MÉMOIRE DE MAGISTER

Présenté par l'étudiant : Mohamed MERABET

Sous la direction du Professeur : B.K. SADALLAH

Etude d'une équation différentielle quasi-linéaire abstraite singulière

المدرسة العليا للأساتذة بالقبة
Ecole Normale Supérieure de Kouba

Plan du travail

Plan du travail

Plan du travail

Plan du travail

Plan du travail

Plan du travail

Plan du travail

Notations et préliminaires

Notations et préliminaires

E_0, E_1 deux espaces de Banach tels que $E_1 \subset E_0$ avec injection continue et $\overline{E_1} = E_0$.

- On note par $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ l'ensemble des $A \in L(E_1, E_0)$ tels que, $D(A) = E_1$ et $(-A)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$.
- Le semi-groupe T_A est dit **décroissant exponentiellement** s'il vérifie

$$(*) \ldots \|T_A(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0$$

Notations et préliminaires

E_0, E_1 deux espaces de Banach tels que $E_1 \subset E_0$ avec injection continue et $\overline{E_1} = E_0$.

- On note par $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ l'ensemble des $A \in L(E_1, E_0)$ tels que, $D(A) = E_1$ et $(-A)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$.
- Le semi-groupe T_A est dit **décroissant exponentiellement** s'il vérifie

$$(*)...\|T_A(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0$$

Notations et préliminaires

- Le sous-ensemble de $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ formé des générateurs infinitésimaux de semi-groupes vérifiant $(*)$ est noté $\mathcal{H}^-(E_1, E_0)$.
- Pour $k > 0$, on pose

$$C_k(J, E_0) := \{f : J \longrightarrow E_0 \backslash [t \longmapsto t^k f(t)] \in C(J, E_0)\},$$

où $J \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle contenant 0.

- Le sous-ensemble de $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ formé des générateurs infinitésimaux de semi-groupes vérifiant $(*)$ est noté $\mathcal{H}^-(E_1, E_0)$.
- Pour $k > 0$, on pose

$$C_k(J, E_0) := \{f : J \longrightarrow E_0 \backslash [t \longmapsto t^k f(t)] \in C(J, E_0)\},$$

où $J \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle contenant 0.

Notations et préliminaires

- Soit F un ensemble non vide. Pour $k \in (1, +\infty)$ et $m \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$C_k^m(J,F) := \{f \in C^m(\dot{J},F) \backslash [t \longmapsto t^k f(t)] \in C^m(J,F)\},$$

où $\dot{J} := J \backslash \{0\}$.

-

$$C^{1-}(E_1,E_0) := \{u : E_1 \to E_0) \backslash u \text{ est lipschitzienne}\}$$

Notations et préliminaires

- Soit F un ensemble non vide. Pour $k \in (1, +\infty)$ et $m \in \mathbb{R}^+$, on pose

  $$C_k^m(J, F) := \{f \in C^m(\dot{J}, F) \backslash [t \longmapsto t^k f(t)] \in C^m(J, F)\},$$

  où $\dot{J} := J \backslash \{0\}$.

- $$C^{1-}(E_1, E_0) := \{u : E_1 \rightarrow E_0) \backslash u \text{ est lipschitzienne}\}$$

Introduction

Introduction

Les équations différentielles abstraites du premier ordre ont été étudiées par de nombreux auteurs, parmi lesquels on trouve

T. Kato ($\approx$ 1950), P. S. Sobolevskii ($\approx$ 1960),

H. Tanabe ($\approx$ 1970), H. Amann, ($\approx$ 1980, 1990, 2000)

et P. Guidotti ($\approx$ 1990, 2000).

Introduction

Notre travail a pour objet l'étude d'une équation différentielle linéaire abstraite

Equation

$$(1) \qquad u' + A(t)u = f(t), \quad t \in J \backslash \{0\},$$

Hypothèses du Problème (1)

- $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, (avec $0 < \rho < 1$ et $k > 1$),
- $f \in C_{k-1}(J, E_0)$,(avec $k > 1$).

Introduction

Notre travail a pour objet l'étude d'une équation différentielle linéaire abstraite

Equation

$$(1) \qquad u' + A(t)u = f(t), \quad t \in J\backslash\{0\},$$

Hypothèses du Problème (1)

- $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$, (avec $0 < \rho < 1$ et $k > 1$),
- $f \in C_{k-1}(J, E_0)$,(avec $k > 1$).

Introduction

Notre travail a pour objet l'étude d'une équation différentielle linéaire abstraite

Equation

$$(1) \qquad u' + A(t)u = f(t), \quad t \in J\backslash\{0\},$$

Hypothèses du Problème (1)

- $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, (avec $0 < \rho < 1$ et $k > 1$),
- $f \in C_{k-1}(J, E_0)$,(avec $k > 1$).

Introduction

et l'équation différentielle quasi-linéaire abstraite

Equation

$$(2) \qquad u' + A(t,u)u \;=\; F(t,u), \;\; t \in J\backslash\{0\}.$$

Hypothèses du Problème (2)

- $A \in C_k^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1,E_0))$, (avec $k > 1$). i.e.,

$$A(.,u) \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1,E_0)), \quad \text{pour u fixé dans } X_\alpha$$

et

$$A(t,.) \in C^{1-}(X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1,E_0)), \quad \text{pour t fixé dans J,}$$

Introduction

et l'équation différentielle quasi-linéaire abstraite

Equation

$$(2) \qquad u' + A(t,u)u = F(t,u), \quad t \in J\backslash\{0\}.$$

Hypothèses du Problème (2)

- $A \in C_k^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1,E_0))$, (avec $k > 1$). i.e.,

  $A(.,u) \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1,E_0))$, pour u fixé dans X_α

  et

  $A(t,.) \in C^{1-}(X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1,E_0))$, pour t fixé dans J,

Introduction

- $F \in C^{0,1-}_{k,b}(J \times X_\alpha, E_\beta)$(avec $0 < \beta < \alpha < 1$ et $k > 1$)

  i.e., $F \in C^{0,1-}_{k}(J \times X_\alpha, E_\beta)$ et F est borné

  sur tout sous-ensemble borné de $J \times X_\alpha$.

où J est un intervalle dans $\mathbb{R}^+$, contenant 0.

Introduction

.

- $F \in C^{0,1-}_{k,b}(J \times X_\alpha, E_\beta)$(avec $0 < \beta < \alpha < 1$ et $k > 1$)

  i.e., $F \in C^{0,1-}_{k}(J \times X_\alpha, E_\beta)$ et F est borné sur tout sous-ensemble borné de $J \times X_\alpha$.

où J est un intervalle dans $\mathbb{R}^+$, contenant 0.

Le problème linéaire de Cauchy et l'opérateur d'évolution

Le problème linéaire de Cauchy

Pour $k > 1$ et $\rho \in (0, 1)$, on suppose

(3) $$A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$$

(4) $$f \in C_{k-1}(J, E_0)$$

et on considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P\ C)_{A,\,f} \begin{cases} u' + A(t)u = f(t),\ t \in J\backslash\{0\}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

L'opérateur d'évolution

On pose

$$J_\Delta := \{(t,s) \in J \times J : s \leq t\},$$
$$J_\Delta^* := \{(t,s) \in J \times J : s < t\}.$$

Définition 01

On appelle **opérateur d'évolution (Solution fondamentale, Propagateur)** associé au Problème $(P\ C)_{A,\,f}$ l'opérateur $U_A : J_\Delta \longrightarrow L(E_0)$ vérifiant les propriétés suivantes:

Soutenance , 20 Juin 2007

M. MERABET

L'opérateur d'évolution

i) $U_A(t,s)U_A(s,r) = U_A(t,r), U_A(s,s) = I,$

$r \leq s \leq t,\ (t,s) \in J_\Delta.$

ii) $U_A(t,s) \in L(E_0, E_1)$, pour $(t,s) \in J_\Delta$.

iii) $t \longmapsto U_A(t,s)$ est différentiable sur $]s,t]$

dans $L(E_0)$, et $\frac{\partial}{\partial t}U_A(t,s) = -A(t)U_A(t,s),$

$(t,s) \in J_\Delta^*.$

iv) $\frac{\partial}{\partial s}U_A(t,s)x = U_A(t,s)A(s)x,\ pour\ \ (t,s) \in J_\Delta$

et $x \in E_1$.

L'opérateur d'évolution

Corollaire 01

Supposons que $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0))$ pour tout

$\rho \in (0, 1)$, alors il existe un opérateur d'évolution U_A

unique associé au Problème $(P\ C)_{A,\,f}$.

L'opérateur d'évolution

Soit E, F deux espaces de Banach, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 02

On note par $\mathfrak{R}(E,F,\alpha)$ l'espace de Fréchet (espace localement convexe, métrisable et complet) suivant

$$\mathfrak{R}(E,F,\alpha) := \{k \in C(J_\Delta^*, L(E,F)) : \|k\|_{(\alpha),T} < +\infty\}$$

où

$$\|k\|_{(\alpha),T} := \sup_{0\leq s<t\leq T} (t-s)^\alpha \|k(t,s)\|_{L(E,F)}, T \in \dot{J}$$

Notation: Si $E = F$, on pose $\mathfrak{R}(E,E,\alpha) := \mathfrak{R}(E,\alpha)$.

L'opérateur d'évolution

Théorème 01

Soit $\alpha, \beta \in [0,1)$, et $h \in \mathfrak{R}(E,\alpha)$. Alors

Pour tout $a \in \mathfrak{R}(E,F,\alpha)$, l'équation linéaire de Volterra

$u = a + u * h$ admet une solution unique

$u \in \mathfrak{R}(E,F,\alpha)$, telle que $u = a + a * \omega$,
où

$$w := \sum_{n\geq 1} \underbrace{h * \ldots * h}_{n \text{ fois}}.$$

et

$$a * \omega(t,s) := \int_s^t a(t,\tau)\omega(\tau,s)d\tau.$$

L'opérateur d'évolution

Corollaire 02

Si on pose

$$(5)\quad \begin{cases} u(t,\tau) := U_A(t,\tau) \\ a(t,\tau) := e^{-(t-\tau)A(\tau)} \\ h(t,\tau) := [A(\tau)-A(t)]e^{-(t-\tau)A(\tau)} \\ u*h(t,\tau) := \int_0^t u(t,\sigma)h(\sigma,\tau)d\sigma \end{cases}$$

l'équation

$$U_A(t,\tau) = e^{-(t-\tau)A(\tau)} - \int_\tau^t U_A(t,\sigma)[A(\sigma)-A(\tau)]e^{-(\sigma-\tau)A(\tau)}d\sigma$$

devient

$$(6)\quad u = a + u*h.$$

L'opérateur d'évolution

Alors, d'après le Théorème 01, l'équation

(6) admet une solution unique $U_A \in \mathfrak{R}(E_0, 0)$ donnée

par $U_A = a + a * \omega$.

L'opérateur d'évolution

Définition 03

Soit E un espace de Banach, $M \geq 1$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{G}(E, M, \sigma)$ l'ensemble des $A \in \mathcal{C}(E)$, tels que $(-A)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$ satisfaisant à $\|e^{-tA}\|_{L(E)} \leq Me^{\sigma t}$.

Remarque 01

Soit $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$. Alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega_0 > 0$ tels que

$$t^k A(t) \in \mathcal{G}(E_i, M, -\omega_0) \quad t \in J, \quad i = 0, 1.$$

L'opérateur d'évolution

Lemme 01

Soit $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$. On suppose que

$0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ et $\beta < \min\{\rho, \frac{1}{k'}\}$. Alors il existe une

constante $c > 0$, telle que

$$\|U_A(t,\tau)\|_{L(E_\beta, E_\alpha)} \leq c \frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{(\alpha-\beta)}}, t \in J \backslash \{0\}, \tau \in (0,t),$$

où k' est l'exposant conjugué de k.

L'opérateur d'évolution

On a aussi la proposition essentielle suivante

Proposition 01

Soit $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$. Alors pour $t > 0$ et

$\alpha \in [0, 1]$, on a

$$\begin{array}{rcl} \tau & \longrightarrow & 0 \\ U_A(t,\tau) & \longrightarrow & 0 \; dans \; L(E_0, E_\alpha). \end{array}$$

L'opérateur d'évolution

Proposition 02

Soit $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$ et $f \in L_{1,Loc}(J, E_0)$. Alors il existe un opérateur d'évolution unique U_A tel que

$$u(t) = \int_0^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{7}$$

est une solution du Problème $(P\ C)_{A,f}$.

L'opérateur d'évolution

Proposition 03

Supposons que $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$ et

$f \in C_{k-1}(J, E_0)$. Alors

$$(8) \qquad u(.) \quad = \quad \int_0^{.} U_A(., \tau) f(\tau) d\tau \in C^{\nu}(J, E_{\alpha})$$

où $\alpha \in [\frac{1}{k'}, 1)$ et $0 \leq \nu < \min\{\alpha, (1-\alpha)\}$.

Pour voir la démonstration de cette proposition on a besoin du lemme suivant :

L'opérateur d'évolution

Lemme 02

Supposons que $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$ et $\alpha \in (0,1)$. Alors

$$\|U_A(t,\tau) - U_A(r,\tau)\|_{0 \longrightarrow \alpha} \leq c(t,r,\tau)\tau^{k\alpha}(t-r)^{\epsilon}$$

où

$$\epsilon < \min\{\alpha, (1-\alpha)\}$$

et

$$c(t,r,\tau) = const[\frac{(t-r)^{\alpha-\epsilon}}{(t-\tau)^{\alpha}(r-\tau)^{\alpha}} + (t-\tau)^{1-\alpha-\epsilon}(r-\tau)^{1-\widetilde{\rho}} + 1]$$

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

On s'intéresse à l'étude du problème de Cauchy

quasi-linéaire suivant :

$$u' + A(t,u)u = F(t,u), \quad t \in J\backslash\{0\} \qquad (P\,C\,Q)_{A,F}$$

où

(9) $$A \in C_k^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)),$$

et

(10) $$F \in C_{k,b}^{0,1-}(J \times X_\alpha, E_\beta), \quad 0 < \beta < \alpha < 1.$$

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

Théorème 02

Supposons que les hypothèses (9)-(10) sont vérifiées, alors il existe $T > 0$, tel que le Problème $(P\ C\ Q)_{A,F}$ admet une solution unique $u \in C([0, T], X_\alpha)$ qui est le point fixe de la formule de variation de la constante suivante :

$$u(t) = \int_0^t U_{A(.,u)}(t,\tau)F(\tau, u(\tau))d\tau.$$

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

De plus, on a

$$u \in C^{\delta}([0,T],E_{\epsilon}) \cap C((0,T],E_1) \cap C^1((0,T],E_0)$$

où $\epsilon, \delta \in (0,1)$, tel que $\epsilon \geq \frac{1}{k'}$ et $\delta < \min\{\epsilon, (1-\epsilon)\}$.

La preuve de ce théorème nécessite les résultats préliminaires suivants :

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

Corollaire 03

Supposons que $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$ et

$f \in C_{k-1}(J, E_0)$. Alors il existe deux constantes

$\delta, \varrho \in (0, 1)$, tels que

$$\|u(t) - u(s)\|_\alpha \leq c \; t^\varrho |t - s|^\delta, 0 \leq s \leq t \in J$$

où u est une solution du Problème $(P, C)_{A,f}$.

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

Lemme 03

On suppose que $A, B \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$

et $f, g \in C_{k-1}(J, E_\beta)$. Soit $\alpha \in [\frac{1}{k'}, 1)$ et $\beta \in (0, \min\{\rho, \frac{1}{k'}\})$ tels

que $\alpha - \beta > \frac{k-2}{k-1}$ avec $k > 2$.

De plus, soit u, v des solutions de $(P\ C)_{A,\ f}$, $(P\ C)_{B,\ g}$

respectivement. Alors

$$\|u(t) - v(t)\|_\alpha \leq c\ t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2}(\|A - B\|_{C_k} + \|f - g\|_{C_{k-1}}$$

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

Dans ce qui suit, désignons par $\Phi(u)$ l'application

suivante :

$$\Phi(u)(t) \;:=\; \int_0^t U_{A(.,u)}(t,\tau)F(\tau,u(\tau))d\tau, t \in J.$$

où $u \in C^\delta(J,E_\alpha)$, tel que δ vérifie la condition du

Corollaire 03, et $\overline{\mathbb{B}}_{C^\delta(J,E_\alpha)}(0,R)$ la boule fermée de

centre 0 et de rayon R dans $C^\delta(J,E_\alpha)$.

Voyons à présent quelques propriétés de $\Phi(u)$.

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

Lemme 04

Supposons que les conditions (9) et (10) sont vérifiées. Soit $\delta \in (0,1)$ et α, β du Lemme 03. Alors il existe une constante $R > 0$ telle que pour tout $u, v \in \overline{\mathbb{B}}_{C^{\delta}(J,E_{\alpha})}(0,R)$, on a

$$\|\Phi u(t)\|_{\alpha} \quad \leq \quad c\; t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2}$$

et

$$\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\|_{\alpha} \quad \leq \quad c\; t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2} \|u-v\|_{C(J,E_{\alpha})},$$

où c est une constante ne dépendant pas de u et v.

Le problème quasi-linéaire de Cauchy

Théorème du point fixe de Banach

Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même. Supposons qu'il existe une constante c vérifiant $0 < c < 1$ telle que

$$\|Tu - Tv\|_E \leq c\|u - v\|_E, \quad \forall u, v \in E.$$

Alors, l'opérateur T possède un point fixe unique, i.e., il existe $u \in E$, unique, tel que

$$Tu = u.$$

Applications

Application 01: Problèmes paraboliques linéaires, non homogènes

Applications

- Supposons que

$$(11) \qquad \mathbb{A}, \mathbb{B} \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{E}^{\varrho}(\Omega)), (\textit{ avec } \rho \in (0,1))$$

où $\varrho \in [\frac{1}{2}, 1]$ tel que $\gamma \in [1-\varrho, \frac{\varrho}{2}]$

- Supposons pour $\sigma \in [0,1]$ que

$$(12) \qquad f, g \in C^{\sigma}_{k-1}(J, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}(t)} \times \partial S^{2\gamma}_{p}),$$

Applications

- Supposons que

$$(11) \qquad \mathbb{A}, \mathbb{B} \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{E}^{\varrho}(\Omega)), (\text{ avec } \rho \in (0,1))$$

où $\varrho \in [\frac{1}{2}, 1]$ tel que $\gamma \in [1-\varrho, \frac{\varrho}{2}]$

- Supposons pour $\sigma \in [0,1]$ que

$$(12) \qquad f, g \in C_{k-1}^{\sigma}(J, S_{p,\mathbb{B}(t)}^{2\gamma-2} \times \partial S_p^{2\gamma}),$$

Applications

On considère le problème parabolique à valeurs initiales, singulier suivant :

$$(13) \qquad \begin{cases} u' + \mathbb{A}(t)u = f(t) & \text{dans } \Omega \times J\backslash\{0\}, \\ \mathbb{B}(t)u = g(t) & \text{sur } \Gamma \times J\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Alors

le Problème (13) admet une solution unique u telle que

$$u \in C^{\nu}(J, S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\mu}),$$

pour $0 \leq \nu < \min\{\mu, (1-\mu)\} < 1$, tel que $\nu \geq \frac{1}{k'}$.

Application 02: Problème parabolique quasi-linéaire aux limites

Applications

Soit $\gamma \in (\frac{1}{2p}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2p})$ et $\alpha, \beta \in (0,1)$ telles que $0 < \beta < \alpha < 1$.

- Supposons que

$$(14) \qquad \mathbb{A}, \mathbb{B} \in C_k^{\rho,1-}(J \times S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\alpha}, \mathcal{E}^{\varrho}(\Omega))$$

pour $\varrho \in [\frac{1}{2}, 1]$, tel que $\gamma \in [1 - 1\varrho, \varrho]$

-

$$(15) \quad f, g \in C_{k-1}^{\rho,1-}(J \times S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\alpha}, S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\beta} \times \partial S_p^{2\gamma+2\beta})$$

Applications

Soit $\gamma \in (\frac{1}{2p}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2p})$ et $\alpha, \beta \in (0,1)$ telles que $0 < \beta < \alpha < 1$.

- Supposons que

(14) $$\mathbb{A}, \mathbb{B} \quad \in \quad C_k^{\rho,1-}(J \times S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\alpha}, \mathcal{E}^{\varrho}(\Omega))$$

pour $\varrho \in [\frac{1}{2}, 1]$, tel que $\gamma \in [1 - 1\varrho, \varrho]$

-

(15) $$f, g \quad \in \quad C_{k-1}^{\rho,1-}(J \times S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\alpha}, S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\beta} \times \partial S_p^{2\gamma+2\beta})$$

Applications

On considère Problème parabolique quasi-linéaire aux limites

$$(16) \qquad \begin{cases} \dot{u} + \mathbb{A}(t,u)u = f(t,u) & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ \mathbb{B}(t,u)u = g(t,u) & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Alors

le Problème (16) admet une solution maximale unique

$u \in C(J^+, E_\alpha)$, où J^+ est l'intervalle maximal

d'existence.

De plus

$$u \in C^\nu(J^+, E_\mu) \cap C(\dot{J}^+, E_1) \cap C^1(\dot{J}^+, E_0),$$

pour $0 \leq \nu < \min\{\mu, (1-\mu)\} < 1$, tel que $\nu \geq \frac{1}{k'}$.

Soutenance , 20 Juin 2007

M. MERABET

Perspectives

- Étudier le Problème de Cauchy abstrait non homogène suivant :
$$\begin{cases} u' + A(t)u = f(t) & 0 < t \leq T, \\ u(0) = x & , \end{cases}$$
où le domaine de $A(t)$ dépend de t i.e., $D(A(t)) = D(t)$.

- Étudier l'équation différentielle abstraite complète du second ordre
$$u''(t) + 2B(t)u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in (0, 1)$$
avec les conditions aux limites $u(0) = u_0$ et $u(1) = u_1$, où $A(t)$ et $B(t)$ sont deux opérateurs linéaires fermés.

Perspectives

- Étudier le Problème de Cauchy abstrait non homogène suivant :

$$\begin{cases} u' + A(t)u = f(t) & 0 < t \leq T, \\ u(0) = x & , \end{cases}$$

où le domaine de $A(t)$ dépend de t i.e., $D(A(t)) = D(t)$.

- Étudier l'équation différentielle abstraite complète du second ordre

$$u''(t) + 2B(t)u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in (0, 1)$$

avec les conditions aux limites $u(0) = u_0$ et $u(1) = u_1$, où $A(t)$ et $B(t)$ sont deux opérateurs linéaires fermés.

Perspectives

- Étudier le Problème de Cauchy abstrait non homogène

  suivant :

$$\begin{cases} u' + A(t)u = f(t) & 0 < t \leq T, \\ u(0) = x & , \end{cases}$$

  où le domaine de $A(t)$ dépend de t i.e., $D(A(t)) = D(t)$.

- Étudier l'équation différentielle abstraite complète

  du second ordre

$$u''(t) + 2B(t)u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in (0,1)$$

  avec les conditions aux limites $u(0) = u_0$ et $u(1) = u_1$, où

  $A(t)$ et $B(t)$ sont deux opérateurs linéaires fermés.

Perspectives

- Étudier les problèmes aux limites dans des domaines non réguliers.

Perspectives

- Étudier les problèmes aux limites dans des domaines non réguliers.

Bibliographie

- H. AMANN. *Dynamic theory of quasilinear parabolic equation - I* . Abstract evolution equations. Nonlinear Analysis, 12, 1988, 895 - 919.
- H. AMANN. *Dynamic theory of quasilinear parabolic equation - III* . Global existence. Math. Z. 202, 1990, 219 - 250.
- H. AMANN. *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, Function spaces, Differential operators and nonlinear analysis*. Teubner- Texte zur Math. 133, 1993, 9 - 126.
- H. AMANN. *Linear and quasilinear parabolic problems*. Birkhäuser I. Basel, 1995.

Bibliographie

- A. Favini, A. Yagi. *Space and time regularity for degenerate evolution equations*. J. Math. Soc. Japan. 44(2), 1992, 331 - 350.
- P. Guidotti. *Diffusion in glassy polymers; a free boundary problem.* Advances in Mathematical sciences and applications, 1997.
- P. Guidotti. *Singular quasilinear abstract Cauchy problems.* Nonlinear Anal. 32(5), 1998, 667-695.
- P. Guidotti. *Optimal regularity for a class of singular abstract parabolic equations.* J. Differential Equations. 232, 2007, 468-486.
- D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equation.* Lecture Notes in Math. Vol. 840. Springer Verlag, Berlin, 1981.

Bibliographie

P. E. SOBOLEVSKII. *Equation of parabolic type in Banach space*. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1966, 49, 1 - 62.

H. TANABE. *On the equation of evolution in Banach space*. Osaka Math. J., 1960, 12, 363 - 376.

H. TANABE. *Equations of evolution* Pitman, London, 1979.

H. TRIBEL. *Interpolation theory, Function spaces, Differential operators.* North Holland, Amsterdam, 1978.

MERCI POUR VOTRE

ATTENTION