Chapitre 3

Le problème quasi-linéaire de Cauchy singulier

Dans ce chapitre nous étudions un problème de Cauchy quasi-linéaire singulier du type parabolique associé à un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. Comme dans le chapitre précédent, nous sommes principalement intéressés par la question d'existence, d'unicité et de régularité de la solution.

3.1 Quelques notations

♦ Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$ et $\theta \in (0,1)$. On pose

$$E_\theta := (E_0, E_1)_\theta$$

l'espace d'interpolation entre E_0, E_1,

et

$$(E_0, E_1)_j := E_j, \ pour \ j = 0, 1.$$

♦ Soit k, ρ deux nombres réels tels que $\rho \in (0,1)$ et $k > 1$; on désigne par k' l'exposant conjugué de k.

♦ Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach tels que $E_1 \hookrightarrow_d E_0$ et X_α un sous-ensemble ouvert de E_α.

- $C^{1-}(X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)) := \{u : X_\alpha \longrightarrow \mathcal{H}^-(E_1, E_0) \backslash u \textit{ est lipschitzienne}\}$.
- Dans tout ce qui suit $C_k^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$ désignera l'ensemble des A telles $A(.,u) \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, pour u fixé dans X_α et $A(t,.) \in C^{1-}(X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, pour t fixé dans J.
- Soit $\alpha, \beta \in (0,1)$. $C_{k,b}^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, E_\beta)$ désignera l'ensemble des $F \in C_k^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, E_\beta)$ tels que F soit borné sur tout sous-ensemble borné de $J \times X_\alpha$.

3.2 Position du problème et hypothèses

On s'intéresse à l'étude du problème de Cauchy quasi-linéaire suivant :

$$\dot{u} + A(t,u)u = F(t,u), \quad t \in \dot{J} \qquad (P\ C\ Q)_{A,F}$$

où

$$A \in C_k^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)), \tag{3.1}$$

et

$$F \in C_{k,b}^{0,1-}(J \times X_\alpha, E_\beta), \textit{ pour } 0 < \beta < \alpha < 1. \tag{3.2}$$

Définition 3.2.1

*Une fonction $u : J \longrightarrow X_\alpha$ est dite **solution** du Problème $(P\ C\ Q)_{A,F}$ si elle vérife les deux propriétés :*

i) $u \in C(J, E_0) \cap C^1(\dot{J}, E_0)$,

ii) $u(t) \in D(A(t, u(t))), t \in \dot{J}$ *et* $\dot{u}(t) + A(t, u(t)u(t) = F(t, u(t)), \quad t \in \dot{J}$.

3.3 Résultat principal d'existence et d'unicité

On démontrera le résultat principal suivant :

Théorème 3.3.1

Supposons que les hypothèses (3.1)-(3.2) sont vérifiées, alors il existe $T > 0$*, tel que le Problème* $(P\ C\ Q)_{A,F}$ *admet une solution unique* $u \in C([0,T], X_\alpha)$ *qui est le point fixe de la formule de variation de la constante suivante :*

$$u(t) = \int_0^t U_{A(.,u)}(t,\tau)F(\tau, u(\tau))d\tau.$$

De plus, on a

$$u \in C^\delta([0,T], E_\epsilon) \cap C((0,T], E_1) \cap C^1((0,T], E_0)$$

où $\epsilon, \delta \in (0,1)$*, tel que* $\epsilon \geq \frac{1}{k'}$ *et* $\delta < \epsilon \wedge (1-\epsilon)$.

La preuve de ce théorème nécessite les résultats préliminaires suivants :

Lemme 3.3.1

Soit $A, B \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$*. Alors il existe une constante* $c > 0$*, telle que :*

$$\|U_A(t,\tau) - U_B(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} \leq c\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{\alpha-\beta}}\|A - B\|_{C_k}, \; 0 \leq \tau < t \in J.$$

Démonstration

De (2.8), on peut écrire

$$U_A(t,\tau) - U_B(t,\tau) = \int_\tau^t U_A(t,\sigma)[A(\sigma) - B(\sigma)]U_B(\sigma,\tau)d\sigma.$$

On applique le Lemme 2.3.1. On a

$$\begin{aligned}
\|U_A(t,\tau)-U_B(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha} &\leq \int_\tau^t \|U_A(t,\sigma)[A(\sigma)-B(\sigma)]U_B(\sigma,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha}d\sigma,\\
&\leq \int_\tau^t \|U_A(t,\sigma)\|_{0\longrightarrow\alpha}\|[A(\sigma)-B(\sigma)]\|_{1\longrightarrow 0}\|U_B(\sigma,\tau)\|_{\beta\longrightarrow 1}d\sigma,\\
&\leq c\|A-B\|_{C_k}\int_\tau^t \frac{\sigma^{k\alpha}}{(t-\sigma)^\alpha}\frac{1}{\sigma^k}\frac{\tau^{k(1-\beta)}}{(\sigma-\tau)^{1-\beta}}d\sigma,\\
&\leq c\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{\alpha-\beta}}\|A-B\|_{C_k}.
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Lemme 3.3.2

On suppose que $A, B \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$ et $f, g \in C_{k-1}(J, E_\beta)$. Soit $\alpha \in [\frac{1}{k'}, 1)$ et $\beta \in (0, \rho \wedge \frac{1}{k'})$ tels que $\alpha - \beta > \frac{k-2}{k-1}$ avec $k > 2$.

De plus, soit u, v des solutions de $(P\ C)_{A,\,f}$, $(P\ C)_{B,\,g}$ respectivement. Alors

$$\|u(t)-v(t)\|_\alpha \leq c\, t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2}(\|A-B\|_{C_k}+\|f-g\|_{C_{k-1}}),\ 0\leq t\in J.$$

Démonstration

Grâce à la Proposition 2.4.1 on a

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau,\\
v(t) &= \int_0^t U_B(t,\tau)g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\|_\alpha &= \|\int_0^t U_A(t,\tau)f(\tau)-U_B(t,\tau)g(\tau)d\tau\|_\alpha,\\
&= \|\int_0^t \{U_A(t,\tau)-U_B(t,\tau)\}f(\tau)+U_B(t,\tau)\{f(\tau)-g(\tau)\}d\tau\|_\alpha,\\
&\leq \int_0^t \|U_A(t,\tau)-U_B(t,\tau)f(\tau)\|_\alpha d\tau + \int_0^t \|U_B(t,\tau)\{f(\tau)-g(\tau)\}\|_\alpha d\tau,\\
&\leq \int_0^t \|U_A(t,\tau)-U_B(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha}\|f(\tau)\|_\beta d\tau + \int_0^t \|U_B(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha}\|f(\tau)-g(\tau)\|_\beta d\tau.
\end{aligned}$$

Posons

$$(I) := \int_0^t \|U_A(t,\tau)-U_B(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha}\|f(\tau)\|_\beta d\tau \quad et \quad (II) := \int_0^t \|U_B(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha}\|f(\tau)-g(\tau)\|_\beta d\tau,$$

alors le Lemme 3.3.1, donne

$$(I) \leq c\|f\|_{C_{k-1}}\|A-B\|_{C_k}\int_0^t \frac{\tau^{k(\alpha-\beta)-k+1}}{(t-\tau)^{\alpha-\beta}}d\tau,$$

et grâce au Lemme 2.3.1, on a

$$(II) \leq c\|f-g\|_{C_{k-1}}\int_0^t \frac{\tau^{k(\alpha-\beta)-k+1}}{(t-\tau)^{\alpha-\beta}}d\tau.$$

Doù

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\|_\alpha &\leq c\left[\|f\|_{C_{k-1}}\|A-B\|_{C_k}+\|f-g\|_{C_{k-1}}\right]\int_0^t \frac{\tau^{k(\alpha-\beta)-k+1}}{(t-\tau)^{\alpha-\beta}}d\tau,\\ &\leq c\left[\|f\|_{C_{k-1}}\|A-B\|_{C_k}+\|f-g\|_{C_{k-1}}\right]t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2}.\end{aligned}$$

Donc le Lemme 3.3.2 est prouvé.

Remarque 3.3.1

La constante c dans le lemme précédent ne dépend que A, B, f et g.

Corollaire 3.3.1

Supposons que (2.4) et (2.5) sont vérifiées. Alors il existe deux constantes $\delta, \varrho \in (0,1)$, tels que

$$\|u(t)-u(s)\|_\alpha \leq ct^\delta|t-s|^\varrho, 0 \leq s \leq t \in J$$

où u est une solution du Problème $(P,C)_{A,\,f}$.

Démonstration

Grâce aux formules (2.31), (2.32) et (2.33), on obtient

$$\|u(t)-u(s)\|_\alpha \leq ct^\delta|t-s|^\varrho$$

où $0<\varrho<(1-\alpha)\wedge\alpha$ et $\delta=\{(k-1)\alpha+2-k-\epsilon\}\wedge\{k\alpha+\widetilde{\rho}-k+1\}\wedge\{k(\alpha-1)+2\}\wedge\{(k-1)(\alpha-1)+1-\varrho\}$.

Dans ce qui suit, désignons par $\Phi(u)$ l'application suivante :

$$\Phi(u)(t) \quad := \quad \int_0^t U_{A(.,u)}(t,\tau)F(\tau,u(\tau))d\tau, t \in J.$$

où $u \in C^{\varrho}(J, E_\alpha)$, tel que ϱ vérifie la condition du Corollaire 3.3.1, et $\overline{\mathbb{B}}_{C^\delta(J,E_\alpha)}(0,R)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon R dans $C^\delta(J,E_\alpha)$.

Voyons à présent quelques propriétés de $\Phi(u)$.

Lemme 3.3.3

Supposons que les conditions (3.1) et (3.2) sont vérifiées. Soit $\delta \in (0,1)$ et α, β du Lemme 3.3.2. Alors il existe une constante $R > 0$ telle que pour tout $u, v \in \overline{\mathbb{B}}_{C^\delta(J,E_\alpha)}(0,R)$, on a

$$\|\Phi u(t)\|_\alpha \quad \leq \quad c\, t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2}$$

et

$$\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\|_\alpha \quad \leq \quad c\, t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2}\|u-v\|_{C(J,E_\alpha)},$$

où c est une constante ne dépendant pas de u et v.

Démonstration

Grâce au Lemme 2.3.1 et l'inégalité (2.30), on aura

$$\begin{aligned}
\|\Phi u(t)\|_\alpha &= \|\int_0^t U_{A(.,u)}(t,\tau)F(\tau,u(\tau))d\tau\|_\alpha, \\
&\leq \int_0^t \|U_{A(.,u)}(t,\tau)F(\tau,u(\tau))\|_\alpha d\tau, \\
&\leq \int_0^t \|U_{A(.,u)}(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha}\|F(\tau,u(\tau))\|_\beta d\tau, \\
&\leq c\int_0^t \frac{\tau^{k(\alpha-\beta)-k+1}}{(t-\tau)^{\alpha-\beta}}d\tau.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\Phi u(t)\|_\alpha \quad \leq \quad c\, t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2}.$$

D'autre part, comme $A \in C_k^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$ et $F \in C_{k,b}^{0,1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, le Lemme 2.3.1 implique

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_\alpha &= \| \int_0^t \{U_A(.,\tau)F(\tau, u(\tau)) - U_A(.,\tau)F(\tau, v(\tau))\} d\tau \|_\alpha, \\
&\leq c\, t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2} \{\|A(.,u) - A(.,v)\|_{C_k} + \|F(.,u) - F(.,v)\|_{C_{k-1}}\}, \\
&\leq c\, t^{(k-1)(\alpha-\beta)-k+2} \|u - v\|_{C(J,E_\alpha)}.
\end{aligned}$$

D'où le Lemme 3.3.3.

Théorème 3.3.2 (Théorème du point fixe de Banach)

Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même. Supposons qu'il existe une constante c vérifiant $0 < c < 1$ telle que

$$\|Tu - Tv\|_E \leq c\|u - v\|_E, \quad \forall u, v \in E.$$

Alors, l'opérateur T possède un point fixe unique, i.e., il existe $u \in E$, unique, tel que

$$Tu = u.$$

Ce théorème s'appelle aussi le principe de contraction de Banach. C'est le plus simple et le plus ancien des théorèmes du point fixe.

Démonstration du Théorème 3.3.1

On considère l'espace de Banach suivant :

$$X_T \;:=\; \{u \in \overline{\mathbb{B}}_{C^\varrho([0,T],\, E_\alpha)}(0, R) \backslash u(0) = 0\},$$

muni de la norme de $C^\varrho(J, E_\alpha)$ où R et ϱ sont les constantes figurant dans Lemme 3.3.3 et le Corollaire 3.3.1 respectivement. On choisit T de sorte que l'application :

$$\begin{aligned}
\Phi : X_T &\longrightarrow X_T \\
u &\longmapsto v
\end{aligned}$$

où

$$v(t) \;=\; \int_0^t U_{A(.,u)}(t,\tau) F(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Alors :

- Φ est bien définie car l'opérateur d'évolution est unique et $F \in C^{0,1-}_{k,b}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$.
- D'après le Lemme 3.3.3, Φ est contractante.

En vertu du théorème du point fixe de Banach Φ admet un point fixe unique $\overline{u}$.

De la démonstration de la Proposition 2.4.1, la fonction

$$v(t) \quad = \quad \int_0^t U_{A(.,\overline{u})}(t,\tau) F(\tau, \overline{u}(\tau)) d\tau$$

coincide avec la solution u_ϵ de

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(t,\overline{u})u &= F(t,\overline{u}), t \in (0,T], \\ u(\epsilon) &= \overline{u}(\epsilon), \end{aligned}$$

sur l'intervalle $[\epsilon, T]$, où $0 < \epsilon < T$.

Donc

$$v = \Phi(\overline{u}) = \overline{u}$$

Par conséquent : $\overline{u}$ est une solution du Problème $(P\ C\ Q)_{A,F}$ sur $(\epsilon, T]$.

Ensuite, d'après les Théorèmes 2.2.2 et 2.2.3, ona

$$\overline{u} \in C((\epsilon, T], E_1) \cap C^1((\epsilon, T], E_0), \forall \epsilon > 0.$$

Ainsi $\overline{u}$ est une solution du $(P\ C\ Q)_{A,F}$ sur $(0, T]$ et

$$\overline{u} \in C((0,T], E_1) \cap C^1((0,T], E_0)$$

Enfin, grâce à la Proposition 2.4.2 il résulte que

$$\overline{u} \in C^\varrho([0,T], E_\epsilon)$$

D'où le Théorème 3.3.1.