begin{aligned}
A\overline{u}(t) &= -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)f(s)\,ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)f(s)\,ds \\
&= J_1(t)+J_2(t).
\end{aligned}$$

Et d'après la formule (2.33)*, on aura*

$$\begin{aligned}
J_1(t) &= -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\int_0^t e^{-(t-s)B}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(t-s)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)f(t)\,ds \\
&= -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\int_0^t e^{-(t-s)B}\frac{\partial}{\partial s}V(t-s)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t).
\end{aligned}$$

On fait de même pour $J_2(t)$ *et on obtient*

$$\begin{aligned}
J_2(t) &= -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\int_t^1 e^{-(t-s)B}\frac{\partial}{\partial s}V(s-t)\left(f(s)-f(t)\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{(1-t)B}V(1-t)\right)f(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A\overline{u}(t) &= -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}(G(t)+H(t)) \qquad (2.36)\\
&-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t)\\
&-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{(1-t)B}V(1-t)\right)f(t).
\end{aligned}$$

Montrons à présent que $\overline{u}(.)$ *est deux fois continûment différentiable.*

Remarquons qu'on peut écrire l'expression équivalente à $\overline{u}'(t)$ *dans la formule* (2.32) *comme suit :*

$$\begin{aligned}
\overline{u}'(t) &= \frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^t e^{-(t-s)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}f(s)\,ds \qquad (2.37)\\
&-\frac{1}{2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1 e^{-(t-s)\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

En effet, on a d'après la formule (2.32)

$$\begin{aligned}
&\overline{u}'(t)\\
= &\ \frac{1}{2}\left(\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,B\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds+\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(s)\,ds\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)\,B\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds-\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)\,f(s)\,ds\right).
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
&\overline{u}'(t)\\
&=\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(s)\,ds+\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(s)\,ds\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)\,f(s)\,ds-\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)\,f(s)\,ds\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\overline{u}'(t) &= \frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)\,f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)\,f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Et grâce au lemme 2.2.4 et aux relations :

$$\left\{\begin{array}{l} V(y)\,e^{yB} = e^{yB}V(y) = e^{y\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}, \ \ \textit{pour } y \geqslant 0, \\ V(y)\,e^{-yB} = e^{-yB}V(y) = e^{-y\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}, \ \ \textit{pour } y \geqslant 0, \end{array}\right.$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\int_0^t e^{-(t-s)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)} f(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\int_t^1 e^{(t-s)\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)} f(s)\,ds. \end{aligned}$$

Or, il est clair que

$$\begin{aligned} \left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right) &= \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2} \\ \left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right) &= \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2} \\ &= -\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

on en déduit aussitôt la formule (2.37) *.*

D'autre part, grâce au lemme 2.2.4, on peut aussi écrire la formule (2.37) *sous la forme*

$$\begin{aligned} \overline{u}'(t) &= \frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^t U_2(t-s)\,f(s)\,ds \qquad \textit{(2.37')} \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1 U_1(s-t)\,f(s)\,ds. \end{aligned}$$

Puisque les semi-groupes $\{U_1(t)\}$ *et* $\{U_2(t)\}$ *sont analytiques, ils sont différentiables et comme* $f \in C^\theta([0,1];X)$*, il en résulte que* $\overline{u}'(.)$ *est continûment différentiable (i.e.* $\overline{u}(.)$ *est deux fois continûment différentiable).*

En utilisant encore les formules de dérivation précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{u}''(t) &= \frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2} \\
&\quad \left(f(t)+\int_0^t\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)e^{-(t-s)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}f(s)\,ds\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2} \\
&\quad \left(-f(t)+\int_t^1\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)e^{(t-s)\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}f(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^t e^{-(t-s)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}f(s)\,ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_t^1 e^{(t-s)\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

On constate que :

D'une part, pour $y\in X$*, on a*

$\frac{1}{2}\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)^2(B^2-A)^{-1/2}y=\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)\left(B(B^2-A)^{-1/2}+I\right)y.$

D'autre part, pour $y\in D\left((B^2-A)^{1/2}\right)\subset X$*, on a*

$$\begin{aligned}
&\left(\left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)(B^2-A)^{-1/2}\right)^2(B^2-A)^{1/2}y \\
&\qquad\qquad = \left(B+(B^2-A)^{1/2}\right)\left(B(B^2-A)^{-1/2}+I\right)y.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\overline{u}''(t) &= f(t)-\frac{1}{2}\left(\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^2 \\
&\quad \left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^t e^{-(t-s)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}f(s)\,ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^2 \\
&\quad \left(B^2-A\right)^{1/2}\int_t^1 e^{(t-s)\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Pour simplifier encore la dernière expression de $\overline{u}''(t)$*, on a d'après les calculs* *précédents*

$$
\begin{aligned}
& \left(B^2-A\right)^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)} f(s)\, ds \\
= \; & \left(B^2-A\right)^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s) f(s)\, ds \\
= \; & \left(B^2-A\right)^{1/2} v_3(t) \\
= \; & \int_0^t e^{-(t-s)B} \left(B^2-A\right)^{1/2} V(t-s) f(s)\, ds \\
= \; & \int_0^t e^{-(t-s)B} \left(B^2-A\right)^{1/2} V(t-s) \left(f(s)-f(t)\right) ds \\
& + \left(B^2-A\right)^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s) f(t)\, ds \\
= \; & \int_0^t e^{-(t-s)B} \frac{\partial}{\partial s} V(t-s) \left(f(s)-f(t)\right) ds \\
& + \left(B^2-A\right)^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)B} V(t-s) f(t)\, ds \\
= \; & G(t) + \left(B^2-A\right)^{1/2} \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(I - e^{-tB} V(t)\right) f(t).
\end{aligned}
$$

(Voir la formule (2.33)*). On a aussi*

$$
\begin{aligned}
& \left(B^2-A\right)^{1/2} \int_t^1 e^{(t-s)\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)} f(s)\, ds \\
= \; & \left(B^2-A\right)^{1/2} \int_t^1 e^{(t-s)B} V(s-t) f(s)\, ds \\
= \; & \left(B^2-A\right)^{1/2} v_4(t) \\
= \; & \int_t^1 e^{(t-s)B} \left(B^2-A\right)^{1/2} V(s-t) \left(f(s)-f(t)\right) ds \\
& + \left(B^2-A\right)^{1/2} \int_t^1 e^{(t-s)B} V(s-t) f(t)\, ds \\
= \; & \int_t^1 e^{(t-s)B} \frac{\partial}{\partial s} V(s-t) \left(f(s)-f(t)\right) ds \\
& - \left(B^2-A\right)^{1/2} \left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(e^{(1-t)B} V(1-t) - I\right) f(t) \\
= \; & H(t) - \left(B^2-A\right)^{1/2} \left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \left(e^{(1-t)B} V(1-t) - I\right) f(t).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{u}''(t) &= f(t) - \frac{1}{2}\left(\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\right)^2 G(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\right)^2 \left(B^2 - A\right)^{1/2} \\
&\quad \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I - e^{-tB}V(t)\right) f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\right)^2 H(t) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\right)^2 \left(B^2 - A\right)^{1/2} \\
&\quad \left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(e^{(1-t)B}V(1-t) - I\right) f(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\overline{u}''(t) &= f(t) - \frac{1}{2}\left(\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\right)^2 G(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(I - e^{-tB}V(t)\right) f(t) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\right)^2 H(t) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(e^{(1-t)B}V(1-t) - I\right) f(t).
\end{aligned}$$

Pour calculer $\overline{u}''(t) + 2\overline{u}'(t) + A\overline{u}(t)$, *on aura besoin des égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} &= I + B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}, \\
\left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} &= I - B\left(B^2 - A\right)^{-1/2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} &= \left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} + I\right)\right)^{-1} \\
&= \left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} + I\right)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(-B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} &= -\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\
&= -\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} - I\right)\right)^{-1} \\
&= -\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} - I\right)^{-1},
\end{aligned}$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}
\overline{u}''(t)+2\overline{u}'(t)+A\overline{u}(t) &= \Big[f(t)-\frac{1}{2}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^2G(t)\\
&-\frac{1}{2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^2H(t)\\
&-\frac{1}{2}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t)\\
&-\frac{1}{2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(e^{(1-t)B}V(1-t)-I\right)f(t)\Big]\\
&+\Big[\left(B^2\left(B^2-A\right)^{-1}+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)G(t)\\
&-\left(-B^2\left(B^2-A\right)^{-1}+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)H(t)\\
&+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)^{-1}\\
&\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t)\\
&-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)^{-1}\\
&\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-I\right)\left(e^{(1-t)B}V(1-t)-I\right)f(t)\Big]\\
&+\Big[-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}(G(t)+H(t))\\
&-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t)\\
&-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\
&\left(e^{(1-t)B}V(1-t)-I\right)f(t)\Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{u}''(t)+2\overline{u}'(t)+A\overline{u}(t)=f(t)\\
&+\left[-\frac{1}{2}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^2+B^2\left(B^2-A\right)^{-1}+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\right]G(t)\\
&+\left[-\frac{1}{2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^2+B^2\left(B^2-A\right)^{-1}-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\right]H(t)\\
&+\left[-\frac{1}{2}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\right]\\
&\quad\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t)\\
&+\left[-\frac{1}{2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\right]\\
&\quad\left(e^{(1-t)B}V(1-t)-I\right)f(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\overline{u}''(t)+2\overline{u}'(t)+A\overline{u}(t) &= f(t)+T_1(t)\,G(t)+T_2(t)\,H(t)\\ &\quad +T_3(t)\left(I-e^{-tB}V(t)\right)f(t)\\ &\quad +T_4(t)\left(e^{(1-t)B}V(1-t)-I\right)f(t)\,.\end{aligned}$$

Prouvons maintenant que $T_i(t)=0$*, pour* $i=$*1, 2, 3, 4. On a*

$$\begin{aligned}T_1(t) &= -\frac{1}{2}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^2+B^2\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &\quad +B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}B^2\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &\quad +B^2\left(B^2-A\right)^{-1}+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}B^2\left(B^2-A\right)^{-1}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2(t) &= -\frac{1}{2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^2+B^2\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &\quad -B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}B^2\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &\quad +B^2\left(B^2-A\right)^{-1}-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}I+B^2\left(B^2-A\right)^{-1}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)\left(B^2-A\right)^{-1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_3(t) &= -\frac{1}{2}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\\ &\quad -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} &= \left(\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\ &= \left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)^{-1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}T_3(t) &= -\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(B^2-A\right)\\ &\quad \left(B\left(B^2-A\right)^{-1/2}+I\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\ &\quad -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\\ &\quad \left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(I-B^2\left(B^2-A\right)^{-1}+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(I-\left(B^2-A\right)\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_4(t) &= -\frac{1}{2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\\ &\quad \left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} &= \left(\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\ &= \left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
T_4(t) &= -\frac{1}{2}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)-\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\
&= -\frac{1}{2}\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\
&\quad -\frac{1}{2}A\left(B^2-A\right)^{-1}\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left(I+B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\\
&\quad \left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\
&= -\frac{1}{2}\left(I-B^2\left(B^2-A\right)^{-1}+A\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\
&= -\frac{1}{2}\left(I-\left(B^2-A\right)\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(I-B\left(B^2-A\right)^{-1/2}\right)^{-1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\overline{u}''(t)+2\overline{u}'(t)+A\overline{u}(t)=f(t)\,,\quad \textit{pour}\quad 0<t<1.$$

Donc la fonction $\overline{u}(.)$ *vérifie l'équation différentielle* (2.1).

Calculons maintenant $\overline{u}(0)$ *et* $\overline{u}(1)$.

Grâce au lemme 2.2.4, on a

$$\left\{\begin{aligned}
\overline{u}(0) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{sB}V(s)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 U_1(s)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds,\\
\overline{u}(1) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-(1-s)B}V(1-s)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 U_2(1-s)\left(B^2-A\right)^{-1/2}f(s)\,ds.
\end{aligned}\right.$$

Montrons que $\overline{u}(0)\,,\ \overline{u}(1)\in D(A)$.

En effet, puisque $D\left(B^2-A\right)=D\left(B^2\right)\cap D(A)=D(A)$ *(voir l'hypothèse* (2.6)*), alors il suffit de montrer que* $\overline{u}(0)\,,\ \overline{u}(1)\in D\left(B^2-A\right)$ *et que* $\overline{u}(0)\,,\overline{u}(1)\in D\left(B^2\right)$.

On a

$$\begin{aligned}
\left(B^2-A\right)^{1/2}\overline{u}(0) &= -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1(s)f(s)\,ds\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 U_1(s)f(s)\,ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&\left(B^2-A\right)\overline{u}\left(0\right)\\
&=\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\overline{u}\left(0\right)\right)\\
&=-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^1 U_1\left(s\right)f\left(s\right)ds\\
&=-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1\left(s\right)f\left(s\right)ds\\
&=-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1\left(s\right)f\left(s\right)ds.
\end{aligned}
$$

Or $f\left(s\right)=\left(f\left(s\right)-f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)$. *Ainsi, on obtient*

$$
\begin{aligned}
\left(B^2-A\right)\overline{u}\left(0\right) &= -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\
&\quad\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1\left(s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(0\right)\right)ds\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\
&\quad\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1\left(s\right)f\left(0\right)ds.
\end{aligned}
$$

En vertu du lemme 2.2.4, puisque l'opérateur $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique* $\left\{U_1\left(t\right)\right\}$, *alors on aura*

$$
\begin{aligned}
\left(B^2-A\right)\overline{u}\left(0\right) &= -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\
&\quad\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1\left(s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(0\right)\right)ds\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\int_0^1\frac{\partial U_1\left(s\right)}{\partial s}f\left(0\right)ds\\
&= -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\
&\quad\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1\left(s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(0\right)\right)ds\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(U_1\left(s\right)-U_1\left(0\right)\right)f\left(0\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\\
&\quad\int_0^1\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)U_1\left(s\right)\left(f\left(s\right)-f\left(0\right)\right)ds\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(U_1\left(1\right)-I\right)f\left(0\right).
\end{aligned}
$$

Il reste à prouver que l'intégrale

$$\int_0^1 \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s)(f(s) - f(0))\, ds$$

est absolument convergente (au sens de la norme $\|.\|_X$*).*
En effet, soit $x \in X$*, alors*

$$\left\|\int_0^1 \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s)(f(s) - f(0))\, x ds\right\|_X$$
$$\leqslant \int_0^1 \left\|\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s)\, x\right\|_X \|(f(s) - f(0))\|_X\, ds.$$

Or

$$\left\|\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s)\, x\right\|_X \leqslant \left\|\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s)\right\|_{L(X)} \|x\|_X\,,$$

et d'après le théorème1.2.7 (chapitre1), on a

$$\left\|\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s)\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{k_1}{s},\ s > 0 \text{ et } k_1 \text{ est une constante positive.}$$

D'autre part, puisque $f \in C^\theta([0,1]; X), 0 < \theta < 1,$ *alors*

$$\|(f(s) - f(0))\|_X \leqslant\ l_1 |s - 0|^\theta, l_1 \text{ est une constante positive.}$$

Par conséquent

$$\left\|\int_0^1 \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s)(f(s) - f(0))\, x ds\right\|_X$$
$$\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^1 \frac{k_1}{s}\ l_1 |s|^\theta \|x\|_X\, ds \\
&\leqslant \|x\|_X \int_0^1 \frac{k_1 l_1}{|s|^{1-\theta}}\ ds \\
&\leqslant C \|x\|_X \int_0^1 \frac{1}{|s|^{1-\theta}}\ ds, \quad (\text{où } C \geqslant k_1 l_1).
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est convergente, car $1 - \theta < 1$*.*
Donc l'intégrale $\int_0^1 \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) U_1(s)(f(s) - f(0))\, ds$ *est absolument convergente. D'où* $\overline{u}(0) \in D(B^2 - A)$*.*
On fait de même pour montrer que $\overline{u}(0) \in D(B^2)$ *avec*

$$B^2 \overline{u}(0) = B^2 \left(B^2 - A\right)^{-1} \left(B^2 - A\right) \overline{u}(0)\,.$$

Par conséquent

$$\overline{u}(0) \in D\left(B^2\right) \cap D\left(B^2 - A\right) = D\left(B^2 - \left(B^2 - A\right)\right) = D(A).$$

Le même raisonnement s'applique pour montrer que $\overline{u}(1) \in D(A)$, *il suffit de prouver que* $\overline{u}(1) \in D(B^2 - A)$ *et* $\overline{u}(1) \in D(B^2)$. *on a*

$$\begin{aligned}
\left(B^2 - A\right)^{1/2} \overline{u}(1) &= -\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_0^1 U_2(1-s)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\, ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 U_2(1-s) f(s)\, ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left(B^2 - A\right) \overline{u}(1) &= -\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{1/2} \int_0^1 U_2(1-s) f(s)\, ds \\
&= -\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)^{-1} \\
&\quad \int_0^1 \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right) U_2(1-s) f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Or $f(s) = (f(s) - f(1)) + f(1)$. *Ainsi, on obtient*

$$\begin{aligned}
\left(B^2 - A\right) \overline{u}(1) &= \frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\
&\quad \int_0^1 \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right) U_2(1-s)(f(s) - f(1))\, ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1} \\
&\quad \int_0^1 \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right) U_2(1-s) f(1)\, ds.
\end{aligned}$$

En utilisant encore le théorème1.2.7, puisque $-\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)$ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique* $\{U_2(t)\}$, *alors on aura*

$$\begin{aligned}
(B^2 - A)\, \overline{u}(1) = {} & \frac{1}{2}(B^2 - A)^{1/2}\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1} \\
& \int_0^1 \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right) U_2(1-s)(f(s) - f(1))\, ds \\
& -\frac{1}{2}(B^2 - A)^{1/2}\left(B + (B^2 - A)^{1/2}\right)^{-1}\left(I - e^{-B} V(1)\right) f(1).
\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^1 \left(-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right) U_2(1-s)(f(s) - f(1))\, ds$ *est absolument* *convergente (au sens de la norme* $\|.\|_X$*). D'après ce qui précède et puisque* $\overline{u}(1) \in D(B^2)$*, alors* $\overline{u}(1) \in D(A)$.

De tout ce qui précède, on conclut que la fonction $\overline{u}(.)$ *est une solution stricte de l'équation différentielle* (2.1)*, satisfaisant les conditions aux limites*

$$\begin{cases} \overline{u}(0) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 U_1(s)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\, ds, \\ \overline{u}(1) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 U_2(1-s)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} f(s)\, ds. \end{cases}$$

avec $\overline{u}(0), \overline{u}(1) \in D(A)$.

Deuxième étape

On va s'intérésser à la recherche de la solution stricte unique du problème aux aux limites formé de l'équation différentielle homogène complète de type elliptique du second ordre

$$v''(t) + 2Bv'(t) + Av(t) = f(t), \qquad t \in (0,1), \tag{2.38}$$

avec les conditions aux aux limites non homogènes

$$\begin{cases} v(0) = x_0, \\ v(1) = x_1, \end{cases} \tag{2.39}$$

où $x_0,\ x_1 \in D(A)$*. Ceci nécéssite l'utilisation du résultat suivant :* ■

Lemme 2.2.5 *Sous les hypothèses* (2.3) $\sim$ (2.7)*. Si de plus, les opérateurs* A *et* $B+\left(B^2 - A\right)^{1/2}$ *ont des inverses bornés, alors pour* $x_0,\ x_1 \in D(A)$*, le problème aux limites* (2.38)-(2.39) *admet une solution stricte unique* $v(.)$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

Preuve. *Il suffit de montrer que sous les hypothèses indiquées, le problème aux limites* (2.38)-(2.39) *admet une solution stricte* $v(.)$.

Pour cela, on procède de la manière suivante :

1°) *La solution du problème aux limites* (2.38)-(2.39) *s'écrit sous la forme*

$$v(t) = U_2(t)\,\xi_0 + U_1(1-t)\,\xi_1,$$

avec

$$\begin{cases} \xi_0 = (I-Z)^{-1}(x_0 - U_1(1)x_1), \\ \xi_1 = (I-Z)^{-1}(x_1 - U_1(1)x_0), \end{cases}$$

où $Z = e^{-2\left(B^2-A\right)^{1/2}}$ *et* $(I-Z)^{-1}$ *existe. Car, en utilisant le théorème 1.7.2 (chapitre1) puisque l'axe ses nombres imaginaires est contenu dans l'ensemble résolvant* $\rho\left(-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$ *défini par*

$$\rho\left(-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; \left(\lambda I + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} \textit{existe}\right\}.$$

Alors pour $Z = e^{-2\left(B^2-A\right)^{1/2}} = e^{2\left(-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}$*, l'opérateur* $I - Z$ *est inversible et on obtient*

$$\left(I - e^{2\left(-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)}\right)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{e^{2z}}{1-e^{2z}}\left(zI + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} dz + I,$$

pour $z \in \gamma_0$*, où la courbe* $\gamma_0 = \gamma_1 - \gamma_2$ *est identique à celle utilisée au théorème 1.7.2 (chapitre1). En d'autres termes, on a*

$$(I-Z)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{e^{2z}}{1-e^{2z}}\left(zI + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1} dz + I.$$

Montrons maintenant que la solution $v(.)$ *est stricte :*

i) Pour montrer que $v(t) \in D(A)$*, alors du fait que l'opérateur linéaire* A *est indépendant de* t *(cas constant), on a*

$$\begin{aligned} Av(t) &= A\left(U_2(t)\xi_0 + U_1(1-t)\xi_1\right) \\ &= U_2(t)A\xi_0 + U_1(1-t)A\xi_1. \end{aligned}$$

Montrons que $Av(.)$ *ait un sens, il suffit de vérifier que* $\xi_0, \xi_1 \in D(A)$*.*

En fait, puisque $x_0, x_1 \in D(A)$ *et en observant que*

$$\begin{cases} -A\xi_i = \left(I - B^2\left(B^2-A\right)^{-1}\right)\left(B^2-A\right)\xi_i, \quad i = 1,\, 2, \\ \left(B^2-A\right)\xi_0 = (I-Z)^{-1}\left(\left(B^2-A\right)x_0 - U_1(1)\left(B^2-A\right)x_1\right), \\ \left(B^2-A\right)\xi_1 = (I-Z)^{-1}\left(\left(B^2-A\right)x_1 - U_1(1)\left(B^2-A\right)x_0\right), \end{cases}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}
-A\xi_0 &= \left(I - B^2\left(B^2 - A\right)^{-1}\right)(I - Z)^{-1}\left(\left(B^2 - A\right)x_0 - U_1(1)\left(B^2 - A\right)x_1\right) \\
&= (I - Z)^{-1}\left(\left(B^2 - A\right)x_0 - U_1(1)\left(B^2 - A\right)x_1 - B^2 x_0 + B^2 U_1(1)\, x_1\right) \\
&= -(I - Z)^{-1} A x_0 + (I - Z)^{-1} U_1(1)\, A x_1.
\end{aligned}$$

et puisque $x_0, x_1 \in D(A)$, le second membre a un sens, donc $A\xi_0$ aussi.
D'où $\xi_0 \in D(A)$. On a aussi

$$\begin{aligned}
-A\xi_1 &= \left(I - B^2\left(B^2 - A\right)^{-1}\right)(I - Z)^{-1}\left(\left(U_2(t)\,\xi_0\right)x_1 - U_2(1)\left(B^2 - A\right)x_0\right) \\
&= (I - Z)^{-1}\left(\left(B^2 - A\right)x_1 - U_2(1)\left(B^2 - A\right)x_0 - B^2 x_1 + B^2 U_2(1)\, x_0\right) \\
&= -(I - Z)^{-1} A x_1 + (I - Z)^{-1} U_2(1)\, A x_0.
\end{aligned}$$

et comme $x_0, x_1 \in D(A)$, on en déduit que $\xi_1 \in D(A)$. Donc $v(t) \in D(A)$.
ii) Montrons aussi que $v(0) = x_0$, $v(1) = x_1$.
En effet, en vertu de la formule (2.40)*, on a*

$$\begin{aligned}
v(0) &= \xi_0 + U_1(1)\,\xi_1 \\
&= (I - Z)^{-1}\left(x_0 - U_1(1)\, x_1\right) + U_1(1)(I - Z)^{-1}\left(x_1 - U_2(1)\, x_0\right) \\
&= (I - Z)^{-1}\left(x_0 - U_1(1)\, x_1 + U_1(1)\, x_1 - U_1(1)\, U_2(1)\, x_0\right) \\
&= (I - Z)^{-1}\left(I - U_1(1)\, U_2(1)\right) x_0.
\end{aligned}$$

Grâce au lemme 2.2.4, on a

$$\begin{aligned}
v(0) &= (I - Z)^{-1}\left(I - e^B e^{-B}\left(V(1)\right)^2\right) x_0 \\
&= (I - Z)^{-1}(I - Z)\, x_0 \\
&= x_0.
\end{aligned}$$

Car $-\left(B^2 - A\right)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique $\{V(t)\}$. On fait de même pour $v(1)$, d'après la formule (2.40)*, on a*

$$\begin{aligned}
v(1) &= U_2(1)\,\xi_0 + \xi_1 \\
&= U_2(1)(I - Z)^{-1}\left(x_0 - U_1(1)\, x_1\right) + (I - Z)^{-1}\left(x_1 - U_2(1)\, x_0\right) \\
&= (I - Z)^{-1}\left(U_2(1)\, x_0 - U_2(1)\, U_1(1)\, x_1 + x_1 - U_2(1)\, x_0\right) \\
&= (I - Z)^{-1}\left(I - U_2(1)\, U_1(1)\right) x_1,
\end{aligned}$$

et grâce au lemme 2.2.4, on aura

$$\begin{aligned} v(1) &= (I-Z)^{-1}\left(I-e^{-B}e^{B}(V(1))^{2}\right)x_1 \\ &= (I-Z)^{-1}(I-Z)\,x_1 \\ &= x_1. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 2.2.4, il est clair qu'on a

$$\begin{aligned} Av(t) &= U_2(t)\,A\xi_0 + U_1(1-t)\,A\xi_1 \\ &= e^{-tB}V(t)\,A\xi_0 + e^{(1-t)B}V(1-t)\,A\xi_1. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Car $v(t)\in D(A)$ *implique que* $\xi_0,\xi_1\in D(A)$.
D'où $Av(t) = A(U_2(t)\,\xi_0) + A(U_1(1-t)\,\xi_1)$ *et on a*

$$\begin{aligned} A(U_2(t)\,\xi_0) &= \left(B^2-\left(B^2-A\right)\right)U_2(t)\,\xi_0 \\ &= B^2e^{-tB}V(t)\,\xi_0 - \left(B^2-A\right)e^{-tB}V(t)\,\xi_0 \\ &= e^{-tB}V(t)\,B^2\xi_0 - e^{-tB}V(t)\left(B^2-A\right)\xi_0 \\ &= e^{-tB}V(t)\left(B^2-\left(B^2-A\right)\right)\xi_0 \\ &= U_2(t)\,A\xi_0. \end{aligned}$$

iii) Montrons que $v(.)\in C^2([0,1];X)$.
Calculons $2Bv'(t)$. *En vertu du lemme 2.2.4, on a*

$$v(t) = U_2(t)\,\xi_0 + U_1(1-t)\,\xi_1.$$

Par dérivation de $v(t)$ *par rapport à la variable* t, *on obtient*

$$\begin{aligned} v'(t) &= -Be^{-tB}V(t)\,\xi_0 + e^{-tB}\frac{d}{dt}V(t)\,\xi_0 \\ &\quad -Be^{(1-t)B}V(1-t)\,\xi_1 - e^{(1-t)B}\frac{d}{dt}V(1-t)\,\xi_1. \end{aligned}$$

Or $\pm B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *sont les générateurs infinitésimaux des semi-groupes analytiques* $\{U_1(t)\}$ *et* $\{U_2(t)\}$ *respectivement, d'où*

$$v'(t) = -U_2(t)\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_0 - U_1(1-t)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_1.$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} 2Bv'(t) &= U_2(t)\left(-2B^2 - 2B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_0 \\ &\quad -U_1(1-t)\left(-2B^2 + 2B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

La formule (2.42) *implique que* $2Bv'(t)$ *existe et que* $t \mapsto v'(t)$ *est continue. D'où* $v'(.) \in C([0,1]; D(B))$*. Il reste à calculer* $v''(t)$*. En dérivant encore une autre fois* $v'(t)$ *par rapport à la variable* t*, on obtient*

$$\begin{aligned} & v''(t) \\ = & \left(Be^{-tB}V(t) - e^{-tB}\frac{d}{dt}V(t)\right)\left(B + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_0 \\ & + \left(Be^{(1-t)B}V(1-t) + e^{(1-t)B}\frac{d}{dt}V(1-t)\right)\left(B - \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_1 \\ = & \left(Be^{-tB}V(t) + e^{-tB}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(t)\right)\left(B + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_0 \\ & + \left(Be^{(1-t)B}V(1-t) - e^{(1-t)B}\left(B^2-A\right)^{1/2}V(1-t)\right)\left(B - \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\xi_1 \\ = & e^{-tB}V(t)\left(B + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\xi_0 + e^{(1-t)B}V(1-t)\left(B - \left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\xi_1. \end{aligned}$$

Grâce à la formule (2.12) *de la proposition 2.2.1, on obtient*

$$\begin{aligned} v''(t) &= e^{-tB}V(t)\left(2B^2 - A + 2B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\xi_0 \\ &\quad + e^{(1-t)B}V(1-t)\left(2B^2 - A - 2B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\xi_1 \\ &= U_2(t)\left(2B^2 - A + 2B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\xi_0 \\ &\quad + U_1(1-t)\left(2B^2 - A - 2B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\xi_1. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Puisque le second membre existe, alors $v(.) \in C^2([0,1]; X)$*.*
Par conséquent, en faisant la somme de $(2.41), (2.42)$ *et* (2.43)*, il en résulte.*

$$\begin{aligned} & v''(t) + 2Bv'(t) + Av(t) \\ = & U_2(t)\left(2B^2 - A + 2B\left(B^2-A\right)^{1/2} - 2B^2 - 2B\left(B^2-A\right)^{1/2} + A\right)^2\xi_0 \\ & + U_1(1-t)\left(2B^2 - A - 2B\left(B^2-A\right)^{1/2} - 2B^2 + 2B\left(B^2-A\right)^{1/2} + A\right)^2\xi_1. \end{aligned}$$

D'où
$$v''(t) + 2Bv'(t) + Av(t) = 0, \quad \textit{pour tout } t \in [0,1].$$
Donc v *vérifie l'équation* (2.38)*, elle est l'unique solution stricte du problème aux limites* (2.38)*-*(2.39)*. Ce qui achève la preuve du lemme 2.2.5.*

En conclusion

Pour achever la preuve du théorème 2.2.1, on procède comme suit :

Calculons la solution stricte $\overline{\overline{u}}$ *du problème aux limites* (2.38)*-*(2.39)*, avec*
$$\begin{cases} \overline{\overline{u}}(0) = x_0 = u_0 - \overline{u}(0), \\ \overline{\overline{u}}(1) = x_1 = u_1 - \overline{u}(1). \end{cases}$$
Puisque $u_0, u_1 \in D(A)$ *par hypothèse et* $\overline{u}(0)$, $\overline{u}(1) \in D(A)$ *alors* $x_0, x_1 \in D(A)$.

Du fait que $\overline{\overline{u}}(.)$ *est la solution générale de l'équation différentielle* (2.38) *et* $\overline{u}(.)$ *est la solution particulière de l'équation différentielle non homogène* (2.1)*, il en résulte que* $u(.) = \overline{\overline{u}}(.) + \overline{u}(.)$ *est la solution générale de l'équation non homogène* (2.1)*. Ensuite, du fait que*
$$\begin{cases} u(0) = u_0 - \overline{u}(0) + \overline{u}(0) = u_0, \\ u(1) = u_1 - \overline{u}(1) + \overline{u}(1) = u_1, \end{cases}$$
on déduit que la solution générale $u(.)$ *vérifie les conditions aux limites* (2.2)*.*

Donc, la fonction $u(.) = \overline{\overline{u}}(.) + \overline{u}(.)$ *est la solution stricte du problème aux limites* (2.1)*-*(2.2)*. Il nous reste à montrer l'unicité de la solution stricte du problème aux limites* (2.1)*-*(2.2)*.*

En effet, supposons qu'il existe deux solutions strictes différentes v_1 *et* v_2 *du problème aux limites* (2.1)*-*(2.2)*. D'où*
$$\begin{cases} v_1''(t) + 2Bv_1'(t) + Av_1(t) = f(t), & t \in (0,1), \\ v_1(0) = u_0, \\ v_1(1) = u_1, \end{cases}$$
et
$$\begin{cases} v_2''(t) + 2Bv_2'(t) + Av_2(t) = f(t), & t \in (0,1), \\ v_2(0) = u_0, \\ v_2(1) = u_1. \end{cases}$$

Ensuite, en posant $v = v_1 - v_1 \neq 0$*, il en résulte*

$$(P_0) \qquad \begin{cases} v''(t) + 2Bv'(t) + Av(t) = 0, & t \in (0,1), \\ v(0) = 0, \\ v(1) = 0. \end{cases}$$

Comme $D(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* X*, alors* $v(0) = v(1) = 0 \in D(A)$.
En vertu du lemme 2.2.5, on en déduit que v *est une solution stricte unique du problème aux limites* (P_0)*. D'autre part, la fonction* 0 *est une solution stricte du problème aux limites* (P_0).
Par conséquent, $v = 0$ *est la solution stricte unique du problème aux limites* (P_0).
Donc $v_1 = v_1$*.D'où l'unicité de la solution stricte du problème aux limites*(2.1)-(2.2).

■

2.2.2 Formule explicite de la solution stricte

On a

$$u(t) = \overline{\overline{u}}(t) + \overline{u}(t), \text{ pour } t \in [0,1],$$

d'où

$$\begin{aligned} u(t) = \quad & U_2(t)\xi_0 + U_1(1-t)\xi_1 \\ & -\frac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2(t-s)f(s)\,ds + \int_t^1 U_1(s-t)f(s)\,ds\right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} Z = e^{-2\left(B^2-A\right)^{1/2}}, \\ \xi_0 = (I-Z)^{-1}\left(x_0 - U_1(1)x_1\right), \\ \xi_1 = (I-Z)^{-1}\left(x_1 - U_2(1)x_0\right). \end{cases}$$

Or

$$\begin{cases} x_0 = u_0 - \overline{u}(0) = u_0 + \dfrac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\displaystyle\int_0^1 U_1(s)f(s)\,ds, \\ x_1 = u_1 - \overline{u}(1) = u_1 + \dfrac{1}{2}\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\displaystyle\int_0^1 U_2(1-s)f(s)\,ds. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= (I-Z)^{-1}\left(u_0+\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds\right)\\
&\quad -(I-Z)^{-1}U_1(1)\left(u_1+\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds\right)\\
&= (I-Z)^{-1}\left(u_0-U_1(1)\,u_1\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds-U_1(1)\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (I-Z)^{-1}\left(u_1+\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds\right)\\
&\quad -(I-Z)^{-1}U_2(1)\left(u_0+\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds\right)\\
&= (I-Z)^{-1}\left(u_1-U_2(1)\,u_0\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds-U_2(1)\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds\right).
\end{aligned}$$

Finalement, la formule explicite de la solution stricte unique $u(.)$ du problème aux limites (2.1)-(2.2) est :

$$\begin{aligned}
u(t) = &\quad U_2(t)\,\xi_0+U_1(1-t)\,\xi_1\\
&-\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2(t-s)\,f(s)\,ds+\int_t^1 U_1(s-t)\,f(s)\,ds\right),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi_0 = &\quad (I-Z)^{-1}\left(u_0-U_1(1)\,u_1\right)\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds-U_1(1)\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds\right),\\
\xi_1 = &\quad (I-Z)^{-1}\left(u_1-U_2(1)\,u_0\right)\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds-U_2(1)\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds\right),
\end{aligned}$$

sachant que $\{U_1(t)\}$ et $\{U_2(t)\}$ désignent les semi-groupes analytiques engendrés par les opérateurs linéaires $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ et $-\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$ respectivement.

Remarque 2.2.2 *En vertu de l'hypothèse* (2.3)*, le fait que l'opérateur* B^2-A *admet un inverse borné est réellement essentiel pour dire que la fonction* f *est hölderienne.*

En effet, d'après l'hypothèse (2.3), on a

$\forall \lambda \geqslant 0, \exists \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \in L(X)$ tel que $\left\| \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant C/(1+\lambda)$,

En particulier, pour $\lambda = 0, \exists \left(B^2 - A\right)^{-1} \in L(X)$ tel que $\left\| \left(B^2 - A\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant C$.

Pour que la solution obtenue $u(.)$ du problème aux limites (2.1)-(2.2) soit stricte, il est essentiel d'utiliser l'hypothèse (2.3) avec f supposée hölderienne. En effet, si l'hypothèse (2.3) n'est pas vérifiée et si on suppose que la fonction f est continue, alors la solution obtenue $u(.)$ du problème aux limites (2.1)-(2.2) ne sera pas stricte, elle sera uniquement une solution forte. Pour éclaircir ceci, voici un :

Exemple illustratif

Soit X un espace de Hilbert complexe. Considérons les deux opérateurs linéaires A et B définis par : $B = iK$, $A = -K^2$, où K est un opérateur auto-adjoint dans H.

Soit $f \in C([0,1]; X)$, alors en résolvant le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u''(t) + 2iKu'(t) - K^2 u(t) = f(t), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

on obtiendra la solution suivante (voir [10]) :

$$u(t) = te^{-itK} \int_0^1 (s-1) e^{isK} f(s)\, ds + \int_0^1 e^{i(s-t)K} (t-s) f(s)\, ds.$$

Est ce que la solution obtenue $u(.)$ est stricte? Sinon, sous quelles conditions $u(.)$

pourra-t-elle être stricte? On constate que :

1°/ Pour $\lambda = 0$, $B^2 - A = (iK)^2 + K^2 = 0$. D'où l'opérateur linéaire $B^2 - A$ n'est pas inversible et l'hypothèse (2.3) n'est pas vérifiée.

2°/ L'opérateur linéaire $B^2 - A$ engendre un C_0-semi-groupe, car d'après le théorème de Stone (voir chapitre 4), l'opérateur linéaire $iB = -K$ est auto-adjoint dans H.

3°/ Si $f \notin C^2([0,1]; X)$ ou $f \notin D(K^2)$, alors la représentation de la solution $u(.)$ ne peut pas être différentiable sur $[0,1]$, donc $u(.)$ ne peut pas être stricte.

En effet, posons $u(t) = a_1(t) + a_2(t)$, $t \in [0,1]$, où

$$a_1(t) = te^{-itK} \int_0^1 (s-1) e^{isK} f(s)\, ds \quad \text{et } a_2(t) = \int_0^1 e^{i(s-t)K} (t-s) f(s)\, ds.$$

Calculons $u'(t)$. On a

$$a_1'(t) = (1 - iK) e^{-itK} \int_0^1 (s-1) e^{isK} f(s)\, ds.$$

Concernant $a_2(t)$, du fait que l'opérateur linéaire $B = iK$ engendre un groupe G, alors en posant $G(t-s) = e^{i(s-t)K}(t-s)$, on aura $a_2(t) = \int_0^1 G(t-s) f(s)\, ds$.

Grâce à la proposition 1.1.2 de dérivation sous le signe d'intégration, il vient

$$\begin{aligned} a_2'(t) &= G(0) f(0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} G(t-s) f(s)\, ds, \text{ avec } f(s) \in D(B) \\ &= f(t) + (iK) \int_0^1 G(t-s) f(s)\, ds. \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale $\int_0^1 G(t-s) f(s)\, ds$ (par exemple par intégration par parties) nécessite que $C^1([0,1]; X)$ ce qui contredit le fait que $C([0,1]; X)$.

Donc la fonction $u(.)$ ne peut pas être différentiable. Dans ce cas, la fonction $u(.)$ que solution forte et non pas une solution stricte.

2.2.3 Un autre résultat d'existence et d'unicité

D'abord, on constate que l'hypothèse (2.4) signifie que

$$\forall y \in D(B),\ B\left(B^2 - A\right)^{-1} y = \left(B^2 - A\right)^{-1} By. \tag{2.44}$$

En effet, on a

$a°$) L'hypothèse (2.4) implique l'hypothèse (2.44).

Car, grâce à la formule (2.11) de la proposition 2.2.1, on a

$$\begin{aligned} B\left(B^2 - A\right)^{-1} y &= B\left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B^2 - A\right)^{-1/2} y \\ &= \left(B^2 - A\right)^{-1/2}\left(B^2 - A\right)^{-1/2} By \\ &= \left(B^2 - A\right)^{-1} By. \end{aligned}$$

D'où l'hypothèse (2.44).

$b°$) Réciproquement, supposons que (2.44) est vérifiée et montrons (2.4). On a

$$\forall y \in D(B),\ \left(B^2 - A\right)^{-1} By = B\left(B^2 - A\right)^{-1} y.$$

D'où

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^*,\ \left(B^2 - A\right)^{-1}(B - \mu) y = (B - \mu)\left(B^2 - A\right)^{-1} y. \tag{4}$$

Ensuite, considérons $\zeta \in X$, quelconque et posons $y = (B - \mu)^{-1} \zeta \in D(B)$.
Alors (4) implique que

$$\left(B^2 - A\right)^{-1} \zeta = (B - \mu)\left(B^2 - A\right)^{-1} (B - \mu)^{-1} \zeta.$$

D'où

$$(B - \mu)^{-1} \left(B^2 - A\right)^{-1} \zeta = \left(B^2 - A\right)^{-1} (B - \mu)^{-1} \zeta, \quad \forall \zeta \in X. \tag{5}$$

Soit maintenant $\eta \in D(B^2 - A)$, quelconque. En posant $\zeta = (B^2 - A)\eta$, alors (5) donne

$$(B - \mu)^{-1} \eta = \left(B^2 - A\right)^{-1} (B - \mu)^{-1} \left(B^2 - A\right) \eta.$$

Par conséquent

$$\left(B^2 - A\right)(B - \mu)^{-1} \eta = (B - \mu)^{-1} \left(B^2 - A\right) \eta, \forall \eta \in D\left(B^2 - A\right). \tag{6}$$

Enfin, soit $x \in X$, quelconque. En posant $\eta = (B^2 - A - \lambda I)^{-1} x \in D(B^2 - A)$ et par application de (6), il vient

$$\left(B^2 - A\right)(B - \mu)^{-1} \left(B^2 - A - \lambda I\right)^{-1} x = (B - \mu)^{-1} \left(B^2 - A\right)\left(B^2 - A - \lambda I\right)^{-1} x.$$

D'où

$$\begin{aligned} &(B^2 - A + \lambda - \lambda)(B - \mu)^{-1} (B^2 - A - \lambda I)^{-1} x \\ &\qquad = (B - \mu)^{-1} (B^2 - A + \lambda - \lambda)(B^2 - A - \lambda I)^{-1} x, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &(B^2 - A + \lambda)(B - \mu)^{-1} (B^2 - A - \lambda I)^{-1} x - \lambda (B - \mu)^{-1} (B^2 - A - \lambda I)^{-1} x \\ &\qquad = (B - \mu)^{-1} x + \lambda (B - \mu)^{-1} (B^2 - A - \lambda I)^{-1} x. \end{aligned}$$

Par application de $(B^2 - A - \lambda I)^{-1}$ à gauche ensuite à droite des deux membres, on aura le résultat désiré. D'où l'hypothèse (2.4).

On peut améliorer les résultat obtenus et ceci en ajoutant aux hypothèses (2.3), (2.6), (2.7), (2.44) et

L'opérateur A est inversible et son inverse est borné, (2.45)

Qui sont déjà utilisées, l'hypothèse (2.46) suivante :

Les opérateurs $B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}$ et $-\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)$ engendrent les semi-groupes analytiques $\{U_1(t)\}$ et $\{U_2(t)\}$ respectivement dans X. (2.46) qui remplace l'hypothèse (2.5) précédente. Ainsi, on énonce le lemme suivant :

Lemme 2.2.6 *Sous les hypothèses* (2.3), (2.6), (2.7), (2.44) *et* (2.45), *pour tout* $y \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)$, *on a*

$$\begin{cases} \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) A^{-1} = I, \\ \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) A^{-1} = I, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) A^{-1}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) y \\ &\qquad = \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(A^{-1}B - BA^{-1}\right) y + y, \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} &\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) A^{-1}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) y \\ &\qquad = \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(A^{-1}B - BA^{-1}\right) y + y. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Preuve. *La preuve de la formule* (2.47) *est basée sur des techniques de calcul, il suffit d'utiliser la formule suivante (voir la preuve dans [11], lemme 4, p.427) :*

$$\forall y \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), \; A^{-1}\left(B^2 - A\right)^{1/2} y = \left(B^2 - A\right)^{1/2} A^{-1} y. \tag{2.49}$$

Pour montrer la formule (2.47), *on remarque que* $\forall y \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)$, *on a*

$$\begin{aligned} &\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) A^{-1}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) y \\ &\qquad = BA^{-1}By - \left(B^2 - A\right)^{1/2} A^{-1}By + BA^{-1}\left(B^2 - A\right)^{1/2} y \\ &\qquad\quad - \left(B^2 - A\right)^{1/2} A^{-1}\left(B^2 - A\right)^{1/2} y. \end{aligned}$$

Grâce à la formule (2.49), *on aura*

$$\begin{aligned} \left(B^2 - A\right)^{1/2} A^{-1}\left(B^2 - A\right)^{1/2} y &= \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B^2 - A\right)^{1/2} A^{-1} y \\ &= \left(B^2 - A\right) A^{-1} y \\ &= B^2 A^{-1} y - y. \end{aligned}$$

De plus, la formule (2.49) *et la formule* (2.12) *de la proposition 2.2.1 donnent :*

$$\begin{aligned} BA^{-1}\left(B^2 - A\right)^{1/2} y &= B\left(B^2 - A\right)^{1/2} A^{-1} y \\ &= \left(B^2 - A\right)^{1/2} BA^{-1} y. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)y\\
&\qquad = BA^{-1}By-\left(B^2-A\right)^{1/2}A^{-1}By\ +\left(B^2-A\right)^{1/2}BA^{-1}y-B^2A^{-1}y+y\\
&\qquad = B\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y-\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y+y\\
&\qquad = \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y+y.
\end{aligned}$$

D'où la formule (2.47) *.*

En appliquant le même raisonnement fait pourla formule (2.47)*, il est facile d'affirmer la formule* (2.48)*.* ■

Rappelons aussi le lemme suivant :

Lemme 2.2.7 *Sous les hypothèses* (2.3) *,* (2.6)*,* (2.7)*,* (2.44) *et* (2.45)*, l'opérateur* $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est inversible et son inverse est borné si, et seulement si* $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est inversible et son inverse est borné et on a*

$$\begin{cases}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}=\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1},\\ \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^{-1}=\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}.\end{cases}$$

Preuve. *Voir* [*11*]*, p.431.* ■

Ceci, nous conduit au lemme important suivant :

Lemme 2.2.8 *Sous les hypothèses* (2.3) *,* (2.6)*,* (2.7)*,* (2.44) *et* (2.45)*, les assertions suivantes sont équivalents :*

1°) *L'opérateur* $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est inversible et son inverse est borné.*

2°) *L'opérateur* $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est inversible et son inverse est borné.*

3°) $\forall y\in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right),\ \left(B^2-A\right)^{1/2}\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y=0.$

4°) $\forall y\in D\left(B\right),\ \left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y=0.$

5°) $D\left(BA\right)\subset D\left(B^2\right).$

Preuve. *Grâce au lemme 2.2.7, les assertions* 1°) *et* 2°) *sont équivalents. L'opérateur* $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est inversible, à inverse borné si, et seulement si*

$$\forall y\in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right),\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)y=y.$$

Ensuite, grâce au lemme 2.2.6, il vient que $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est à inverse borné* *si, et seulement si, on a*

$$\forall y \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right), \left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y=0. \tag{2.50}$$

Puisque l'opérateur $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est inversible et son inverse est borné, alors on a*

$$\forall y \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right), \left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)A^{-1}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)y=y.$$

Et d'après le lemme 2.2.6, pour chaque $y \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$*, on obtient*

$$\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y=0. \tag{2.51}$$

Par conséquent, les formules (2.50) *et* (2.51) *donnent*

$$\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y=0.$$

D'où l'assertion $3°$).

Supposons l'assertion $3°$) *et montrons l'assertion* $4°$).

Soit $y \in D(B)$*, on a*

$$\left(B^2-A\right)^{-1/2}y \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \subseteq D(B).$$

Ensuite

$$\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}y=0.$$

D'où

$$\left(B^2-A\right)^{1/2}A^{-1}B\left(B^2-A\right)^{-1/2}y-\left(B^2-A\right)^{1/2}BA^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}y=0.$$

Grâce à la formule (2.11) *de la proposition 2.2.1 et la formule suivante :*

$$\forall y \in X, \ \left(B^2-A\right)^{-1/2}A^{-1}y=A^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}y,$$

(voir la preuve dans [11], lemme 4, p. 427), on obtient

$$\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}BA^{-1}y-\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}BA^{-1}y=0.$$

Donc $\left(A^{-1}B-BA^{-1}\right)y=0$. *D'où l'assertion* $4°$).

Supposons l'assertion $4°$) *et montrons l'assertion* $5°$).

Pour $y \in D(BA)$, *on écrit*

$$By = BA^{-1}Ay.$$

L'assertion $4°)$ *implique*

$$By = A^{-1}BAy \in D(A) \subseteq D\left(B^2\right).$$

D'où $y \in D(B^3)$, *ainsi on obtient l'assertion* $5°)$.

Réciproquement, supposons l'assertion $5°)$ *et montrons l'assertion* $4°)$.

Grâce à la l'hypothèse (2.44), *on a*

$$y \in D(B), B\left(B^2 - A\right)^{-1} y = \left(B^2 - A\right)^{-1} By,$$

et de l'assertion $5°)$, *puisque* $D(BA) \subset D(B^3) \subset D(B)$, *on obtient*

$$\forall y \in D(BA) = D\left(B\left(B^2 - A\right)\right), \quad B\left(B^2 - A\right)y = \left(B^2 - A\right)By.$$

Car $y \in D(BA) = D(B(B^2 - A))$ *implique* $y \in D(B^2 - A)$ *et* $(B^2 - A)y \in D(BA)$.

Ensuite, de l'hypothèse (2.44), *il vient*

$$\left(B^2 - A\right)B\left(B^2 - A\right)^{-1} y = By.$$

D'où

$$\left(B^2 - A\right)By = B\left(B^2 - A\right)y.$$

Donc

$$\forall y \in D\left(B^3\right) \cap D(BA), \; B^3y - ABy = B^3y - BAy.$$

Par conséquent

$$\forall y \in D(BA), \quad ABy = BAy.$$

Finalement, on en déduit que : $\forall y \in D(B), \; A^{-1}By = BA^{-1}y$.

D'où l'assertion $4°)$ *est vérifiée et les assertions* $4°)$ *et* $5°)$ *sont équivalents.*

Maintenant, supposons l'assertion $5°)$ *et montrons l'assertion* $1°)$.

Pour cela, il suffit de montrer que l'assertion $4°)$ *implique l'assertion* $1°)$.

D'après l'assertion $4°)$, *on a*

$$\forall y \in D(B), \left(A^{-1}B - BA^{-1}\right)y = 0,$$

et de l'hypothèse (2.7)*, il vient*

$$\forall y \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), \ \left(A^{-1}B - BA^{-1}\right) y = 0,$$

d'où

$$\forall y \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(A^{-1}B - BA^{-1}\right) y = 0.$$

Ensuite, d'après la formule (2.47) *du lemme 2.2.6, on aura*

$$\begin{aligned} 0 &= \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(A^{-1}B - BA^{-1}\right) y \\ &= \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) A^{-1}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) y - y \\ &= \left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(B + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) y - y. \end{aligned}$$

L'opérateur $B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}$ *est à inverse borné, d'où l'assertion* $4°)$ *est vérifiée.*
Par conséquent, l'assertion $5°)$ *implique l'assertion* $1°)$.
Le lemme 2.2.8 est ainsi prouvé. ■

Enfin grâce au lemme 2.2.8, en utilisant les hypothèses (2.3) , (2.6), (2.7), (2.44), (2.45) et (2.46), on obtient un autre résultat d'existence et d'unicité de la solution stricte du problème aux limites (2.1)-(2.2), c'est le :

Théorème 2.2.2 *Supposons que les conditions* (2.3) , (2.6)*,* (2.7)*,* (2.44) , (2.45) *et* (2.46) *sont vérifiées. Si, de plus* $D(BA) \subset D(B^3)$*, alors pour toute fonction* $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ *et pour chaque* $u_0, u_1 \in D(A)$*, le problème aux limites* (2.1)-(2.2) *admet une solution stricte unique* $u(.)$ *sur l'intervalle* $[0,1]$*.*

Preuve. *La preuve de ce théorème est identique à celle faite pour le théorème 2.2.1 (voir la*
preuve dans [*11*]*).* ■

Ainsi, on a obtenu deux résultats importants concernant l'étude de l'existence et d'unicité de la solution stricte du problème aux limites (2.1)-(2.2) .
On peut aussi obtenir un résultat plus fort d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution stricte, c'est ce qu'on verra au chapitre suivant.