Chapitre 0

Introduction

Dans la littérature mathématique, on distingue trois types d'équations différentielles abstraites du premier ordre ou d'ordre supérieur :

. Equations différentielles abstraites de type parabolique.

. Equations différentielles abstraites de type hyperbolique.

. Equations différentielles abstraites de type elliptique.

Les équations différentielles abstraites du premier ordre on été étudiées par de nombreux auteurs, parmi lequels on trouve Krein [14], Pazy [21], Tanabe [22].
Ces auteurs (ainsi que d'autres) ont étudié aussi les équations différentielles abstraites du second ordre de différents types.

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'équation différentielle abstraite complète de type elliptique du second ordre

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t \in (0,1), \tag{0.1}$$

avec les conditions aux limites non homogènes

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{0.2}$$

où $f \in C^\theta([0,1]; X)$, avec $0 < \theta < 1$, désigne une fonction de Hölder à exposant θ, définie sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans un espace de Banach complexe X. Quant à A et B ils représentent deux opérateurs linéaires fermés à domaines $D(A)$ et $D(B)$

respectivement dans X. Les conditions aux limites u_0, u_1 sont deux éléments de $D(A)$.

On cherche une solution stricte $u(.)$ du problème aux limites (0.1)-(0.2),

c'est-à-dire :

une fonction $u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A))$ et $u' \in C([0,1];D(B))$,

c'est ce qu'on écrit par abus de notation :

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C^1([0,1];D(B)) \cap C([0,1];D(A))$$

et satisfaisant (0.1) et (0.2).

On utilisera les hypothèses (0.3) $\sim$ (0.7) suivantes :

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans } X, \text{ tel que} \\ \forall \lambda \geqslant 0,\ \exists \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \in L(X) \text{ avec} \\ \left\| \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant C/(1+\lambda), \end{cases} \tag{0.3}$$

Cette hypothèse nous permet de dire que l'opérateur $-\left(B^2 - A\right)^{1/2}$est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{V(t)\}$, $t \geqslant 0$, dans X(voir Krein [14], p.119),

$$\begin{cases} (B^2 - A) \text{ et } B \text{ commutent au sens des résolvantes, i.e. :} \\ \left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1}(B - \mu I)^{-1} = (B - \mu I)^{-1}\left(B^2 - A + \lambda I\right)^{-1}, \\ \forall \mu \in \rho(B),\ \forall \lambda \geqslant 0. \end{cases} \tag{0.4}$$

$$\text{L'opérateur } B \text{ engendre un groupe fortement continu } \left\{e^{tB}\right\} \text{ dans } X, \tag{0.5}$$

$$D(A) \subseteq D\left(B^2\right), \tag{0.6}$$

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subseteq D(B). \tag{0.7}$$

Ce travail consiste à étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte $u(.)$ du problème (0.1)-(0.2), lorsque la fonction f est höldérienne. On commence par l'aspect historique :

- En 1967, Krein [14] a étudié l'équation différentielle abstraite (0.1) quand $B = 0$, en utilisant la méthode de réduction de l'ordre et en introduisant les racines carrées d'opérateurs linéaires ainsi que la théorie des semi-groupes.

Cet auteur a traité l'équation différentielle suivante (avec des conditions aux limites non homogènes) :

$$u''(t) = Au(t) + f(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0,T]. \tag{e}$$

Il a décomposé ce problème du second ordre en deux problèmes de Cauchy du premier ordre en posant

$$\begin{cases} v(t) = A^{-1/2}u'(t), \\ z(t) = \dfrac{1}{2}[u(t) - v(t)], \\ w(t) = \dfrac{1}{2}[u(t) + v(t)], \end{cases}$$

où l'opérateur $-A^{1/2}$ désigne le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{V(t)\}$. Il a résolu le problème de Cauchy du premier ordre (P) suivant à condition initiale $z(0) = z_0$:

$$(P) \qquad \begin{cases} z'(t) = -A^{1/2}z(t) + \frac{1}{2}A^{-1/2}f(t), & t \in [0,T], \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

où la solution z s'écrit sous la forme :

$$z(t) = V(t)z_0 + \frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)A^{-1/2}f(s)\,ds.$$

Il a traité aussi le problème de Cauchy du premier ordre (P') à condition terminale $w(T) = w_T$:

$$(P') \qquad \begin{cases} w'(t) = A^{1/2}w(t) - \dfrac{1}{2}A^{-1/2}f(t), & t \in [0,T], \\ w(T) = w_T, \end{cases}$$

où la solution w s'écrit sous la forme :

$$w(t) = V(T-t)w_T + \frac{1}{2}\int_t^T V(s-t)A^{-1/2}f(s)\,ds.$$

Par conséquent, la solution générale $u(.)$ de l'équation différentielle (e) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u(t) &= V(t)z_0 + V(T-t)w_T \\ &\quad + \frac{1}{2}A^{-1/2}\left(\int_0^t V(t-s)f(s)\,ds + \int_t^T V(s-t)f(s)\,ds\right), \end{aligned}$$

où $u_1(t) = V(t)z_0 + V(T-t)w_T$ désigne la solution générale de l'équation différentielle homogène $u''(t) = Au(t)$ pour $t \in [0, T]$, et

$$u_2(t) = \frac{1}{2}A^{-1/2}\left(\int_0^t V(t-s) f(s)\, ds + \int_t^T V(s-t) f(s)\, ds\right)$$

désigne la solution particulière de l'équation différentielle non homogène (e).

De nombreux auteurs ont étudié l'équation différentielle abstraite (0.1) quand $B = 0$. Plus précisément, ils ont étudié l'équation différentielle

$$u''(t) + A(t)u(t) - \lambda u(t) = f(t) \qquad \text{pour} \quad \lambda > 0. \tag{e'}$$

On citera à ce titre :

• En 1975, Da Prato et Grisvard [4] ont étudié l'équation (e') successivement dans les cas constant (le coefficient A est un opérateur linéaire indépendant de t) et variable (l'opérateur linéaire A dépend de t) avec les conditions aux limites homogènes de type Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$ et en imposant la restriction $f(0) = f(1) = 0$.

• En 1985, Labbas et Terreni [15] ont étudié l'équation (e') dans le cas variable, avec les conditions aux limites de type Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} a_0 u(0) - b_0 u'(0) = 0, \\ a_1 u(1) - b_1 u'(1) = 0, \end{cases}$$

où $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$ et $a_i + b_i > 0$, $i = 0, 1$, et aussi, en imposant la restriction $f(0) = f(1) = 0$. La différence entre ces deux dernières études est l'hypothèse faite sur la famille $(A(t))_{t\in[0,1]}$.

• En 1987, Labbas [16] a étudié le problème (e')-(0.2) dans les cas constant et variable.

• En 1993, Labbas et Mechdene [18] ont étudié aussi l'équation différentielle (0.1), mais avec des conditions aux limites à dérivée oblique de type :

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = 0, \\ u'(1) + hu(1) = 0, \end{cases}$$

où H et h sont deux opérateurs linéaires fermés à domaines non nécessairement denses dans un espace de Banach complexe X.

Restons toujours dans le cas $B = 0$, lorsque l'équation différentielle (0.1) est de type hyperbolique, on citera à ce titre l'étude faite dans Krein [14] et Tanabe [22].

Revenons à notre équation différentielle complète (0.1), récemment A. Favini et E. Obrecht [9], A. Favini [7], [8], ont étudié cette équation lorsqu'elle est de type parabolique.

Lorsque l'équation différentielle abstraite complète (0.1) (i.e.$B \neq 0$) est de type elliptique, on rappelle que cette équation a été étudiée pour la première fois en 1994, par R.Labbas [17] et ceci en considérant les conditions aux limites homogènes $u(0) = u(1) = 0$.

• En 2001, R. Labbas et A. El Haial [6] ont étudié l'équation différentielle (0.1) en considérant des conditions aux limites non homogènes, à ce propos on signale l'étude faite en 1999 par A. El Haial [5].

On constate que, tous les travaux qui ont été faits aprés celui de Krein, fait en 1967, plus précisément les études faites depuis l'année 1975 jusqu'à l'an 2001, concernant le problème aux limites (0.1)-(0.2) avec $B = 0$ ou $B \neq 0$, ont été basées essentiellement sur l'utilisation de l'intégrale de Dunford et sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires, faite dans Da Prato-Grisvard [4] et ceci grâce aux hypothèses (0.3), (0.4) et (0.5) utilisées dans ces études.

Par contre, durant toutes ces années, les auteurs ne se sont pas intéressés à l'utilisation des opérateurs linéaires à puissances fractionnaires, notamment les racines carrées d'opérateurs linéaires. Cela est dû essentiellement aux difficultés rencontrées dans la caractérisation des domaines de certaines puissances fractionnaires d'opérateurs aux dérivées partielles notamment dans le cas d'espaces non hilbertiens.

• En 2004, on signale les deux études essentielles de l'équation différentielle complète (0.1) (où $B \neq 0$) avec les conditions aux limites non homogènes (0.2), la première étude est faite par les auteurs A. Favini, R. Labbas, H. Tanabe et A.Yagi [10], la deuxième étude est faite par les auteurs A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A.Yagi [11].

Dans ces deux dernières études, les auteurs se sont intéressés à la généralisation de la méthode de réduction de l'ordre faite par Krein [14] lorsque $B = 0$, au problème (0.1)-(0.2). Plus précisément, leurs travaux consistent à l'utilisation des racines carrées d'opérateurs linéaires. Ils ont ajouté aux hypothèses (0.3), (0.4) et (0.5) utilisées auparavant (voir Labbas et El haial [5]), les hypothèses (0.6) et (0.7) qui ont permis de caractériser les domaines de ces racines carrées d'opérateurs linéaires.

Notre travail ici est basé essentiellement sur ces deux études.

Les techniques utilisées dans ce travail reposent sur :

- les propriétés d'opérateurs linéaires,
- la théorie des semi-groupes, en particulier les semi-groupes analytiques,
- les opérateurs linéaires à puissances fractionnaires, notamment les racines carrées d'opérateurs linéaires,
- la caractérisation des espaces d'interpolation,
- la construction explicite de la solution du problème aux limites (0.1)-(0.2) en s'inspirant du travail fait en 1967 par Krein [14].

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :

. **Chapitre 1** : Nous donnerons quelques résultats de base utiles qui serviront dans les chapitres suivants. On rappellera, en particulier, des notions d'analyse fonctionnelle qui nous sont nécessaires. Cela concerne les semi-groupes d'opérateurs linéaires, les opérateurs à puissances fractionnaires et la théorie d'interpolation.

. **Chapitre 2** : On s'intéressera à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution stricte du problème aux limites (0.1)-(0.2).

On montrera le résultat principal suivant :

Théorème 0.0.1 *Supposons que les conditions* $(0.3) \sim (0.7)$ *sont vérifiées et que, de plus, les opérateurs* A *et* $B + (B^2 - A)^{1/2}$ *ont des inverses bornés. Alors pour toute fonction* $f \in C^{\theta}([0,1]; X)$ *avec* $0 < \theta < 1$ *et pour chaque* $u_0, u_1 \in D(A)$*, le problème aux limites* (0.1)-(0.2) *admet une solution stricte unique* $u(.)$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

La preuve de ce théorème nécéssite plusieurs résultats péliminaires qu'on fournira ultérieurement. Une construction explicite de la solution de ce problème sera aussi donnée.

Grâce au travail fait par Krein [14], on obtient la solution $u(.)$ sous la forme

$$\begin{aligned} u(t) = \; & U_2(t)\,\xi_0 + U_1(1-t)\,\xi_1 \\ & -\frac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^t U_2(t-s)\,f(s)\,ds + \int_t^1 U_1(s-t)\,f(s)\,ds\right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_0 = \; & (I-Z)^{-1}\left(u_0 - U_1(1)\,u_1\right) \\ & +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds - U_1(1)\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds\right), \\ \xi_1 = \; & (I-Z)^{-1}\left(u_1 - U_2(1)\,u_0\right) \\ & +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(B^2-A\right)^{-1/2}\left(\int_0^1 U_2(1-s)\,f(s)\,ds - U_2(1)\int_0^1 U_1(s)\,f(s)\,ds\right). \end{aligned}$$

où $Z = e^{-2\left(B^2-A\right)^{1/2}}$ et $\{U_1(t)\}$, $\{U_2(t)\}$ désignent les semi-groupes analytiques engendrés par les opérateurs $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$et $-\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$ respectivement. avec $U_1(t) = e^{tB}V(t)$, $U_2(t) = e^{-tB}V(t)$.

On peut améliorer nos résultats et ceci en ajoutant aux hypothèses (0.3), (0.6), (0.7) et (0.8), (0.9), où

$$\forall y \in D(B),\; B\left(B^2-A\right)^{-1}y = \left(B^2-A\right)^{-1}By. \tag{0.8}$$

L'opérateur A est inversible et son inverse est borné. (0.9)

qui sont déjà utilisées, l'hypothèse (0.10) suivante, qui remplace l'hypothèse (0.5) qui suppose que l'opérateur B engendre un groupe fortement continu $\left\{e^{tB}\right\}$ dans X :

Les opérateurs $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ et $-\left(B+\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$ engendrent les semi-groupes analytiques $\{U_1(t)\}$ et $\{U_2(t)\}$ respectivement sur X. (0.10)

Ceci nous conduit à énoncer le résultat suivant :

Lemme 0.0.1 *Sous les hypothèses* (0.3), (0.6), (0.7), (0.8) *et* (0.9) *les assertions suivantes sont équivalentes :*

1°) *L'opérateur* $B+\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est inversible et son inverse est borné.*

2°) *L'opérateur* $B-\left(B^2-A\right)^{1/2}$ *est inversible et son inverse est borné.*

3°) $\forall y \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$, $\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(A^{-1}B - BA^{-1}\right)y = 0.$

4°) $\forall y \in D(B)$, $\left(A^{-1}B - BA^{-1}\right)y = 0.$

5°) $D(BA) \subset D\left(B^3\right).$

Ainsi, on peut énoncer un autre résultat d'existence et d'unicité de la solution stricte:

Théorème 0.0.2 *Supposons que les conditions* (0.3), (0.6), (0.7), (0.8), (0.9) *et* (0.10) *sont vérifiées. Si, de plus,* $D(BA) \subset D(B^3)$ *alors, pour toute fonction* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ *et pour chaque* $u_0,\ u_1 \in D(A)$, *le problème aux limites* (0.1)-(0.2) *admet une solution stricte unique* $u(.)$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

la preuve de ce théorème est identique à celle faite pour le théorème 0.0.1.

(Voir la preuve dans [5]).

. Chapitre 3 : On montrera un résultat plus fort, qui caractérise l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte du problème (0.1)-(0.2). C'est le :

Théorème 0.0.3 *(Théorème essentiel de régularité maximale)*

Supposons que les conditions (0.3), (0.6), (0.7), (0.8), (0.9) *et* (0.10) *sont vérifiées. Si, de plus,* $D(BA) \subset D(B^3)$ *alors, pour toute fonction* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ *et pour chaque* $u_0,\ u_1 \in D(A)$, *satisfaisant* $f(i)$, $Au_i \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2;\infty) = (D(A);X)_{1-\theta/2,\infty}$, $i = 0, 1$, *la solution stricte unique* u *du problème aux limites* (0.1)-(0.2) *possède la propriété de régularité maximale* u'', Bu', $Au \in C^{\theta}([0,1];X)$.

La preuve de ce théorème repose sur la théorie d'interpolation (voir Triebel [23]).

. Chapitre 4 : On s'intéressera à l'illustration des résultats obtenus en considérant quelques exemples concrets en équations aux dérivées partielles.