Chapitre 1

Notations et Rappels

$(X, \|.\|_X)$	Espace de Banach, muni de la norme $\|.\|_X$.
X^* (où X')	Espace dual de l'espace X, $X^* = \{u : X \to \mathbb{R}(\text{où } \mathbb{C}),\ u \text{ linéaire et continue}\}$.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire dans la dualité X', X.
$C^k([0,1]\,; X)$	Espace des fonctions k fois continûment différentiables sur $[0,1]$ à valeurs dans X.
$C^\theta([0,1]\,; X)$	Espace des fonctions de Hölder continues sur $[0,1]$, à valeurs dans X à exposant θ, $0 < \theta < 1$.
$L(X)$	Espace des opérateurs linéaires bornés sur X.
$D(A)$	Domaine d'un opérateur linéaire A.
$G(A)$	Graphe d'un opérateur linéaire A.
$\|.\|_{D(A)}$	Norme du graphe.
$\rho(A)$	Ensemble résolvant d'un opérateur linéaire A.
$A \subset B$	L'opérateur linéaire B est l'extention de l'opérateur linéaire A.
A^*	L'adjoint de l'opérateur linéaire A.
A^{-1}	L'inverse de l'opérateur linéaire A.
$(A - \lambda I)^{-1}$	La résolvante d'un opérateur linéaire A.
Ω	Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.
$\partial\Omega$	Frontière régulière de Ω.

$L^p(\Omega)$	Espace de fonctions u mesurables sur $\Omega, \int\limits_{\Omega} \lvert u(x)\rvert^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty$.
$D^\alpha u$	Dérivée d'ordre α de u, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \lvert\alpha\rvert = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i, \alpha \in \mathbb{N}^n$.
$H^m(\Omega), m \geq 1$	$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ / \ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \ \ \lvert\alpha\rvert \leq m\}$.
$H_0^m(\Omega), m \geq 1$	$H_0^m(\Omega) = \left\{u \in H^m(\Omega) \ / \ u_{\vert\partial\Omega} = 0\right\}$.
$W^{m,p}(\Omega), m \geq 1$	$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ / \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \ \lvert\alpha\rvert \leq m\}$.
Δu	Laplacien de u, $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
∇u	Dradient de u, $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
$(B^2 - A)^{1/2}$	Racine carrée de l'opérateur linéaire $B^2 - A$.
$D_A(\theta; p)$	Espace d'interpolation au sens de Lions Peetre, $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$
	$D_A(\theta; p) = (D(A); X)_{\theta,p} = [D(A); X]_\theta$.
$\left\{e^{tB}\right\}, \, t \geq 0$	C_0-semi-groupe engendré par l'opérateur linéaire.

1.1 Notions essentielles d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Opérateur linéaire borné

Définition 1.1.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach.*

Dire que A est un opérateur linéaire sur X signifie que A est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$, appelé domaine de l'opérateur A.

On dit que l'opérateur linéaire A est à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$.

Le graphe de l'opérateur linéaire A est défini par :

$$G(A) = \{(u, \ Au), \ u \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Définition 1.1.2 *Soient A et B deux opérateurs linéaires à domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$. On dit que l'opérateur linéaire B est l'extention de l'opérateur linéaire A et on écrit $A \subset B$, si $D(A) \subset D(B)$ et $Au = Bu$, $\forall u \in D(A)$.*

Lorsqu'on dit que $A = B$, cela signifie que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définition 1.1.3 *Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. Dire que l'opérateur linéaire A est borné, signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|Au\|_Y \leqslant C \|u\|_X, \ \forall u \in D(A)$.*
Sinon, A est dit opérateur linéaire non borné.
Lorsque $D(A) = X$, alors l'opérateur linéaire borné A est continu.

Ceci nous conduit au résultat suivant :

Théorème 1.1.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach.*
Un opérateur linéaire A défini sur $D(A) = X$, à valeurs dans Y est continu si, et seulement s'il est borné. On note par $L(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus sur X à valeurs dans Y. On le munit de la norme définie par $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup\limits_{\substack{u \in X \\ \|u\| \leqslant 1}} \|Au\|_Y$.

1.1.2 Opérateur linéaire inverse

Définition 1.1.4 *Soit X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire bijectif, alors il existe un opérateur linéaire inverse $A^{-1} : Y \to D(A) \subset X$ qui est lui même bijectif et linéaire.*
Si l'opérateur linéaire A^{-1} existe et est borné, alors $A^{-1} \in L(Y,X)$.
En particulier, si $X = Y$, et Si l'opérateur linéaire A^{-1} existe et est borné, alors $A^{-1} \in L(X)$.

Voici un résultat important dû à Banach, c'est le :

Théorème 1.1.2 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Si un opérateur A est linéaire, continu et bijectif de X dans Y, alors l'opérateur linéaire A^{-1} est continu de Y dans X.*

(voir H. Brezis [2], p. 18-19).

1.1.3 Opérateur linéaire fermé

Définition 1.1.5 *Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. On dit que l'opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est un ensemble fermé dans $X \times Y$. Ceci est équivalent à dire que Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans X et $Au_n \to v$ dans Y, alors $u \in D(A)$ et $v = Au$. Ceci traduit le fait que l'opérateur linéaire A est continu sur son domaine $D(A)$ muni de la norme du graphe*

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_Y .$$

Ainsi, on obtient un espace de Banach $\left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)$. On a aussi le :

Théorème 1.1.3 *Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. Si l'opérateur A est fermé et admet un inverse A^{-1}, alors A^{-1} est fermé.*

On rappelle aussi le résultat important suivant :

Proposition 1.1.1 *Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire. Soient $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to D(A)$ une fonction telle que $u(t) \in D(A)$ et les fonctions $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto Au(t)$ sont intégrables sur I (i.e. les intégrales $\int_a^b u(t)\,dt$, $\int_a^b Au(t)\,dt$ sont convergentes), alors $\int_a^b u(t)\,dt \in D(A)$ et la relation suivante est vérifiée*

$$A \int_a^b u(t)\,dt = \int_a^b Au(t)\,dt.$$

(voir Tanabe [22], p. 15).

Proposition 1.1.2 *Supposons que Y est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $I = [a, b]$.*

Soit f une fonction continue de $Y \times I$ dans $\mathbb{k}$ telle que la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $Y \times I$. Soient u et v deux applications dérivables de X dans I, alors *l'application* φ *définie par* $\varphi : X \to \mathbb{k}$ *et* $\forall x \in X$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$ *est dérivable sur* X *et sa dérivée* φ' *est définie par*

$$\forall x \in X, \quad \varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + v'(x)\,f(x, v(x)) - u'(x)\,f(x, u(x)).$$

1.1.4 Ensemble résolvant, résolvante et spectre d'un opérateur linéaire

Définition 1.1.6 *Soit* X *un espace de Banach complexe et* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire.*

- *On appelle ensemble résolvant de l'opérateur linéaire* A, *l'ensemble ouvert* $\rho(A)$ *défini par*

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; A - \lambda I : D(A) \to X \text{ est bijectif et } (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)\right\}.$$

- *Si l'opérateur* A *est fermé, alors*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; A - \lambda I \;: D(A) \to X \text{ est bijectif}\}.$$

- *Si* $\lambda \in \rho(A)$, *alors l'opérateur* $(A - \lambda I)^{-1}$ *s'appelle la résolvante de l'opérateur* A.
- *On appelle spectre de l'opérateur* A, *l'ensemble fermé* $\sigma(A)$ *défini par*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Il est important de rappeler aussi les notions suivantes :

1.1.5 Espace dual, opérateur adjoint et opérateur auto-adjoint

Définition 1.1.7 *Soit* X *un espace vectoriel normé. On appelle forme (fonctionnelle) linéaire continue sur* X, *tout opérateur linéaire continu* $f : X \to Y$ *où* $Y = \mathbb{R}$ *ou* $Y = \mathbb{C}$. *Si* $x \in X$ *alors la valeur de* x *prise par* f *est notée* $\langle x, f\rangle$. *L'espace des formes (fonctionnelles) linéaires continues sur* X *est appelé dual de* X *et on le note* X^*.

Définition 1.1.8 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire à domaine dense dans X. Considérons l'ensemble*

$$D^* = \{f \in Y^* / \ \langle Ax, f \rangle = \langle x, \phi \rangle, \ \text{où } \phi \in X^*\} \subset Y^*.$$

L'opérateur A^* défini par $D(A^*) = D^* \subset Y^*$ à valeurs dans X^* et tel que

$$A^* f = \phi \text{ est appellé l'adjoint de } A.$$

Ainsi, on a la relation fondamentale qui lie les opérateurs A et A^*:

$$\langle Ax, f \rangle = \langle x, A^* f \rangle, \forall x \in D(A), \forall f \in D(A^*).$$

On rappelle aussi le résultat important suivant :

Théorème 1.1.4 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire à domaine dense dans X, alors l'opérateur adjoint A^* est fermé.*

(voir H. Brezis [2], p. 28).

Définition 1.1.9 *Soit X un espace de Hilbert et $A \in L(X)$. L'opérateur linéaire A est auto-adjoint si $A = A^*$, en d'autres termes : $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, $\forall x, y \in X$.*

Définition 1.1.10 *Soit X un espace de Hilbert et $A \in L(X)$ un opérateur linéaire auto-adjoint. L'opérateur A est positif si $\langle Ax, x \rangle > 0$, $\forall x \neq 0$.*

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach. La famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ est dite semi-groupe, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(***i***) $T(t+s) = T(t) T(s)$, *pour tout t, $s \geqslant 0$.*

(***ii***) $T(0) = I$, *où I désigne l'opérateur identité.*

Si de plus la condition suivante est satisfaite :

(***iii***) *Pour chaque $x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue*

alors $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ *est dite semi-groupe fortement continu ou* C_0*-semi-groupe.*
En particulier, Si $\{T(t)\}$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et satisfait les conditions* $(\boldsymbol{i})$, $(\boldsymbol{ii})$ *et* $(\boldsymbol{iii})$, *alors*$\{T(t)\}$ *est dite* C_0*-groupe.*

Théorème 1.2.1 *Soit* $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ *un* C_0*-semi-groupe, alors il existe deux nombres* $M \geqslant 1$ *et* ω *tels que* $\|T(t)\|_{L(X)} \leqslant M\ e^{\omega\, t}$, *pour tout* $t \geqslant 0$. *En particulier, Si* $M = 1$ *et* $\omega = 0$, *on dit alors que* $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ *est un* C_0*-semi-groupe de contraction.*

Voici encore une notion importante :

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.2.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$, *l'opérateur linéaire* A *défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X \quad / \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)\,x - x}{t} \ \text{ existe} \right\} \\ Ax = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)\,x - x}{t}, \text{ pour } x \in D(A). \end{cases}$$

On dit aussi que l'opérateur A *engendre le* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$.

Théorème 1.2.2 ***(Hille-Yosida)*** *Un opérateur linéaire* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contraction* $\{T(t)\}, t \geqslant 0$
si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(i) A *est fermé et* $\overline{D(A)} = X$.
(ii) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \operatorname{Re}\ \lambda > \omega\}$, *où* $\rho(A)$ *est l'ensemble résolvant de* A, *et* $\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$, *pour* $\operatorname{Re}\ \lambda > \omega$.

Rappellons le résultat suivant qui généralise le Théorème de Hille-Yosida :

Théorème 1.2.3 ***(dû à Phillips-Miyadera-Feller)*** *Un opérateur linéaire* A *vérifie les deux conditions suivantes :*
(i) A *est fermé et* $\overline{D(A)} = X$.
(ii) *il existe deux nombres* $M \geqslant 1$ *et* ω *tels que l'ensemble résolvant de* A,

$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; \mathrm{Re}\;\; \lambda > \omega\}$ *et* $\left\|(A-\lambda I)^{-n}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda-\omega)^{n}}$, *pour* $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, $n = 1, 2, ...$ *si et seulement si* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ *tels que* $\|T(t)\|_{L(X)} \leqslant M\; e^{\omega\, t}$, *pour tout* $t \geqslant 0$.

On a aussi le théorème essentiel suivant :

Théorème 1.2.4 *Soit* $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ *un* C_0*-semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal, alors :*

(***a***) *Pour* $x \in X$, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)\,x ds = T(t)\,x$.

(***b***) *Pour* $x \in X$, $\displaystyle\int_0^t T(s)\,x ds \in D(A)$ *et* $A\left(\displaystyle\int_0^t T(s)\,x ds\right) = T(s)\,x - x$.

(***c***) *Pour* $x \in D(A)$, $T(s)\,x \in D(A)$ *et* $\dfrac{d}{dt}T(t)\,x\,|_{t=s} = AT(s)\,x = T(s)\,Ax$.

(voir Pazy [21], p. 5).

Théorème 1.2.5 *Soient* $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ *et* $\{S(t)\}$, $t \geqslant 0$ *deux* C_0*-semi-groupes, dont les générateurs infinitésimaux sont notés* A *et* B *respectivement. Si* $A = B$, *alors* $T(t) = S(t)$ *pour tout* $t \geq 0$.

Théorème 1.2.6 *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$, *alors pour tout* $f \in D(A^2)$, $\|Af\|^2 \leq 4\,\|A^2 f\|\,\|f\|$.

(voir Goldstein [13], p. 65).

On aura besoin dans ce travail d'une autre notion importante qui est celle des :

1.2.3 Semi-groupes analytiques

Soit X un espace de Banach complexe.

Définition 1.2.3 *Soit* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \;/\; \phi_1 < \arg z < \phi_2,\;$ *où* $\;\phi_1 < 0 < \phi_2\}$ *un secteur dans* $\mathbb{C}$. *On appelle semi-groupe analytique la famille d'opérateurs linéaires bornés* $\{T(z),\; z \in \Omega\}$ *satisfaisant les conditions suivantes :*

(***i***) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)\,T(z_2)$ *pour* $z_1,\, z_2 \in \Omega$.

(***ii***) *$T(0) = I$, où I désigne l'opérateur identité.*

(***iii***) *Pour chaque $x \in X$ $\lim\limits_{z \to 0} T(z)\, x = x$ où $z \in \Omega$.*

(***iv***) *La fonction $z \mapsto T(z)$ est analytique dans Ω.*

On a le théorème suivant :

Théorème 1.2.7 *Soit $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Supposons que $0 \in \rho(A)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(***a***) *$\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$ peut s'étendre à un semi-groupe analytique dans un secteur $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |\arg z| < \delta\}$ et $\|T(t)\|$ est uniformément bornée sur chaque sous-secteur fermé $\overline{\Delta}_{\delta'}$ de Δ_δ tel que*

$$\overline{\Delta}_{\delta'} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |\arg z| \leqslant \delta' < \delta\}.$$

(***b***) *Il existe une constante C telle que pour chaque $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$*

$$\left\| (A - (\sigma + i\sigma))^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{|\tau|}.$$

(***c***) *Il existe $0 < \delta < \pi/2$ et $M > 0$ tels que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup 0$$

et $\left\| (A - \lambda)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{M}{|\tau|}$ *pour* $\lambda \in \Sigma$, $\lambda \neq 0$.

(***d***) *$T(t)$ est différentiable pour $t > 0$ et il existe une constante C telle que $\|AT(t)\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{t}$ pour $t > 0$.*

(voir Pazy [21], p. 60-61).

Théorème 1.2.8 *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. Si B est un opérateur linéaire borné, alors l'opérateur linéaire $A + B$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.*

(voir Pazy [21], p. 81).

Notre travail utilise une autre notion qui est celle des :

1.3 Puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires fermés

Soit X un espace de Banach complexe.

Pour caractériser les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires, on utilise l'hypothèse (H) suivante :

$$(H)\begin{cases} \text{Soit } A \text{ un opérateur linéaire fermé à domaine dense pour lequel :} \\ i)\ \rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ 0 < \omega < |\arg \lambda| \leqslant \pi\} \cup U, \text{ où } U \text{ est un voisinage de zéro,} \\ ii)\ \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{M}{1+|\lambda|}, \text{ pour } \lambda \in \Sigma. \end{cases}$$

Notons que si $0 < \omega < \pi/2$, alors l'opérateur $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique (voir le Théorème 1.2.7). On signale que l'hypothèse $0 \in \rho(A)$ est faite pour faciliter la définition de ces opérateurs. En effet, les résultats obtenus concernant ces opérateurs, restent vrais pour $0 \notin \rho(A)$.

1.3.1 Puissances fractionnaires négatives d'opérateurs linéaires

Définition 1.3.1 *Soit A un opérateur linéaire, vérifiant l'hypothèse (H). Pour $\alpha > 0$, on définit les puissances fractionnaires négatives de l'opérateur linéaire A par*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où γ_a est la courbe contenue dans $\rho(A)$ et allant de $\infty\ e^{-i\theta}$ à $\infty\ e^{i\theta}$ avec $\omega < \theta < \pi$, en évitant l'axe des réels négatifs et l'origine de telle façon à ce que $\lambda^{-\alpha}$ soit positif. Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors d'aprés le Théorème des résidus,

$$A^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a'} \lambda^{-n} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où γ_a' est une courbe fermée entourant l'origine. Si $0 < \alpha < 1$, alors on a aussi

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} (A + \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

On rappelle aussi le :

Théorème 1.3.1 *Si l'opérateur linéaire A vérifie l'hypothèse (H) avec $\omega < \pi/2$, alors la famille $\{A^{-\alpha}\}$, $\alpha > 0$, d'opérateurs linéaires bornés est un C_0-semi-groupe.*

1.3.2 Puissances fractionnaires positives d'opérateurs linéaires

Définition 1.3.2 *Soit A un opérateur linéaire qui vérifie l'hypothèse (H) avec $\omega < \pi/2$, alors pour chaque $\alpha \geqslant 0$, on définit les puissances fractionnaires positives de cet opérateur, par*

$$A^{\alpha} = \begin{cases} \left(A^{-\alpha}\right)^{-1} & \text{pour} \quad \alpha > 0\ , \\ I & \text{pour} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Voici quelques propriétés de ces opérateurs :

Théorème 1.3.2 *Soit A^{α} l'opérateur linéaire défini précédemment, alors :*
(i) A^{α} est un opérateur linéaire fermé à domaine dense $\left(\overline{D(A^{\alpha})} = X\right)$.
(ii) Si $0 < \alpha < \beta$, alors $D\left(A^{\beta}\right) \subset D\left(A^{\alpha}\right)$.
(iii) $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}\ A^{\alpha}$, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

(voir Tanabe [22], p. 35).

On peut définir explicitement les opérateurs A^{α} pour $0 < \alpha < 1$:

Théorème 1.3.3 *Soit $0 < \alpha < 1$, si $x \in D(A) \subset D(A^{\alpha})$ alors*
$$A^{\alpha}x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha-1} A\left(A + \lambda I\right)^{-1} x d\lambda.$$

On a aussi le résultat important suivant :

Théorème 1.3.4 *Si l'opérateur A vérifie la condition $ii)$ de l'hypothèse (H) précédente, alors pour $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ les opérateurs linéaires $-A^{\alpha}$ engendrent des semi-groupes analytiques.*

(voir Krein [14], p. 119).

Théorème 1.3.5 *Soit A^{α} l'opérateur linéaire défini précédemment et B un opérateur linéaire fermé, vérifiant $D(A^{\alpha}) \subset D(B)$, pour $0 < \alpha \leqslant 1$, alors $\|Bx\| \leq C\,\|A^{\alpha}x\|$, pour chaque $x \in D(A^{\alpha})$ et il existe une constante $\rho > 0$ et $x \in D(A)$,*
$$\|Bx\| \leq C_1 \left(\rho^{\alpha}\,\|x\| + \rho^{\alpha-1}\,\|Ax\|\right).$$

(voir Pazy [21], p. 73).

On peut obtenir une condition suffisante pour que $D(A^{\alpha}) \subset D(B)$ et ceci grâce au :

Théorème 1.3.6 *Soit B l'opérateur linéaire fermé vérifiant $D(A) \subset D(B)$. Si pour $0 < \gamma < 1$ et pour chaque $\rho \geqslant \rho_0 > 0$, on a $\|Bx\| \leq C(\rho^{\gamma}\|x\| + \rho^{\gamma-1}\|Ax\|)$, pour $x \in D(A)$, alors $D(A^{\alpha}) \subset D(B)$, pour $\gamma < \alpha \leqslant 1$.*

(voir Pazy [21], p. 74).

Enfin, on donne un résultat fondamental qui décrit ces opérateurs dans le cas des espaces de Hilbert :

Théorème 1.3.7 ***(Théorème de Heinz)***

Soient X, Y deux espaces de Hilbert et A, B deux opérateurs linéaires positifs auto-adjoints dans X et Y respectivement. Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné tel que $T(D(A)) \subset D(B)$. Supposons qu'il existe un nombre M tel que pour tout $u \in D(A)$, $\|BTu\| \leqslant M\|Au\|$, alors pour chaque α vérifiant $0 < \alpha < 1$, on a

$$T(D(A^{\alpha})) \subset D(B^{\alpha}) \text{ et } \|B^{\alpha}Tu\| \leqslant M^{\alpha}\|T\|^{\alpha-1}\|A^{\alpha}u\|, \text{ pour tout } u \in D(A^{\alpha}).$$

(voir Tanabe [22], p. 44).

Ainsi, en posant $X = Y$ et $T = I$ (I est l'opérateur identité), on obtient le :

Corollaire 1.3.1 *(du **Théorème de Heinz**)*

Soient A et B deux opérateurs linéaires positifs auto-adjoints dans un espace de Hilbert X. Supposons que $D(A) \subset D(B)$. Pour tout α vérifiant $0 < \alpha < 1$, on a $D(A^{\alpha}) \subset D(B^{\alpha})$. Si de plus, il existe un certain nombre M tel que $\|Bu\| \leqslant M\|Au\|$, pour tout $u \in D(A)$, alors $\|B^{\alpha}u\| \leqslant M^{\alpha}\|A^{\alpha}u\|$, pour tout $u \in D(A^{\alpha})$.

Théorème 1.3.8 *Soient L un opérateur linéaire positif et auto-adjoint dans un espace de Hilbert X et N un opérateur linéaire auto-adjoint dans X, tels que $D\left(L^{1/2}\right) \subseteq D\left(|N|^{1/2}\right)$ où $|N|^{1/2} = (N^2)^{1/2}$, alors les opérateurs linéaires $-L \pm iN$ engendrent des semi-groupes analytiques.*

(voir Favini et Triggiani [12], p. 94).

Remarque 1.3.1 *Dans le cas d'un espace de Hilbert, les exemples les plus simples d'opérateurs qui vérifient le point ii) de l'hypothèse (H), sont les opérateurs positifs auto-adjoints.*

(voir Krein [14], p. 127).

Notre travail nécessite une autre notion importante, qui est celle des :

1.4 Espaces d'interpolation

Préliminaires

Considérons trois espaces de Banach X_0, X_1 et X tels que $X_0 \subset X_1 \subset X$ (injections étant continues), alors :

X_1 s'appelle espace intermédiaire entre X_0 et X.

Si de plus, pour chaque opérateur linéaire $T \in L(X)$ tel que :

pour $T_{|X_0} \in L(X_0)$, on a $T_{|X_1} \in L(X_1)$, alors :

X_1est appelé espace d'interpolation entre X_0 et X.

Plus précisément, on appelle les espaces de ce type espaces d'interpolation réels, on les note $(X_0; X)_{\theta,p}$avec $0 < \theta < 1$ et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Ces espaces peuvent être définis par plusieurs méthodes.

Dans la littérature, on trouve souvent une construction de ces espaces par la méthode des traces introduite dans Lions-Peetre.

Pour cela, il est nécessaire d'utiliser l'espace $L^p(0, +\infty; X_0)$ défini par :

$$L^p(0, +\infty; X_0) = \left\{ u : \mathbb{R}_+ \to X_0 \text{ mesurable } / \, \|u\|_{L^p(0,+\infty;X_0)} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(t)\|_{X_0}^P \, dt \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

avec la modification usuelle pour $p = +\infty$, c'est-à-dire :

$$L^\infty(0, +\infty; X_0) = \left\{ u : \mathbb{R}_+ \to X_0 \text{ mesurable } / \, \|u\|_{L^\infty(0,+\infty;X_0)} = \sup_t ess \|u(t)\|_{X_0} < +\infty \right\}.$$

et tenant compte de la :

Définition 1.4.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty]$.*

On désigne par $W(p,\alpha;\ X_0,X_1)$ *l'espace des* (*classes de*) *fonctions* u *telles que*

$$\begin{cases} t^\alpha u \in L^p(0,+\infty;X_0), \\ t^\alpha u' \in L^p(0,+\infty;X_1). \end{cases}$$

On munit l'espace $W(p,\alpha;\ X_0,X_1)$ *de la norme* (*d'espace de Banach*) *suivante* $\|u\|_{W(p,\alpha;\ X_0,X_1)} = \|t^\alpha u\|_{L^p(0,+\infty;X_0)} + \|t^\alpha u'\|_{L^p(0,+\infty;X_1)}$.

Lorsque u *parcourt l'espace* $W(p,\alpha;\ X_0,X_1)$, *on peut donner un sens à* $u(0)$ *grâce à la :*

Définition 1.4.2 *Soit* $u \in W(p,\alpha;\ X_0,X_1)$, *si on suppose que* $\alpha + 1/p < 1$ *alors* $u(t)$ *admet une limite lorsque* $t \to 0$. *On prendra par définition*

$$u(0) = \lim_{t\to 0^+} u(t) \in X_1.$$

En vertu de ce qui précède, il est possible de définir l'espace d'interpolation $(X_0;X)_{\theta,p}$ par la :

Définition 1.4.3 *On désigne par* $(X_0;X_1)_{\theta,p}$ *l'espace décrit par* $u(0)$ *lorsque* u *parcourt l'espace* $W(p,\alpha;\ X_0,X_1)$ *avec* $\alpha + 1/p = \theta$ *et* $p \in [1,+\infty]$.

$(X_0;X_1)_{\theta,p}$ *est alors muni de la norme d'espace de Banach*

$$a \mapsto \inf_{u(0)=a} \|u\|_{W(p,\alpha;\ X_0,X_1)}.$$

Ces espaces sont parfois appelés espaces de moyenne, ils vérifient les propositions suivantes (voir Lions-Peetre [19]) :

Proposition 1.4.1 *Si on a* $X_i \subset Y_i$, $i = 0,1$, *alors* $(X_0;X_1)_{\theta,p} \subset (Y_0;Y_1)_{\theta,p}$.

Proposition 1.4.2 *Soit* θ, θ_1, θ_2, p *et* q *des nombres réels.*

1°) *Si* $0 < \theta < 1$ *et* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, *alors*

$$(X_0;X_1)_{\theta,p} \subset (X_0;X_1)_{\theta,q} \subset (X_0;X_1)_{\theta,+\infty}.$$

2°) *Si* $0 < \theta_1 < \theta_2 \leqslant 1$, *alors* $(X_0;X_1)_{\theta_2,\infty} \subset (X_0;X_1)_{\theta_1,1}$.

Voici une autre définition dont on aura besoin :

Définition 1.4.4 *Dans le cas particulier où X_0 est le domaine $D(A)$ d'un opérateur linéaire fermé A (muni de la norme du graphe) et $X_1 = X$. On définit l'espace intermédiaire entre $D(A)$ et X par*

$$D_A(\theta;p) = (D(A);X)_{1-\theta,p},$$

C'est un espace d'interpolation caractérisé par

$$D_A(\theta;p) = \left\{\xi \in X \ / \ r \mapsto r^\theta A(A-rI)^{-1}\xi \in L_*^P(X)\right\},$$

où l'espace $L_*^P(X)$ est défini par

$$L_*^P(X) = \left\{u : \mathbb{R}_+^* \to X, u \text{ mesurable et } \|u\|_{L_*^P(X)} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(r)\|_X^P \frac{dr}{r}\right)^{1/p} < +\infty\right\},$$

où $\dfrac{dr}{r}$ désigne la mesure de Haar.

$$\left(\text{i.e. } D_A(\theta;p) = \left\{\xi \in X \ / \ \int_0^{+\infty} \left\|r^\theta A(A-rI)^{-1}\xi\right\|_X^P \frac{dr}{r} < +\infty\right\}\right).$$

Si $p = \infty$, alors

$$D_A(\theta;+\infty) = \left\{\xi \in X \ / \ \sup_{r>0} r^\theta \left\|A(A-rI)^{-1}\xi\right\|_X < +\infty\right\}.$$

Ces espaces sont de Banach et vérifient la propriété d'espaces intermédiaires suivante:

$$D(A) \hookrightarrow D_A(\theta;p) \hookrightarrow X \quad \text{(les injections sont continues)}.$$

Remarque 1.4.1 *Soit A et B deux opérateurs linéaires fermés à domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. Si $D(A) = D(B)$ alors $D_A(\theta;p) = D_B(\theta;p)$ algébriquement avec équivalence des normes, autrement dit :*
L'espace d'interpolation $D_A(\theta;p)$ dépend uniquement du domaine $D(A)$ et ne dépend pas de l'opérateur linéaire A.

Concernant les opérateurs à puissances fractionnaires, il est essentiel de rappeler le :

Théorème 1.4.1 *Soit A un opérateur linéaire positif.*

(a) Si $m \geqslant 2$ est un nombre naturel, α et β sont deux nombres complexes avec $\operatorname{Re}\alpha < m$ et $\operatorname{Re}\beta < m$, alors $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta}x$, pour $x \in D(A^{2m})$.

(b) Si $\operatorname{Re}\alpha < 0$, alors A^α est un opérateur continu, il vérifie $A^{-\alpha}A^\alpha = I$.

(c) Si $\operatorname{Re}\alpha \operatorname{Re}\beta > 0$, alors $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$.

(d) Si m est un nombre naturel et α est un nombre complexe avec $0 < \operatorname{Re}\alpha < m$, *alors* $(D(A^m);X)_{\frac{\operatorname{Re}\alpha}{m},1} \subset D(A^\alpha) \subset (D(A^m);X)_{\frac{\operatorname{Re}\alpha}{m},\infty}$.
(e) Si α est un nombre complexe avec $\operatorname{Re}\alpha > 0$, *alors l'application A^α est un isomorphisme de $D(A^\alpha)$ dans X, de $D(A^{\alpha+\mu})$ dans $D(A^\mu)$ et de* $(D(A^m);X)_{\frac{\operatorname{Re}\alpha+\mu}{m},P}$ *dans* $(D(A^m);X)_{\frac{\mu}{m},p}$, *où* $\mu > 0$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *et* $m = 1,2,..$*avec* $\operatorname{Re}\alpha + \mu < m$.
(f) Soient α et β deux nombres complexes avec $0 < \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$.
Si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *et* $0 < \theta < 1$, *alors* $(D(A^\alpha);X)_{\theta,p} = \left(D\left(A^\beta\right);X\right)_{\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\beta}\theta,p}$.

(voir Triebel [23], p.101).

D'autre part, il est clair que, d'après l'hypothèse (0.7) citée dans l'introduction

$$\begin{aligned} D\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) &= D(B)\cap D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \\ &= D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left(-\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\right) &= D(-B)\cap D\left(-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \\ &= D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \\ &= D\left(-B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right). \end{aligned}$$

D'où, d'après la remarque 1.4.1 et le Théorème 1.4.1, on obtient la remarque suivante qui nous sera très utile par la suite.

Remarque 1.4.2 *On a*

$$\begin{aligned} D_{-B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta;+\infty) &= D_{-(B^2-A)^{1/2}}(\theta;+\infty) = D_{-(B^2-A)}(\theta/2;+\infty), \\ D_{B-(B^2-A)^{1/2}}(\theta;+\infty) &= D_{-(B^2-A)^{1/2}}(\theta;+\infty) = D_{-(B^2-A)}(\theta/2;+\infty). \end{aligned}$$

On peut déterminer les domaines des opérateurs linéaires à puissances fractionnaires positives et ceci en utilisant le résultat suivant :

Théorème 1.4.2 *Soit A un opérateur linéaire positif et auto-adjoint dans un espace de Hilbert X. Soient α et β deux nombres complexes avec : Re $\alpha \geqslant 0$ et Re $\beta \geqslant 0$, alors pour* $0 < \theta < 1$,

$$\left[D(A^\alpha), D\left(A^\beta\right)\right]_\theta = \left(D(A^\alpha), D\left(A^\beta\right)\right)_{\theta,2} = D\left(A^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}\right).$$

(voir Triebel [23], p.142-143).

1.5 Régularité maximale

Considérons le problème aux limites (0.1)-(0.2) défini dans l'introduction où le second membre $f \in C^{\theta}([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$.

Définition 1.5.1 *Soit u la solution stricte du problème aux limites* (0.1)-(0.2). *Dire que u possède la propriété de régularité maximale, signifie que : Si la fonction f appartient à un espace M, alors u'', Bu' et Au appartiendront à M.*

1.6 Les espaces de Hölder

On rappelle que l'espace de Banach $C([0,1]; X)$ désigne l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs dans l'espace X, muni de la norme :

$$\|f\|_{C([0,1];X)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|f(t)\|_X .$$

Définition 1.6.1 *Pour $\theta \in]0,1[$, on définit l'espace de Hölder $C^{\theta}([0,1]; X)$ à exposant θ, par*

$$C^{\theta}([0,1]; X) = \left\{ f : [0,1] \to X \ \ / \ \ [f]_{\theta} = \sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ t \neq s}} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^{\theta}} < \infty \right\}.$$

Cet espace muni de la norme

$$\|f\|_{C^{\theta}([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + [f]_{\theta} .$$

ou plus précisément, de la norme :

$$\|f\|_{C^{\theta}([0,1];X)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|f(t)\|_X + \sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ t \neq s}} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^{\theta}}.$$

est un espace de Banach.

1.7 Formules classiques de la fonction exponentielle

Définition 1.7.1 *Soit X un espace de Banach complexe et A le générateur* *infinitésimal d'un semi-groupe analytique, alors*

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{t\lambda} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda, \ t > 0.$$

où γ est une courbe infinie incluse dans $\rho(A)$.

(voir Lunardi [20], p. 33).

Proposition 1.7.1 *Soit X un espace de Banach et $A \in L(X)$, alors L'ensemble $\left\{ e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, t \geqslant 0 \right\}$ est un C_0-semi-groupe sur X, satisfaisant $\left\| e^{tA} - I \right\| \to 0$, quand $t \to 0^+$.*

(voir Glodstein [13], p. 15).

Théorème 1.7.1 *Soit X un espace de Banach et $\{T(t)\}$, $t \geqslant 0$, un C_0-semi-groupe sur X, alors*

$$e^{tA}x = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x, \ \ \textit{pour } x \in X.$$

(voir Pazy [21], p. 33).

Théorème 1.7.2 *Soit X un espace de Banach complexe et A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. Pour $t > 0$, si $2k\pi i/t \in \rho(A)$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, alors $1 \in \rho\left(e^{tA}\right)$ et*

$$\left(1 - e^{tA}\right)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \frac{e^{tz}}{1 - e^{tz}} (A - zI)^{-1} dz + I,$$

où $\gamma_0 = \gamma_1 - \gamma_2$, avec $\gamma_1 = \{r + \rho e^{i\eta} \ / \ \rho \geqslant 0\} \cup \{r + \rho e^{-i\eta} \ / \ \rho \geqslant 0\}$,
$r \neq 0$, $\eta \in]\pi/2, \pi[$ sont tels que $\sigma(A)$ se trouve à gauche de γ_1,
$r + \rho e^{i\eta} \neq 2k\pi i/t$, $t > 0$, $\rho \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_2 = \varnothing$, si $r < 0$
et $\gamma_2 = \bigcup_{|k| \leqslant K} C\left(\frac{2k\pi i}{t}, \varepsilon\right)$ si $r > 0$,
où $K = \max\{k \in \mathbb{N} \ / \ 2k\pi/t < r \tan(\pi - \eta)\}$, et $\varepsilon < \pi/t$ est un nombre suffisament petit.

(voir Lunardi [20], p. 60).

Proposition 1.7.2 *Soient X un espace de Banach et $f \in C^{\theta}([0,T];X)$, $\theta \in]0,1[$ et $x \in D(A)$, où A désigne un opérateur linéaire fermé, vérifiant l'hypothèse $\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{k}{|\lambda|+1}$, si $Re\ \lambda \geqslant 0$, d'où A engendre un semi-groupe analytique e^{tA}. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in (0,T], \\ u(0) = x, \end{cases}$$

admet une solution stricte unique $u \in C^{1}([0,T];X) \cap C([0,T];D(A))$, avec $u(t) = e^{tA}x + \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds$. De plus,

$$u'(t) = e^{tA}(Ax + f(t)) + \int_0^t Ae^{(t-s)A}(f(s) - f(t))\, ds.$$

Proposition 1.7.3 *Soit $u(t) = e^{tA}x$ (où $u(0) = x$), alors les deux propriétés (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :*

(i) $u \in C^{\theta}([0,\infty];X)$.

(ii) $\sup\limits_{t>0} t^{-\theta}\left\|e^{tA}x - x\right\|_X < \infty$.

(voir Da Prato, G. [3], p. 360).

Rappelons aussi le résultat suivant sachant que

$$D_A(\theta;+\infty) = \left\{x \in X \ / \ \sup_{t>0} t^{-\theta}\left\|e^{tA}x - x\right\|_X < +\infty\right\}.$$

Théorème 1.7.3 *Supposons que $f \in C^{\theta}([0,T];X)$, $0 < \theta < 1$, $x \in D(A)$ et $Ax + f(0) \in D_A(\theta;+\infty)$. En posant $u'(t) = h_1 + h_2 + h_3$, avec*

$h_1 = e^{tA}(Ax + f(0))$,

$h_2 = e^{tA}(f(t) - f(0))$ et $h_3 = \displaystyle\int_0^t Ae^{(t-s)A}(f(s) - f(t))\, ds$,

On obtient les propriétés suivantes :

(i) u', $Au \in C^{\theta}([0,T];X)$ et il existe une constante $C = C(T,k,\theta)$ telle que

$$\|u'\|_{C^{\theta}([0,T];X)} + \|Au\|_{C^{\theta}([0,T];X)} \leqslant \left(\sup_{t>0} t^{-\theta}\left\|e^{tA}(Ax + f(0)) - (Ax + f(0))\right\|_X + \|f\|_{C^{\theta}([0,T];X)}\right).$$

(ii) $Au(t) + f(t) \in D_A(\theta;+\infty)$, $\forall t \in [0,T]$.

(voir Da Prato, G. [3], p. 361).