Chapitre 4

Problèmes aux limites à valeurs initiales, singuliers

4.1 Rappels et définitions

- $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- Dans tout ce qui suit Ω désignera un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. Nous supposons que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où Γ_0, Γ_1 sont des ouverts disjoints dans $\partial\Omega$.
- On désigne par $\nu = \nu(x) = (\nu^1, \nu^2, ..., \nu^n)$ le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$.
- Soit δ la fonction définie sur $\partial\Omega$, par

$$\delta(x) := \begin{cases} 1, & \mathrm{x} \in \Gamma_1, \\ 0, & \mathrm{x} \in \Gamma_0, \end{cases}$$

alors

$$\delta \in C(\partial\Omega, \{0, 1\}).$$

♦ Soit $\sigma : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ vérifiant

$$\sigma(0) = 0$$

et

$$\sigma(t) > t, \;\; pour \; 0 < t < 1.$$

On pose

$$\rho(\alpha) := \sigma(|2\alpha - 1|), \; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

De plus, on définit $\mathbb{E}^\alpha(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Omega) &:= [C(\overline{\Omega}, \mathbb{K})]^{n^2+n+n} \times L_\infty(\Omega, \mathbb{K}) \times C(\partial\Omega, \mathbb{K}), \\ \mathbb{E}^\alpha(\Omega) &:= [C^{\rho(\alpha)}(\overline{\Omega}, \mathbb{K})]^{n^2+n+n} \times L_\infty(\Omega, \mathbb{K}) \times C^{\rho(\alpha)}(\partial\Omega, \mathbb{K}), \\ \mathbb{E}^1(\Omega) &:= [C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{K})]^{n^2+n+n} \times L_\infty(\Omega, \mathbb{K}) \times C^1(\partial\Omega, \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Remarques 4.1.1

1. $\mathbb{E}^\alpha(\Omega) = \mathbb{E}^{1-\alpha}(\Omega),$ *avec* $0 \leq \alpha \leq 1,$ *car* $\rho(\alpha) = \rho(1-\alpha).$
2. $\mathbb{E}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{E}^\alpha(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{E}^\beta(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \mathbb{E}(\Omega),$ *avec* $\frac{1}{2} < \beta < \alpha < 1,$ *car* $0 = \rho(\frac{1}{2}) < \rho(\beta) < \rho(\alpha) < \rho(1).$
3. $\mathbb{E}^\alpha(\Omega)$ *ne dépend que* σ *et* $\alpha \in (0,1) \backslash \{\frac{1}{2}\}.$

♦ Soit $(a_{jk}, a_j, b_j, a_0, c) \in \mathbb{E}^\alpha(\Omega)$ tels que $a_{jk} = a_{kj}$ $(j, k \in \{1, 2, ..., n\}).$ On définit l'opérateur différentiel $\mathbb{A}$ par

$$\mathbb{A}u := -\partial_j(a_{jk}\partial_k u + a_j u) + b_j \partial_j u + a_0 u$$

et l'opérateur de frontière $\mathbb{B}$, par

$$\mathbb{B}u := \delta\{\nu^j \gamma_\partial(a_{jk}\partial_k u + a_j u) + c\gamma_\partial u\} + (1-\delta)\gamma_\partial u,$$

où γ_∂ est l'opérateur de trace.

Définition 4.1.1

L'opérateur différentiel $\mathbb{A}$ est dit ***fortement uniformément elliptique****, si*

$$Re[a_\pi(x,\xi)\eta|\eta] > 0, \;\; (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times S^{n-1}, \;\; \eta \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\},$$

où $a_\pi(x,\xi) := a_{jk}(x)\xi^j\xi^k$, $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ et S^{n-1} est la sphère de $\mathbb{R}^n$, en notant $[a_\pi(x,\xi)\eta|\eta]$ le produit scalaire.

♦ Le sous-ensemble de $\mathbb{E}^\alpha(\Omega)$, formé des opérateurs fortement uniformément elliptique, est noté $\mathcal{E}^\alpha(\Omega)$.

♦ **Espaces de Besov**

Soit φ_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, par :

$$\varphi_0(x) \;\; = \;\; \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

On pose

$$\varphi_1(x) := \varphi_0(\frac{x}{2}) - \varphi_0(x),$$

$$\varphi_k(x) := \varphi_1(2^{-k}x), \; x \in \mathbb{R}^n, \; k = 2, 3, ...,$$

alors, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) = 1, \; x \in \mathbb{R}^n$$

et

$$Supp \; (\varphi_k) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \; 2^{k-1} < \|x\| < 2^{k+1}\}, \; k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

On pose

$$\varphi_k(D) := \mathcal{F}^{-1}\varphi_k\mathcal{F},$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier.

Définition 4.1.2 ([7], [35])

Pour $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de ***Besov*** *$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{u \in S'(\mathbb{R}^n); \|u\|_{B^s_{p,q}} < \infty\}$$

où $S'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de distributions tempérées et

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} := [\sum_{k=0}^{k=\infty} (2^{sk}\|\varphi_k(D)u\|_{L^p})^q]^{\frac{1}{q}}.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach.

Quelques propriétés des espaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

- Si $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ et $p_0, p_1 \in [1,\infty]$ tels que $s_1 - \frac{n}{p_1} > s_0 - \frac{n}{p_0}$, on a

$$B^{s_1}_{p_1,q} \hookrightarrow B^{s_0}_{p_0,q}, \quad \frac{1}{p_1} > \frac{1}{p_0}, \ 1 \leq q \leq \infty.$$

- $D \hookrightarrow_d B^s_{p,q}, \quad -\infty < s < \frac{1}{p}, \ 1 \leq p, q < \infty.$
- $(B^s_{p,q})' := B^{-s}_{p',q'}, \ -1 + \frac{1}{p} < s < \frac{1}{p}, \ 1 < p, q < \infty.$

♦ Soit $p \in (1,\infty)$. On pose

$$S^s_p(\Omega) \ := \begin{cases} B^s_{p,p}(\Omega), & \mathrm{s} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \\ W^s_p(\Omega), & \mathrm{s} \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $B^s_{p,p}$ et W^s_p sont les espaces de Besov et de Sobolev respectivement.

♦ Soit $p \in (1,\infty)$ et $(\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{E}(\Omega) := \mathcal{E}^0(\Omega)$.

Si $\delta \notin \{0,1\}$, on pose

$$S^s_{p,\,\mathbb{B}} \ := \begin{cases} S^s_p(\Omega), & \mathrm{s} \in [0, \frac{1}{p}), \\ \{u \in S^s_p(\Omega) \backslash (1-\delta)\gamma_\partial u = 0\}, & \mathrm{s} \in (\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}), \\ \{u \in S^s_p(\Omega) \backslash \mathbb{B}u = 0\}, & \mathrm{s} \in (1 + \frac{1}{p}, 2]. \end{cases} \tag{4.2}$$

et

$$S^s_{p,\,\mathbb{B}} \ := \begin{cases} \{v \in S^{-s}_{p'}(\Omega) \backslash \mathbb{B}^\sharp v = 0\}', & \mathrm{s} \in [-2, -2 + \frac{1}{p}), \\ \{v \in S^{-s}_{p'}(\Omega) \backslash (1-\delta)\gamma_\partial v = 0\}', & \mathrm{s} \in (-2 + \frac{1}{p}, -1 + \frac{1}{p}), \\ S^{-s}_p(\Omega), & \mathrm{s} \in (-1 + \frac{1}{p}, 0], \end{cases} \tag{4.3}$$

où p' est l'exposant conjugué de p, $\{.\}'$ le dual de $\{.\}$ et $\mathbb{B}^\sharp$ l'adjoint de $\mathbb{B}$.

Remarque 4.1.1

1. *Si* $\delta = 0$, *on va généralise la définition de* $S^s_{p,\mathbb{B}}(\Omega)$ *en posant*

$$S^s_{p,\mathbb{B}}(\Omega) := \{u \in S^s_p; \gamma_\partial u = 0\}.$$

2. *Si* $\delta = 1$, *on définit* $S^s_{p,\mathbb{B}}(\Omega)$, *pour* $s = \frac{1}{p}$ *en posant*

$$S^s_{p,\mathbb{B}}(\Omega) = S^s_p,\ 0 \leq s < 1 + \frac{1}{p}.$$

Théorème 4.1.1 ([7])

Soit $1 < p < \infty$ *et* $-2 + \frac{1}{p} < s_0 < s_1 < 1 + \frac{1}{p}$. *Supposons que* $0 < \theta < 1$ *et*

$$s_\theta := (1-\theta)s_0 + \theta s_1 \notin \sum\nolimits_p := \begin{cases} \{-1 + \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\} & si\ \ \delta = 0, \\ \{-2 + \frac{1}{p}, -1 + \frac{1}{p}\} & si\ \ \delta = 1, \\ (\mathbb{Z} + \frac{1}{p}, \cap(-2, 2)) & sinon, \end{cases}$$

alors

$$(S^{s_0}_{p,\mathbb{B}}, S^{s_1}_{p,\mathbb{B}})_\theta = S^{s_\theta}_{p,\mathbb{B}}, \quad s_\theta \notin \mathbb{N}.$$

♦ Soit $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathbb{E}^\alpha(\Omega)$. Alors nous appelons

$$a(u, v) \ := \ < \partial_j v, a_{jk}\partial_k u + a_j u > + < v, b_j \partial_j u + a_0 u > + < \gamma_\partial v, c\gamma_\partial u >_\partial \quad (4.4)$$

la forme de Dirichlet associée à $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, où

$$< u, v >:= \int_\Omega < u(x), v(x) >_{\mathbb{K}^n} dx$$

et

$$< u, v >_\partial := \int_{\partial\Omega} < u(x), v(x) >_{\mathbb{K}^n} d\sigma(x).$$

On a $a \in L(S^{2\beta}_{p', \mathbb{B}^\sharp}, S^{2\alpha}_{p,\mathbb{B}}; \mathbb{K})$ i.e., a est une forme bilinéaire continue.

♦ Supposons que $p \in (1, \infty)$ et $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathbb{E}^\alpha(\Omega)$. On définit

$$A_{\alpha-1} \in L(S^{2\alpha}_{p,\mathbb{B}}, S^{2\alpha-2}_{p,\mathbb{B}}),$$

la $S^{2\alpha-2}_{p,\mathbb{B}}-$ réalisation de $(\mathbb{A},\mathbb{B})$ par :

$$A_{\alpha-1} \quad := \quad \begin{cases} \mathbb{A}|_{S^{2\alpha}_{p,\,\mathbb{B}}}, & \text{si } 2\alpha \in (1+\frac{1}{p}, 2], \\ \{u \longmapsto a(.,u)\}, & \text{si } 2\alpha \in (\frac{1}{p}, 1+\frac{1}{p}). \end{cases}$$

Si $2\alpha \in (\frac{1}{p}, 1+\frac{1}{p})$, $A_{\alpha-1}$ est l'unique opérateur linéaire et continu induit par la forme de Dirichlet tel que

$$< v, A_{\alpha-1}u, >= a(v,u), (v,u) \in S^{2-2\alpha}_{p',\,\mathbb{B}^\sharp}, \times S^{2\alpha}_{p,\mathbb{B}}.$$

Il est intéressant de noter le théorème suivant :

Théorème 4.1.2 ([6])

Supposons que $p \in (1,\infty)$ *et* $2\alpha \in [1,2]$. *Si* $(\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{E}^\alpha(\Omega)$, *alors*

$$A_{\beta-1} \quad \in \quad \mathcal{H}(S^{2\beta}_{p,\mathbb{B}}, S^{2\beta-2}_{p,\mathbb{B}}) \tag{4.5}$$

et l'opérateur résolvant de $A_{\beta-1}$ *est compact, où* $2\beta \in [2-2\alpha, 2\alpha] \cap (\frac{1}{p}, 2]$.

Remarque 4.1.2

Le semi-groupe généré par la $S^{2\beta-2}_{p,\mathbb{B}}-$*réalisation* $A_{\beta-1}$ *de* $(\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{E}^\varrho(\Omega)$ *est décroissant exponentiellement si :*

$$a_j = b_j = a_0 = 0 \text{ et } \delta \not\equiv 1,$$

où

$$\delta \equiv 1 \text{ et } c \neq 1.$$

♦ Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$. On définit le sous-espace ∂S^s_p de $S^{s-\frac{1}{p}}_p(\Gamma_0) \times S^{s-1-\frac{1}{p}}_p(\Gamma_1)$ par

$$\partial S^s_p \quad := \quad \begin{cases} \{0\} \times S^{s-1-\frac{1}{p}}_p(\Gamma_1), & \text{si } \frac{1}{p} < s < 1+\frac{1}{p}, \Gamma_1 \neq \emptyset, \\ S^{s-\frac{1}{p}}_p(\Gamma_0) \times S^{s-1-\frac{1}{p}}_p(\Gamma_1), & \text{si } -1+\frac{1}{p} < s < \frac{1}{p}, \Gamma_0 \neq \emptyset, \\ \{0\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.2 Problèmes paraboliques linéaires, non homogènes

Soit $J \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle contenant 0, $2\gamma \in (\frac{1}{p}, 2]$ et $k > 1$. Supposons que

$$(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in C_k^\rho(J, \mathcal{E}^\varrho(\Omega)), (\; avec\; \rho \in (0,1)) \tag{4.6}$$

où $\varrho \in [\frac{1}{2}, 1]$ tel que $\gamma \in [1-\varrho, \frac{\varrho}{2}]$ et

$$A_{\gamma-1}(t) \in \mathcal{H}^-(S^{2\gamma}_{p,\mathbb{B}(t)}, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}(t)}) \tag{4.7}$$

pour tout $t \in \dot{J}$.

Supposons pour $\sigma \in [0,1]$ que

$$(f, g) \in C^\sigma_{k-1}(J, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}(t)} \times \partial S^{2\gamma}_p), \tag{4.8}$$

on considère les deux problèmes suivants :

1. Un problème parabolique linéaire, non homogène :

$$\begin{cases} \dot{u} + \mathbb{A}(t)u = f(t) & \text{dans } \Omega \times \dot{J}, \\ \mathbb{B}(t)u = g(t) & \text{sur } \Gamma \times \dot{J}, \\ u(.,0) = u^0, & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{4.9}$$

   où $u^0 \in S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}$.

   Définition 4.2.1

   Une fonction u est dite :

   - $S^{2\gamma}_p-$ ***Solution forte*** *du Problème (4.9) si $2\gamma \in (1+\frac{1}{p}, 2]$ et*

   $$u \in C(J, S^{2\gamma-2}_p) \cap C(\dot{J}, S^{2\gamma}_p) \cap C^1(\dot{J}, S^{2\gamma-2}_p),$$

   - $S^{2\gamma}_p-$ ***Solution faible*** *du Problème (4.9) si $2\gamma \in (\frac{1}{p}, 1+\frac{1}{p})$ et*

   $$u \in C(J, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}) \cap C(\dot{J}, S^{2\gamma}_p) \cap C^1(\dot{J}, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}),$$

   $$u(0) = u^0,$$

$$(1-\delta)\gamma_\partial u(t) = (1-\delta)g(t), t \in \dot{J}$$

de plus

$$< v, \dot{u}(t) > +a(t)(v, u(t)) =< v, f(t) > + < \gamma_\partial v, \delta g(t) >_\partial,$$

pour tout $t \in \dot{J}$ *et* $v \in S^{2-2\gamma}_{p',\mathbb{B}^\sharp}$.

Théorème 4.2.1 ([7])

Supposons que les hypothèses (4.6) − (4.7) *sont vérifiées et que de plus* $\frac{1}{p} < 2\gamma < 1+\frac{1}{p}$. *Alors*

- *Si* $\sigma > 0$ *le Problème* (4.9) *admet une* $S^{2\gamma}_p-$ *solution faible* u *unique.*
- *Si* $\sigma = 0$ *le Problème* (4.9) *admet une* $S^{2\widetilde{\gamma}}_p-$ *solution faible* u *unique,*

  pour $\frac{1}{p} < 2\widetilde{\gamma} < 2\gamma$.

Théorème 4.2.2 ([7])

Supposons que les hypothèses (4.6) − (4.7) *sont vérifiées et que de plus*

▷ $1+\frac{1}{p} < 2\gamma \leq 2\varrho < 2$,

▷ *il existe* $u_g \in C^\sigma(J, S^{2\gamma}_p) \cap C^{1+\sigma}(J, S^{2\gamma-2}_p)$, *telle que* $Bu_g = g$,

▷ $2\gamma - 1 - \frac{1}{p} < 2\rho$.

Alors

- *Si* $\sigma > 0$ *le Problème* (4.9) *admet une* $S^{2\gamma}_p-$ *solution forte* u *unique.*
- *Si* $\sigma = 0$ *et* $\gamma < \varrho$ *le Problème* (4.9) *admet une* $S^{2\widetilde{\gamma}}_p-$ *solution forte* u *unique, pour* $\frac{1}{p} < 2\widetilde{\gamma} < 2\gamma$.

2. Un problème parabolique à valeurs initiales, singulier :

$$\begin{cases} \dot{u} + \mathbb{A}(t)u = f(t) & \text{dans } \ \Omega \times \dot{J}, \\ \mathbb{B}(t)u = g(t) & \text{sur } \ \Gamma \times \dot{J}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Définition 4.2.2

Une fonction $u \in C(J, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}) \cap C^1(\dot{J}, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}})$ *vérifiant* $u(0) = 0$ *est dite :*

- $S^{2\gamma}_p-$ ***Solution forte*** *du Problème* (4.10), *si* $2\gamma \in (1 + \frac{1}{p}, 2]$ *et pour tout* $\epsilon \in \dot{J}$, u *est une* $S^{2\gamma}_p-$ *solution forte du problème*

$$\begin{cases} \dot{v} + \mathbb{A}v = f(t) & \textit{dans } \ \Omega \times \dot{J} \cap (\epsilon, \infty), \\ \mathbb{B}(t)v = g(t) & \textit{sur } \ \Gamma \times \dot{J} \cap (\epsilon, \infty), \\ v(\epsilon) = u(\epsilon) & \textit{sur } \ \Omega. \end{cases} \tag{4.11}$$

- $S^{2\gamma}_p-$ ***Solution faible*** *du Problème* (4.10), *si* $2\gamma \in (\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$, *pour tout* $\epsilon \in \dot{J}$, u *est une solution faible de* (4.11) *et*

$$< v, \dot{u}(t) > + a(t)(v, u(t)) =< v, f(t) > + < \gamma_\partial v, \delta g(t) >_\partial,$$

pour tout $t \in \dot{J} \cap (\epsilon, \infty)$ *et* $v \in S^{2-2\gamma}_{p',\mathbb{B}^\sharp}$.

Remarque 4.2.1

Chaque $S^{2\gamma}_p-$ *solution forte du Problème* (4.10) *est une* $S^{2\widetilde{\gamma}}_p-$ *Solution faible, pour* $2\widetilde{\gamma} \in (\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2.3

Supposons que les conditions (4.6) $-$ (4.8) *sont vérifiées.*

i) *Si* $2\gamma \in (\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$ *et il existe*

$$u_g \in C^\sigma(\dot{J}, S^{2\gamma}_p) \cap C^{1+\sigma}(\dot{J}, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}})$$

telle que $u_g(0) = 0$, $(1-\delta)u_g = g$ *sur* $\Gamma \times \dot{J}$ *et*

$$\dot{u}_g(t) + \mathbb{A}u_g \in C_{k-1}(J, S_p^{2\gamma-2}),$$

alors :

- *Si* $\sigma > 0$ *le Problème* (4.10) *admet une* $S_p^{2\gamma}-$ *solution faible* u *unique.*
- *Si* $\sigma = 0$ *le Problème* (4.10) *admet une* $S_p^{2\widetilde{\gamma}}-$ *solution faible* u *unique, pour* $\frac{1}{p} < 2\widetilde{\gamma} < 2\gamma$.

De plus

$$u \in C^{\nu}(J, S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\mu}),$$

pour $0 \leq \nu < \mu \wedge (1-\mu) < 1$, *tel que* $\nu \geq \frac{1}{k'}$.

ii) *Si* $2\gamma \in (1+\frac{1}{p}, 2]$ *et il existe*

$$u_g \in C^{\sigma}(\dot{J}, S_p^{2\gamma}) \cap C^{1+\sigma}(\dot{J}, S_p^{2\gamma-2})$$

telle que $u_g(0) = 0$, $\mathbb{B}u_g = g$ *sur* $\Gamma \times \dot{J}$ *et*

$$\dot{u}_g(t) + \mathbb{A}u_g \in C_{k-1}(J, S_p^{2\gamma-2}),$$

alors

le Problème (4.10) *admet une* $S_p^{2\gamma}-$ *solution forte* u *unique.*

De plus

$$u \in C^{\nu}(J, S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\mu}),$$

pour $0 \leq \nu < \mu \wedge (1-\mu) < 1$ *tel que* $2\gamma - 2 + 2\mu < 1 + \frac{1}{p}$ *et* $\nu \geq \frac{1}{k'}$.

Démonstration

Notons tout d'abord que le Problème (4.11) admet une $S_p^{2\gamma}-$solution faible u unique pour $\sigma > 0$ et une $S_p^{2\widetilde{\gamma}}-$ solution faible u unique pour $\sigma = 0$ et $\frac{1}{p} < 2\widetilde{\gamma} < 2\gamma$. Ceci est une conséquence immédiate du Théorème 4.2.1.

Posons

$$E_0 := S_{p,\,\mathbb{B}}^{2\gamma-2}, \quad E_1 := S_{p,\,\mathbb{B}}^{2\gamma}.$$

On applique le Théorème 4.1.2 sous l'hypothèse (4.6) sur $(\mathbb{A},\mathbb{B})$, on obtient

$$A_{\gamma-1} \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}(E_1, E_0).$$

Maintenant si on définit $v_g(t) \in S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}$ par

$$< v, v_g(t) >:= a(t)(v, u_g(t)), \;\; t \in J, \;\; v \in S^{2-2\gamma}_{p',\mathbb{B}^\sharp},$$

on obtient sous les hypothèses sur $\mathbb{A}$ et u_g

$$v_g \;\; \in \;\; C^{\rho\wedge\sigma}(\dot{J}, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}) \tag{4.12}$$

et en reformulant le problème parabolique à valeurs initiales, singulier au sens faible. Ceci nous ramène à chercher une fonction $v \in C(J, E_0)$ satisfaisant :

$$< \omega, \dot{v}(t) > +a(t)(\omega, v(t)) =< \omega, F(t) >,$$

pour $t \in \dot{J}$ et $\omega \in S^{2\gamma-2}_{p',\mathbb{B}^\sharp}$.

Posons

$$F := f - \dot{u}_g - v_g + \gamma'_{\Gamma_1}\delta g.$$

Comme

$$\gamma_{\Gamma_1} \in L(S^{2-2\gamma}_{p',\mathbb{B}^\sharp}, S_{p'}^{2-2\gamma-\frac{1}{p'}}(\Gamma_1))$$

et

$$\gamma'_{\Gamma_1} \in L(S_{p'}^{2-2\gamma-\frac{1}{p'}}(\Gamma_1), S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}),$$

on a

$$F \in C_{k-1}(J, S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}).$$

Maintenant réinterprétons l'équation comme une équation abstraite dans l'espace de Banach E_0, alors on cherche une solution de

$$\dot{v} + A_{\gamma-1}(t)v \;\; = \;\; F(t), \;\; t > 0, \tag{4.13}$$

puisque si v vérifie l'équation (4.13), alors $u := v + u_g$ est une solution du Problème (4.10).

Enfin, la régularité de la solution est une conséquence du Proposition 2.4.2.

La démonstration de la deuxième partie du théorème est analogue à celle de la première partie (on utilicera ici le Théorème 4.2.2.).

4.3 Problème parabolique quasi-linéaire aux limites.

Dans cette section on va donner une application relative à l'existence de la solution locale dans le cas quasi-linéaire.

Supposons que

$$2\gamma \in \left(\frac{1}{p}, 1+\frac{1}{p}\right)$$

et qu'il existe deux constantes α et β avec $0 < \beta < \alpha < 1$ telles que

$$(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in C_k^{\rho,1-}(J \times S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\alpha}, \mathcal{E}^{\varrho}(\Omega)) \tag{4.14}$$

pour $\varrho \in [\frac{1}{2}, 1]$, tel que $\gamma \in [1-1\varrho, \varrho]$ et

$$(f, g) \in C_{k-1}^{\rho,1-}(J \times S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\alpha}, S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\beta} \times \partial S_p^{2\gamma+2\beta}) \tag{4.15}$$

avec $(1-\delta)g = 0$.

De plus, supposons que pour tout $t \in J$ et $u \in S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\alpha}$ fixés, le semi-groupe généré par $-A(t,u)$ est décroissant exponentiellement, alors (d'après le Théorème 4.1.2)

$$A(t,u) \in \mathcal{H}^-(S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma}, S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2}). \tag{4.16}$$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} + \mathbb{A}(t,u)u = f(t,u) & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ \mathbb{B}(t,u)u = g(t,u) & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases} \tag{4.17}$$

Définition 4.3.1

Soit $J \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle contenant 0. Une fonction $u \in C(J, S_p^{2\beta-2}) \cap C^1(\dot{J}, S_p^{2\beta-2})$ vérifiant $u(0) = 0$ est dite :

- $S_p^{2\gamma}-$ ***Solution forte*** *du Problème (4.17) sur J si $2\gamma \in (1+\frac{1}{p}, 2]$, $u(0)=0$ et pour tout $\epsilon \in \dot{J}$, u est une $S_p^{2\gamma}-$ solution forte du problème*

$$\begin{cases} \dot{v} + \mathbb{A}(t,u)v = f(t,u) & dans \;\; \Omega \times J \cap (\epsilon, \infty), \\ \mathbb{B}(t,u)v = g(t,u) & sur \;\; \Gamma \times J \cap (\epsilon, \infty), \\ v(.,\epsilon) = u(.,\epsilon) & sur \;\; \Omega. \end{cases} \tag{4.18}$$

- $S_p^{2\gamma}-$ ***Solution faible*** *du Problème (4.17) sur J si $2\gamma \in (\frac{1}{p}, 1+\frac{1}{p})$, $u(0)=0$ et pour tout $\epsilon \in \dot{J}$, u est $S_p^{2\gamma}-$ solution faible du Problème (4.18).*

Maintenant, on pose

$$E_0 := S_{p,B}^{2\gamma-2} \; et \; E_1 := S_{p,B}^{2\gamma},$$

on obtient alors d'après le Théorème 4.1.1

$$E_\theta = (E_0, E_1) \;\; = \;\; S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\theta}. \tag{4.19}$$

Par conséquent

$$A := A_{\gamma-1} \in C_k^{\rho,1-}(J \times E_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)).$$

D'autre part, on a

$$F := f + \Im_{\gamma+\beta-1} g \in C_{k-1}^{\rho,1-}(J \times E_\alpha, E_\beta)$$

pour $2\gamma + 2\beta < 1 + \frac{1}{p}$ et

$$\Im_{\gamma+\beta-1} := \gamma_{\Gamma'} \in L(S_p^{2\gamma+\beta-1-\frac{1}{p}}(\Gamma_1), S_{p,\mathbb{B}}^{2\gamma-2+2\beta}).$$

Ainsi le problème (4.17) devient

$$\dot{u} + A(t,u)u = F(t,u), \;\; t \in \mathbb{R}^+.$$

Théorème 4.3.1

Supposons que les conditions (4.14), (4.15) et (4.16) sont vérifiées. Alors le Problème

(4.17) *admet une solution maximale unique* $u \in C(J^+, E_\alpha)$, *où* J^+ *est l'intervalle maximal d'existence.*

D'autre part cette solution est le point fixe unique de la formule singulière abstraite de variation de la constante dans l'espace de Banach $S^{2\gamma-2}_{p,\mathbb{B}}$*:*

$$u(t) = \int_0^t U_{A(.,u)}(t,\tau)F(\tau, u(\tau))d\tau.$$

De plus

$$u \in C^\nu(J^+, E_\mu) \cap C(\dot{J}^{+,E_1}) \cap C^1(\dot{J}^+, E_0),$$

pour $0 \leq \nu < \mu \wedge (1-\mu) < 1$, *tel que* $\nu \geq \frac{1}{k'}$.

Enfin, u *est une* $S^{2\gamma}_p-$ *solution faible du Problème* (4.17).

Démonstration

On écrit le Problème 4.17 sous la forme suivante :

$$< \dot{u}, v > +a(t,u)(u,v) =< f(t,u), v > + < \gamma_{\Gamma_1} v, g(t,u) >$$

où $a(t,u)$ est la forme de Dirichlet associée à $(\mathbb{A}, \mathbb{B})(t,u)$ et $v \in S^{2-2\gamma}_{p',\mathbb{B}^\sharp}$ une fonction test.

Du fait que

$$< \gamma_{\Gamma_1} v, g(t,u) >=< \gamma'_{\Gamma_1} g(t,u), v >=< \Im_{\gamma+\beta-1} g(t,u), v >,$$

on a

$$\dot{u} + A(t,u)u = F(t,u) :=< f(t,u), . > +\Im_{\gamma+\beta-1} g(t,u).$$

Les hypothèses (4.15), (4.16) permettent d'écrire

$$[(t,u) \longmapsto F(t,u) \in C^{\rho,1-}_{k-1}(J \times E_\alpha, E_\beta)].$$

Ainsi, sous les hypothèses sur A le Théorème 4.1.2 implique

$$a \in C^{\rho,1-}_{k-1}(J \times E_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)).$$

Alors, grâce au Théorème 3.3.1, il existe une solution maximale unique

$$u \in C^\nu(J^+, E_\mu) \cap C(\dot{J}^{+,E_1}) \cap C^1(\dot{J}^+, E_0),$$

pour $0 \leq \nu < \mu \wedge (1-\mu) < 1$, tel que $\nu \geq \frac{1}{k'}$.