Chapitre 2

Le problème de Cauchy et l'opérateur d'évolution

2.1 Quelques notations

♦ Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach.

- Dans tout ce qui suit $L(E_1, E_0)$ désignera l'espace des opérateurs linéaires continues de E_1 dans E_0 et $\mathcal{C}(E_1, E_0)$ désignera l'ensemble des opérateurs linéaires fermés de E_1 dans E_0
- On écrit $E_1 \hookrightarrow E_0$ si E_1 s'injecte dans E_0. De plus si E_1 dense est dans E_0, on écrit $E_1 \hookrightarrow_d E_0$.

♦ Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$ et $\theta \in (0, 1)$. On pose

$$E_\theta := (E_0, E_1)_\theta$$

l'espace d'interpolation entre E_0, E_1,

et

$$(E_0, E_1)_j := E_j, \ pour \ j = 0, 1.$$

♦ Soit $A \in L(E_\beta, E_\alpha), \alpha, \beta \in (0,1)$. On pose

$$\|A\|_{\beta \longrightarrow \alpha} := \|A\|_{L(E_\beta, E_\alpha)} = \sup_{\|x\|_{E_\beta \leq 1}} \|Ax\|_{E_\alpha}.$$

♦ Soit x et y deux nombres réels. On pose

$$x \wedge y := \min\{x, y\}$$

et

$$x \vee y := \max\{x, y\}.$$

♦ Soit $J \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle contenant 0. On pose

$$\dot{J} := J \backslash \{0\}.$$

2.2 Problème linéaire de Cauchy

Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$.

Définitions 2.2.1

i) *On note par $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ l'ensemble des $A \in L(E_1, E_0)$ (espace des applications **linéaires continues** de E_1 dans E_0) tels que, $D(A) = E_1$ ($D(A)$ est le **domaine** de A) et $(-A)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$.*

ii) *Le semi-groupe T_A est dit **décroissant exponentiellement** s'il vérifie*

$$\|T_A(t)\|_{L(E_0)} \leq M e^{-\omega t}, \qquad t \geq 0. \tag{2.1}$$

iii) *Le sous-ensemble de $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ formé des générateurs infinitésimaux de semi-groupes vérifiant (2.1) est noté $\mathcal{H}^-(E_1, E_0)$.*

iv) *Pour $k > 0$, on pose*

$$C_k(J, E_0) := \{f : J \longrightarrow E_0 \backslash [t \longmapsto t^k f(t)] \in C(J, E_0)\}.$$

v) *Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous ensemble de E. Pour $k \in (1, +\infty)$ et $m \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$C_k^m(J, F) := \{f \in C^m(\dot{J}, F) \setminus [t \longmapsto t^k f(t)] \in C^m(J, F)\}.$$

Remarques 2.2.1

1. *Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$. Alors :*

   $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ est un ouvert dans $L(E_1, E_0)$. De plus, si $E_1 = E_0 := E$, on a

$$\mathcal{H}(E, E) = L(E).$$

2. *Si F un sous-espace de E, $C_k^m(J, F)$ est un espace vectoriel normé muni de la norme*

$$\|f\|_{C_k^m} := \|t^k f(t)\|_{C^m}, f \in C_k^m(J, F).$$

   De plus si E est complet et F un sous-espace fermé on a $C_k^m(J, F)$ un espace de Banach.

Proposition 2.2.1

Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$. Alors :

i) $0 \notin \mathcal{H}^-(E_1, E_0)$

ii) *Si $m, l \in (1, +\infty)$ tels que $m \leq l$, alors $C_m(J, E_0) \subseteq C_l(J, E_0)$.*

iii) *Si $m, l \in (1, +\infty)$ tels que $m \neq l$, on a*

$$C_m^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)) \cap C_l^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)) = \emptyset.$$

Démonstration

i) On raisonne par absurde. Supposons que $0 \in \mathcal{H}^-(E_1, E_0)$, donc 0 est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $G(t)$ tel que

$$\|G(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{-\omega t}, t > 0.$$

D'autre part on a $G(t) = I$. Donc $1 = \|G(t)\|_{L(E_0)} \leq e^{-\omega t}, \forall t > 0$.

D'où la contradiction.

Donc $0 \notin \mathcal{H}^-(E_1, E_0)$.

ii) Soit $m, l \in (1, +\infty)$ tels que $m \leq l$. Supposons que $f \in C_m(J, E_0)$, donc

$[t \longmapsto t^m f(t)] \in C(J, E_0)$ et $[t \longmapsto t^{l-m} t^m f(t)] = [t \longmapsto t^l f(t)] \in C_l(J, E_0)$, car $l - m \geq 0$, alors $f \in C_m(J, E_0)$.

D'où

$$C_m(J, E_0) \subseteq C_l(J, E_0).$$

iii) Soit $m, l \in (1, +\infty)$, tels que $m \neq l$. Supposons que $l > m$ et $A \in C_m^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, donc

$$A : \dot{J} \longrightarrow \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$$

tel que

$$[t \longmapsto t^m A(t)] \in C^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)).$$

Alors

$$\lim_{t \longrightarrow 0} t^m A(t) \in \mathcal{H}^-(E_1, E_0)).$$

Notons

$$\lim_{t \longrightarrow 0} t^m A(t) = A_0.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} t & \longrightarrow & 0 \\ t^l A(t) = t^{l-m} t^m A(t) & \longrightarrow & 0.A_0 = 0 \notin \mathcal{H}^-(E_1, E_0). \end{array}$$

D'où

$$A \notin C_l^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)).$$

Cela signifie que $C_m^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)) \cap C_l^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)) = \emptyset$.

Théorème 2.2.1

Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$. Alors :

$A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ si et seulement si il existe deux constantes $k \geq 1$ et $\omega > 0$ telles que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(-A)$$

et

$$|\lambda|\|u\|_0 + \|u\|_1 \leq k\|(\lambda + A)u\|_0, u \in E_1, Re\lambda > \omega$$

où $\|.\|_j := \|.\|_{E_j}$.

Démonstration

i) La condition est nécessaire.

Soit $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$. Alors $A \in L(E_1, E_0)$, $D(A) = E_1$ et $(-A)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.

Donc, grâce au Théorème 1.2.3 de Hille-Yosida, il existe deux constantes $k \geq 1$ et $\omega > 0$ telles que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(-A).$$

On montre

$$|\lambda|\|u\|_0 + \|u\|_1 \leq k\|(\lambda + A)u\|_0, u \in E_1, Re\lambda > \omega.$$

Soit $u \in E_1$. Alors

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &= \|(\lambda + A)^{-1}(\lambda + A)\|_1, \\
&\leq \|(\lambda + A)^{-1}\|_{L(E_0)}\|(\lambda + A)\|_0, \\
&\leq \frac{k}{|\lambda|}\|(\lambda + A)\|_0, pour\ |\lambda| > \omega.
\end{aligned}$$

D'où

$$|\lambda|\|u\|_1 \leq k\|(\lambda + A)u\|_0,$$

or

$$E_1 \hookrightarrow E_0 \Longrightarrow |\lambda|\|u\|_0 \leq |\lambda|\|u\|_1,$$

Donc

$$|\lambda|\|u\|_0 \quad \leq \quad k\|(\lambda + A)u\|_0. \tag{2.2}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} Re\ \lambda > \omega \quad &\Longrightarrow \quad |\lambda| > \omega, \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{\omega}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|u\|_1 \quad \leq \quad \frac{k}{\omega}\|(\lambda + A)u\|_0. \tag{2.3}$$

D'après (2.2) et (2.3), on a :

$$|\lambda|\|u\|_0 + \|u\|_1 \leq k\|(\lambda + A)u\|_0.$$

ii) la condition est suffisante.

il suffit d'appliquer le Théorème 1.2.4.

Nous allons dans cette section faire l'hypothèses :

$$E_0 \text{ et } E_1 \text{ deux espaces de Banach tels } E_1 \hookrightarrow_d E_0$$

$$k > 1,\ \rho \in (0, 1)$$

$$A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0)) \tag{2.4}$$

$$f \in C_{k-1}(J, E_0) \tag{2.5}$$

et on considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P\ C)_{A,\,f} \begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t),\ t \in \dot{J}, \\ \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

où $\dot{u} := \partial_t u$.

En général, si $-A(t)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, le Problème $(P\ C)_{A,\,f}$ s'appelle **problème parabolique de Cauchy**. Donc sous l'hypothèse (2.4) le Problème $(P\ C)_{A,\,f}$ devient parabolique.

Dans ce cas, il est intéressant de noter le :

Théorème 2.2.2 ([7])

Soit E_0, E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$, $x \in E_0$, $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)$ et $f \in C^\rho(J, E_0)$. Alors le Problème parabolique de Cauchy $(P.C)_{A,\,f}$ admet une solution unique

$$u := u(.,0,x,A,f)$$

et

$$u \in C^\rho(\dot{J}, E_1) \cap C^{1+\rho}(\dot{J}, E_0). \tag{2.6}$$

De plus, si $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ et $x \in E_\alpha$, on a

$$u \in C^{\alpha-\beta}(J, E_\beta). \tag{2.7}$$

Définition 2.2.1 ([8])

*Soit X et Y deux espaces de Banach, tels que $X \hookrightarrow Y$, et $A : D(A) \subset Y \longrightarrow Y$ une application linéaire. Alors la $X-$**réalisation** A_X (la restriction maximale de A sur X) est un opérateur linéaire sur X, défini par*

$$\begin{aligned} D(A_X) &:= \{x \in X \cap D(A); Ax \in X\}, \\ A_X x &:= Ax. \end{aligned}$$

*Si $A \in \mathcal{C}(Y)$ (ensemble des applications **linéaires** et **fermés** de Y dans Y), on a $A_X \in \mathcal{C}(X)$.*

On peut maintenant énoncer

Théorème 2.2.3 ([7])

Soit E_0 et E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$. Supposons que $0 < \gamma < \rho < 1$ et $0 < \epsilon \leq 1 - \gamma$. Soit $x \in E_0$, $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)$ et $f \in C^\epsilon(J, E_\gamma) + C(J, E_{\gamma+\epsilon})$. Alors le Problème de Cauchy $(P\ C)_{A,\,f}$ admet une solution unique u et

$$u \quad \in \quad C(J, E_0) \cap C(\dot{J}, E_1) \cap C(\dot{J}, E_\gamma).$$

De plus u, est une solution de l'équation parabolique

$$\dot{v} + A_\gamma(t)v \quad = \quad f(t), \quad t \in \dot{J}$$

dans E_γ, où A_γ est la $E_\gamma-$ réalisation de A.

2.3 L'opérateur d'évolution

Soit E_0, E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$. On pose

$$J_\Delta := \{(t,s) \in J \times J : s \leq t\},$$

$$J_\Delta^* := \{(t,s) \in J \times J : s < t\}.$$

Définition 2.3.1 ([28])

*On appelle **opérateur d'évolution** associé au Problème $(P\ C)_{A,\,f}$ un opérateur $U_A : J_\Delta \longrightarrow L(E_0)$ vérifiant les propriétés suivantes:*

i) $U_A(t,s)U_A(s,r) = U_A(t,r), U_A(s,s) = I,\ r \leq s \leq t,\ (t,s) \in J_\Delta$.

ii) $U_A(t,s) \in L(E_0, E_1)$, *pour* $(t,s) \in J_\Delta$.

iii) $t \longmapsto U_A(t,s)$ *est différentiable sur* $]s,t]$ *dans* $L(E_0)$, *et* $\frac{\partial}{\partial t}U_A(t,s) = -A(t)U_A(t,s)$, $(t,s) \in J_\Delta^*$.

iv) $\frac{\partial}{\partial s}U_A(t,s)x = U_A(t,s)A(s)x,$ *pour* $(t,s) \in J_\Delta$ *et* $x \in E_1$.

Remarques 2.3.1

1. *Supposons que* U_A *existe, et* $f \in L_{1,\,Loc}(J, E_0)$, *alors*

$$u(t,x,A,f) := U_A(t,o)x + \int_0^t A(t)U_A(t,s)f(s)ds, t \in J$$

est une solution du Problème $(P\ C)_{A,\,f}$.

De plus,

$$u(.,x,A,f) \in C(J, E_0).$$

2. U_A *vérifie l'équation de Volterra suivante*

$$U_A(t,\tau) = e^{-(t-\tau)A(\tau)} - \int_\tau^t U_A(t,\sigma)[A(\sigma) - A(\tau)]e^{-(\sigma-\tau)A(\tau)}d\sigma \tag{2.8}$$

qui est équivalente à

$$U_A(t,\tau) = e^{-(t-\tau)A(\tau)} + \int_\tau^t e^{-(t-\sigma)A(t)}[A(t) - A(\sigma)]U_A(\sigma,\tau)d\sigma. \tag{2.9}$$

Démonstration

1. On a

$$u(0) = I$$

et

$$\begin{aligned} u'(t) &= -A(t)U_A(t,0)x + U_A(t,t)f(t) - \int_0^t A(t)U_A(t,s)f(s)ds \\ &= -A(t)U_A(t,0)x + f(t) - A(t)\int_0^t U_A(t,s)f(s)ds, \end{aligned}$$

donc

$$u'(t) + A(t)\underbrace{[U_A(t,0)x + \int_0^t U_A(t,s)f(s)ds]}_{u(t)} = f(t)$$

i.e., $u'(t) + A(t)u(t) = f(t)$.

Alors

$$u(t,x,A,f) = U_A(t,o)x + \int_0^t A(t)U_A(t,s)f(s)ds, t \in J$$

est une solution de Problème $(P\ C)_{A,\,f}$.

2. Pour $0 \leq \tau < s < t$, on a

$$\begin{aligned}
\partial_s[U_A(t,s)e^{-(s-\tau)A(\tau)}] &= \partial_s[U_A(t,s)]e^{-(s-\tau)A(\tau)} + U_A(t,s)\partial_s[e^{-(s-\tau)A(\tau)}], \\
&= U_A(t,s)A(s)e^{-(s-\tau)A(\tau)} - U_A(t,s)A(\tau)e^{-(s-\tau)A(\tau)}, \\
&= U_A(t,s)[A(s) - A(\tau)]e^{-(s-\tau)A(\tau)}.
\end{aligned}$$

donc

$$\int_\tau^t \partial_s[U_A(t,s)e^{-(s-\tau)A(\tau)}]ds = \int_\tau^t U_A(t,s)[A(s) - A(\tau)]e^{-(s-\tau)A(\tau)}ds.$$

D'où (2.8).

De même, on a

$$\begin{aligned}
\partial_s[e^{-(t-s)A(t)}U_A(s,\tau)] &= A(t)e^{-(t-s)A(t)}U_A(s,\tau) - e^{-(t-s)A(t)}A(s)U_A(s,\tau), \\
&= e^{-(t-s)A(t)}[A(t) - A(s)]U_A(s,\tau),
\end{aligned}$$

donc

$$\int_\tau^t \partial_s[e^{-(t-s)A(t)}U_A(s,\tau)]ds = \int_\tau^t e^{-(t-s)A(t)}[A(t) - A(s)]U_A(s,\tau)ds.$$

D'où (2.9).

2.3.1 Existence d'opérateur d'évolution

Soit E, F deux espaces de Banach, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 2.3.2 ([8])

On note par $\mathfrak{R}(E,F,\alpha)$ l'espace de Fréchet (espace localement convexe, métrisable et complet) suivant

$$\mathfrak{R}(E,F,\alpha) := \{k \in C(J_\Delta^*, L(E,F)) : \|k\|_{(\alpha),T} < +\infty\}$$

où

$$\|k\|_{(\alpha),T} := \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t-s)^\alpha \|k(t,s)\|_{L(E,F)}, T \in \dot{J}$$

Si $E = F$, on pose $\mathfrak{R}(E,E,\alpha) := \mathfrak{R}(E,\alpha)$.

Théorème 2.3.1 ([8])

Soit $\alpha, \beta \in [0,1)$, *et* $h \in \mathfrak{R}(E,\alpha)$. *Alors*

i) *Pour tout* $a \in \mathfrak{R}(E,F,\alpha)$, *l'équation linéaire de Volterra* $u = a + u * h$ *admet une solution unique* $u \in \mathfrak{R}(E,F,\alpha)$, *telle que* $u = a + a * \omega$.

ii) *Pour tout* $b \in \mathfrak{R}(E,F,\beta)$, *l'équation linéaire de Volterra* $v = b + h * v$ *admet une solution unique* $v \in \mathfrak{R}(E,F,\beta)$, *telle que* $v = b + \omega * b$,

où

$$w := \sum_{n \geq 1} \underbrace{h * \ldots * h}_{n\ fois}. \tag{2.10}$$

Corollaire 2.3.1

Si on pose

$$\begin{cases} u(t,\tau) := U_A(t,\tau) \\ a(t,\tau) := e^{-(t-\tau)A(\tau)} \\ h(t,\tau) := [A(\tau) - A(t)]e^{-(t-\tau)A(\tau)} \\ u * h(t,\tau) := \int_0^t u(t,\sigma)h(\sigma,\tau)d\sigma \end{cases} \tag{2.11}$$

l'équation (2.8) *devient*

$$u \quad = \quad a + u * h. \tag{2.12}$$

Alors, d'après le Théorème 2.3.1, l'équation (2.12) *admet une solution unique* $U_A \in \mathfrak{R}(E_0, 0)$ *donnée par*

$$U_A \quad = \quad a + a * \omega. \tag{2.13}$$

Remarque 2.3.1

Les valeurs de l'opérateur $U_A(t,\tau)$ *ne dépendent que des valeurs de* A *sur l'intervalle* $[\tau, t]$.

Démonstration

Considérons la famille suivante $\{A(\sigma), \sigma \in [\tau, t]\}$. Il existe alors un opérateur d'évolution $\widetilde{U_A}$

sur $[\tau, t]$. D'après l'unicité de l'opérateur d'évolution, on déduite de (2.8) ou de (2.9) que

$$U_A(t,\tau) = \widetilde{U_A}(t,\tau),\ r \leq \sigma \leq s \leq t.$$

Corollaire 2.3.2 ([8])

Supposons que $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0))$ pour tout $\rho \in (0,1)$, alors il existe un opérateur d'évolution U_A unique associé au Problème $(P\ C)_{A,\,f}$.

2.3.2 Estimation d'opérateur d'évolution

Soit E_0, E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$ et $E_\theta := (E_0, E_1)_\theta$ l'espace d'interpolation entre E_0, E_1.

Théorème 2.3.2 ([8])

i) *Pour $0 < \beta < \alpha < 1$, on a*

$$E_1 \hookrightarrow_d E_\alpha \hookrightarrow_d E_\beta \hookrightarrow_d E_0,$$

ii) *Pour $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$, avec $0 \leq \gamma < \beta < \alpha \leq 1$, il existe $c := c(\alpha, \beta, \gamma)$ telle que*

$$\|x\|_\beta \leq c\|x\|_\gamma^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}} \|x\|_\alpha^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}, x \in E_\alpha.$$

Remarques 2.3.2 ([8])

1. *Si $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ et $0 < \eta_- < \eta < \eta_+ < 1$, on a*

$$(E_\alpha, E_\beta)_{\eta_+} \hookrightarrow E_{(1-\eta)\alpha+\eta\beta} \hookrightarrow (E_\alpha, E_\beta)_{\eta_-}.$$

2. *Si $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ et $0 < \eta < 1$, on a*

$$(E_\alpha, E_\beta)_\eta := E_{(1-\eta)\alpha+\eta\beta}.$$

Définition 2.3.3 ([8])

Soit E un espace de Banach, $M \geq 1$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{G}(E, M, \sigma)$ l'ensemble des $A \in \mathcal{C}(E)$, telles que $(-A)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$ satisfaisant à $\|e^{-tA}\|_{L(E)} \leq Me^{\sigma t}$.

Remarque 2.3.2

Soit $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$. Alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega_0 > 0$ telle que

$$t^k A(t) \in \mathcal{G}(E_j, M, -\omega_0) \quad t \in J, j = 0, 1.$$

En effet, soit

$$A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0)).$$

Donc

$$A \in C^{\rho}(\dot{J}, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$$

et

$$t^k A(t) \in C^{\rho}(J, \mathcal{H}^{-}(E_1, E_0)). \tag{2.14}$$

D'après la définition de $\mathcal{H}^{-}(E_1, E_0))$ et (2.14) il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega_0 > 0$ telle que

$$t^k A(t) \in \mathcal{G}(E_j, M, -\omega_0) \quad t \in J, j = 0, 1.$$

Notations 2.3.1

- *Soit $1 < k < \infty$; on désigne par k' l'exposant conjugué de k i.e., $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$.*
- *Soit $\rho \in (0, 1)$. On pose $\widetilde{\rho} := \rho \wedge \frac{1}{k'}$.*

On aura besoin du lemme suivant qui sera très utile dans ce travail.

Lemme 2.3.1

Soit $A \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$. *On suppose que* $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ *et* $\beta < \widetilde{\rho}$. *Alors il existe une constante* $c > 0$, *telle que*

$$\|U_A(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} \leq c \frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{(\alpha-\beta)}}, t \in \dot{J}, \tau \in (0,t).$$

Démonstration

a) D'après le Corollaire 2.3.1, on a

$$U_A = a + a * \omega. \tag{2.15}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|U_A(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} = & \quad \|a(t,\tau) + a * \omega(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha}, \\ \leq & \quad \|a(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} + \|a * \omega(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha}, \\ \leq & \quad \|a(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} + \int_\tau^t \|a(t,\sigma)\omega(\sigma,\tau) d\sigma\|_{\beta \longrightarrow \alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|U_A(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} \leq \quad \|a(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} + \int_\tau^t \|a(t,\sigma)\|_{0 \longrightarrow \alpha} \|\omega(\sigma,\tau)\|_{\beta \longrightarrow 0} d\sigma. \tag{2.16}$$

D'apès (2.11), on a

$$\begin{aligned} \|a(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} &= \|e^{-(t-\tau)A(\tau)}\|_{\alpha \longrightarrow \beta}, \\ &= \|e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau^k}\tau^k A(\tau)}\|_{\alpha \longrightarrow \beta}. \end{aligned}$$

Quand $A \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, il existe (d'après la Remarque 2.3.2) deux constantes $M \geq 1$ et $\omega_0 > 0$ telles que

$$\|e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau^k}\tau^k A(\tau)}\|_{L(E_j)} \leq M \exp\left(-\omega_0 \frac{t-\tau}{\tau^k}\right), \quad j = 0, 1.$$

Par conséquent

$$\|a(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} \qquad \leq M \frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{\alpha-\beta}} \exp\left(-\omega_0 \frac{t-\tau}{\tau^k}\right). \tag{2.17}$$

b) Pour pouvoir estimer ω nous devons d'abord donné une bonne estimation de h, h^{*2} et h^{*n}, où $h^{*n} = \underbrace{h * ... * h}_{n\ fois}$.

Pour h on a

$$\begin{aligned}
\|h(t,\tau)\|_{0\longrightarrow 0} &= \|[A(\tau) - A(t)]e^{-(t-\tau)A(\tau)}\|_{0\longrightarrow 0}, \\
&= \|\{t^k A(t)(t^{-k} - \tau^{-k}) + \tau^{-k}(t^k A(t) - \tau^k A(\tau))\}e^{-(t-\tau)A(\tau)}\|_{0\longrightarrow 0}, \\
&\leq \|t^k A(t)(t^{-k} - \tau^{-k}) + \tau^{-k}(t^k A(t) - \tau^k A(\tau)\|_{1\longrightarrow 0}\|e^{-(t-\tau)A(\tau)}\|_{0\longrightarrow 0}, \\
&\leq \{\underbrace{\|t^k A(t)(t^{-k} - \tau^{-k})\|_{1\longrightarrow 0}}_{(I)} + \underbrace{\|\tau^{-k}(t^k A(t) - \tau^k A(\tau)\|_{1\longrightarrow 0}}_{(II)}\} \underbrace{\|e^{-(t-\tau)A(\tau)}\|_{0\longrightarrow 0}}_{(III)}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
(I) &= \|\frac{t^k A(t)(\tau^k - t^k)}{t^k \tau^k}\|_{1\longrightarrow 0}, \\
&\leq \frac{\sup \|t^k A(t)\|_{1\longrightarrow 0}}{t^k \tau^k}(t^k - \tau^k).
\end{aligned}$$

Donc

$$(I) \leq \frac{\sup \|t^k A(t)\|_{1\longrightarrow 0}}{t^k} k(t-\tau)^{k-1}. \tag{2.18}$$

D'autre part

$$(II) = \frac{\|t^k A(t) - \tau^k A(\tau)\|_{1\longrightarrow 0}}{\tau^k},$$

donc

$$(II) \leq c\frac{(t-\tau)^k}{\tau^k}, \tag{2.19}$$

car

$$t^k A(t) \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)).$$

D'apès (2.17), on a

$$(III) \leq M\frac{\tau^k}{(t-\tau)} \exp\left(-\omega_0 \frac{t-\tau}{\tau^k}\right) \tag{2.20}$$

et les relations (2.18), (2.19) et (2.20) donnent

$$\|h(t,\tau)\|_{0\longrightarrow 0} \leq c\left[\frac{\sup \|t^k A(t)\|_{1\longrightarrow 0}}{t^k \tau^k} k(t-\tau)t^{k-1} + \frac{(t-\tau)^\rho}{\tau^k}\right] \frac{\tau^k}{(t-\tau)} \exp\left(-\omega_0 \frac{t-\tau}{\tau^k}\right).$$

Donc

$$\|h(t,\tau)\|_{0\longrightarrow 0} \leq c\left[t^{-1}+(t-\tau)^{\rho-1}\right]\exp\left(-\omega_0\frac{t-\tau}{\tau^k}\right). \tag{2.21}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\exp\left(-\omega_0\frac{t-\tau}{\tau^k}\right) &\leq \frac{1}{\tau}\exp\left(-\omega_0\frac{t-\tau}{\tau^k}\right),\\
&= (t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}\frac{(t-\tau)^{1-\widetilde{\rho}}}{\tau}\exp\left(-\omega_0\frac{t-\tau}{\tau^k}\right),\\
&\leq c(t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}\frac{t-\tau}{\tau^k}\right),\\
&\leq c(t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{t^{k(\alpha-\beta)}}\exp\left(-\frac{\omega_0}{4}\frac{t-\tau}{\tau^k}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{t}\exp\left(-\omega_0\frac{t-\tau}{\tau^k}\right) \leq c(t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{t^{k(\alpha-\beta)}}. \tag{2.22}$$

On déduit de (2.21) et (2.22) que

$$\|h(t,\tau)\|_{0\longrightarrow 0} \leq c(t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{t^{k(\alpha-\beta)}}.$$

Or

$$\|h(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow 0} \leq \|h(t,\tau)\|_{0\longrightarrow 0},$$

par conséquent

$$\|h(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow 0} \leq c(t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{t^{k(\alpha-\beta)}}. \tag{2.23}$$

Pour h^{*2}, on a

$$\begin{aligned}
\|h*h(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow 0} &= \|\int_\tau^t h(t,\sigma)h(\sigma,\tau)d\sigma\|_{\beta\longrightarrow 0},\\
&\leq \int_\tau^t \|h(t,\sigma)\|_{0\longrightarrow 0}\|h(\sigma,\tau)\|_{\beta\longrightarrow 0}d\sigma,\\
&\leq c\int_\tau^t \frac{\sigma^{k(\alpha-\beta)}}{t^{k(\alpha-\beta)}}(t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{\sigma^{k(\alpha-\beta)}}(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma,\\
&= c\int_\tau^t (t-\sigma)^{\widetilde{\rho}-1}\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{t^{k(\alpha-\beta)}}(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma,\\
&= c(\frac{\tau}{t})^{k(\alpha-\beta)}\int_\tau^t (t-\sigma)^{\widetilde{\rho}-1}(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma,\\
&= c(\frac{\tau}{t})^{k(\alpha-\beta)}(t-\tau)^{2\widetilde{\rho}-1}B(\widetilde{\rho},\widetilde{\rho}).
\end{aligned}$$

On en déduit pour h^{*n}

$$\|h^{*n}(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow 0} \;\leq\; c^n(\frac{\tau}{t})^{k(\alpha-\beta)}(t-\tau)^{n\widetilde{\rho}-1}\frac{\Gamma(\widetilde{\rho})^n}{\Gamma(n\widetilde{\rho})}.$$

Donc, pour $\omega = \sum\limits_{n\geq 1}\underbrace{h*...*h}_{n\,fois}$, on a

$$\|\omega(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow 0} \;\leq\; c\Gamma(\widetilde{\rho})\left(\frac{\tau}{t}\right)^{k(\alpha-\beta)}(t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[c\Gamma(\widetilde{\rho})(t-\tau)^{\widetilde{\rho}}]^{n-1}}{\Gamma(n\widetilde{\rho})}.$$

Ainsi

$$\|\omega(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow 0} \;\leq\; c\left(\frac{\tau}{t}\right)^{k(\alpha-\beta)}(t-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}. \tag{2.24}$$

Enfin, en combinant (2.16), (2.17) et (2.24), on obtient

$$\begin{aligned}\|U_A(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha} &\leq c\left[\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{(\alpha-\beta)}}+\int_\tau^t\frac{\sigma^{k\alpha}}{(t-\sigma)^{\alpha}}.\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{\sigma^{k(\alpha-\beta)}}(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma\right],\\ &\leq c\left[\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{(\alpha-\beta)}}+\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\sigma)^{\alpha}}\int_\tau^t\sigma^{\beta k}(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma\right].\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|U_A(t,\tau)\|_{\beta\longrightarrow\alpha} \;\leq\; c\frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{(\alpha-\beta)}}.$$

Ce qui prouve le Lemme 2.3.1.

On a aussi la proposition essentielle suivante

Proposition 2.3.1

Soit $A\in C_k^\rho(J,\mathcal{H}^-(E_1,E_0))$. Alors pour $t>0$ et $\alpha\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\tau &\longrightarrow 0\\ U_A(t,\tau) &\longrightarrow 0 \;dans\; L(E_0,E_\alpha).\end{aligned}$$

Démonstration

- Si $\alpha\in(0,1]$, alors le Lemme (2.3.1), donne

$$\|U_A(t,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha}\leq c\frac{\tau^{k\alpha}}{(t-\tau)^{k\alpha}}\longrightarrow 0,\; quand\;\tau\longrightarrow 0.$$

- Si $\alpha = 0$. On sait que

$$U_A(t,\epsilon) = U_A(t,2\epsilon)U_A(2\epsilon,\epsilon), 0 < 2\epsilon \leq t,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|U_A(t,\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0} &= \|U_A(t,2\epsilon)U_A(2\epsilon,\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0},\\ &\leq \|U_A(t,2\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0}\|U_A(2\epsilon,\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0}.\end{aligned}$$

D'après le Lemme (2.3.1), on a

$$\|U_A(t,2\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0} < c$$

donc, il suffit de montrer que

$$U_A(2\epsilon,\epsilon) \longrightarrow 0 \; quand \; \epsilon \longrightarrow 0.$$

On a (Corollaire 2.3.1)

$$U_A(2\epsilon,\epsilon) = a(2\epsilon,\epsilon) + a * \omega(2\epsilon,\epsilon), \tag{2.25}$$

et (Remarque 2.3.2)

$$t^k A(t) \in \mathcal{G}(E_j, M, -\omega_0).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\|a(2\epsilon,\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0} &= \|e^{-(2\epsilon-\epsilon)A(\epsilon)}\|_{0\longrightarrow 0},\\ &= \|e^{-\epsilon A(\epsilon)}\|_{0\longrightarrow 0},\\ &= \|e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon^k}\epsilon^k A(\epsilon)}\|_{0\longrightarrow 0},\\ &\leq Me^{-\omega_0\epsilon^{1-k}},\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|a(2\epsilon,\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0} \leq Me^{-\frac{\omega_0}{\epsilon^{k-1}}}, \tag{2.26}$$

et

$$\begin{aligned}
\|a*\omega(2\epsilon,\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0} &\leq \int_{\epsilon}^{\epsilon}\|a(2\epsilon,\sigma)\|_{0\longrightarrow 0}.\|\omega(\sigma,\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0}, \\
&\leq c\int_{\epsilon}^{2\epsilon}(2\epsilon-\sigma)^{\widetilde{\rho}-1}(\sigma-\epsilon)^{\widetilde{\rho}-1}\exp(-\omega_0\frac{(2\epsilon-\sigma)}{4\epsilon^k})\exp(-\omega_0\frac{(\sigma-\epsilon)}{4\epsilon^k})d\sigma, \\
&= c\int_{\epsilon}^{2\epsilon}[(2\epsilon-\sigma)(\sigma-\epsilon)]^{\widetilde{\rho}-1}\exp(-\omega_0\frac{(\sigma-\epsilon)}{4\epsilon^{k-1}})d\sigma 5, \\
&= c\exp(-\omega_0\frac{(\sigma-\epsilon)}{4\epsilon^{k-1}})\int_{\epsilon}^{2\epsilon}[(2\epsilon-\sigma)(\sigma-\epsilon)]^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|a*\omega(2\epsilon,\epsilon)\|_{0\longrightarrow 0} \leq c\epsilon^{2\widetilde{\rho}}\exp(-\frac{\omega_0}{4\epsilon^{k-1}}). \tag{2.27}$$

Les relations (2.26) et (2.27) impliquent

$$U_A(2\epsilon,\epsilon) \longrightarrow 0 \; quand \; \epsilon \longrightarrow 0.$$

Ceci acheve la démonstration de la Proposition 2.3.1.

2.4 La formule singulière de variation de la constante

Soit E_0, E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$.

Définition 2.4.1

On dit qu'une fonction $u : J \longrightarrow E_0$ est une ***solution*** *du Problème de Cauchy $(P\ C)_{A,\,f}$ si*

i) $u \in C(J,E_0)\cap C^1(\dot{J},E_0)$.

ii) $u(t) \in D(A(t)), t \in \dot{J}$ *et* $\dot{u}(t)+A(t)u(t) = f(t), \quad t \in \dot{J}$.

On démontrera le résultat principal suivant :

Proposition 2.4.1

Soit $A \in C_k^{\rho}(J,\mathcal{H}^-(E_1,E_0))$ et $f \in L_{1,Loc}(J,E_0)$. Alors il existe un opérateur d'évolution *unique U_A tel que*

$$u(t) \;=\; \int_0^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{2.28}$$

est une solution du Problème $(P\ C)_{A,\,f}$.

D'autre part, si $u : J \longrightarrow E_0$ est une solution du Problème $(P\ C)_{A,\,f}$, alors il est nécessairement donnée par la formule de variation de la constante (2.28).

Démonstration

Considérons le problème de Cauchy défini par :

$$(P\ C)_{\delta,x} \begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t),\ t > \delta > 0, \\ \\ u(\delta) = x. \end{cases}$$

Alors, on sait (d'après le Théorème 2.2.2 et le Corollaire 2.3.2) que le Problème $(P\ C)_{\delta,x}$ admet une solution u unique donnée par la formule de variation de la constante i.e.,

$$u(t) = U_A(t,\delta)x + \int_\delta^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Soit $\delta \geq \delta' > 0$, on a pour $t \geq \delta$

$$\begin{aligned} u_{\delta'}(t) &= U_A(t,\delta')u(\delta') + \int_{\delta'}^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau, \\ &= U_A(t,\delta)U_A(\delta,\delta')u(\delta') + \int_{\delta'}^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau, \\ &= U_A(t,\delta)U_A(\delta,\delta')u(\delta') + \int_{\delta'}^{\delta} U_A(t,\delta)U_A(\delta,\tau)f(\tau)d\tau + \int_\delta^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau, \\ &= U_A(t,\delta)\underbrace{\left\{U_A(\delta,\delta')u(\delta') + \int_{\delta'}^{\delta} U_A(\delta,\tau)f(\tau)d\tau\right\}}_{u(\delta)} + \int_\delta^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau, \\ &= U_A(t,\delta)u(\delta) + \int_\delta^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

doù

$$u_\delta(t) = u_{\delta'}(t),\quad t \geq \delta \geq \delta' > 0.$$

D'après la Proposition 2.3.1, on a

$$\begin{aligned} \delta &\longrightarrow 0 \\ U_A(t,\delta)u(\delta) &\longrightarrow 0 \textit{ dans } E_0 \end{aligned}$$

car $\{u(\delta), \delta \in \dot{J}\}$ est borné dans E_0.

D'autre part, on a

$$U_A(t,.) \in L_\infty(J, L(E_1, E_0)),$$

par conséquent

$$\int_0^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau \;\; existe.$$

Alors

$$\begin{array}{ccc} \delta & \longrightarrow & 0 \\ \displaystyle\int_\delta^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau & \longrightarrow & \displaystyle\int_0^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau. \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{ccc} & & \delta & \longrightarrow & 0 \\ u_\delta(t) = U_A(t,\delta)u(\delta) + \displaystyle\int_\delta^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau & & & \longrightarrow & u(t) = \displaystyle\int_0^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau \end{array}$$

d'où le résultat.

Remarque 2.4.1

C'est une conséquence évidente de la proposition précédente que $u(0) = 0$, i.e., la solution de Problème $(P\ C)_{A,\,f}$ prend nécessairement la valeur 0.

Nous pouvons alors introduire la

Définition 2.4.2

*On dit que $u : J \longrightarrow E_0$ est une **solution intégrale** de $(P\ C)_{A,\,f}$, si*

$$u(t) = \int_0^t U_A(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

On a la

Proposition 2.4.2

Supposons que A et f vérifient (2.4) et (2.5) respectivement. Alors

$$u(.) \;\; = \;\; \int_0^{.} U_A(.,\tau)f(\tau)d\tau \in C^\nu(J, E_\alpha) \tag{2.29}$$

où $\alpha \in [\frac{1}{k'}, 1)$ *et* $0 \leq \nu < \alpha \wedge (1-\alpha)$.

Pour voir la démonstration de cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.1

Supposons que A *vérifie* (2.4) *et* $\alpha \in (0,1)$. *Alors*

$$\|U_A(t,\tau) - U_A(r,\tau)\|_{0 \longrightarrow \alpha} \leq c(t,r,\tau)\tau^{k\alpha}(t-r)^{\epsilon}$$

où

$$\epsilon < \alpha \wedge (1-\alpha)$$

et

$$c(t,r,\tau) = const \left[\frac{(t-r)^{\alpha-\epsilon}}{(t-\tau)^{\alpha}(r-\tau)^{\alpha}} + (t-\tau)^{1-\alpha-\epsilon}(r-\tau)^{1-\tilde{\rho}} + 1 \right].$$

Démonstration de la proposition

Elle se fait en deux étapes.

1^{re} **étape :** On étudie la continuité de u en 0 .

On a

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(0)\|_{\alpha} &= \|u(t)\|_{\alpha}, \\ &= \| \int_0^t U_A(t,\tau) f(\tau) d\tau \|_{\alpha}, \\ &\leq \int_0^t \|U_A(t,\tau)\|_{0 \longrightarrow 0} \|f(\tau)\|_0 d\tau. \end{aligned}$$

Nous obtenons grâce au Lemme 2.3.1 et à l'inégalité

$$\|f(\tau)\|_0 \leq \frac{1}{\tau^{k-1}} \|f(\tau)\|_{C_{k-1}} \tag{2.30}$$

que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\alpha} &\leq c \int_0^t \frac{\tau^{k\alpha}}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{1}{\tau^{k-1}} \|f(\tau)\|_{C_{k-1}} d\tau, \\ &= c \int_0^t \frac{\tau^{k\alpha-k+1}}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau. \end{aligned}$$

Utilisans (1.5) pour $b = t,\ a = 0,\ p = k\alpha - k + 2,\ q = 1 - \alpha$, on obtient

$$\int_0^t \frac{\tau^{k\alpha-k+1}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = t^{(k-1)(\alpha-1)+1} B(1-\alpha, k\alpha - k + 2).$$

Alors

$$\|u(t)\|_\alpha \leq c\, t^{(k-1)(\alpha-1)+1} B(1-\alpha, k\alpha - k + 2). \tag{2.31}$$

Ce qui établit (2.29).

2^e **étape :** Soit $0 < r \leq t \in J$. Alors

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(r)\|_\alpha &= \| \int_0^t U_A(t,\tau) f(\tau) d\tau - \int_0^r U_A(r,\tau) f(\tau) d\tau \|_\alpha, \\
&= \| \int_0^r U_A(t,\tau) f(\tau) d\tau + \int_r^t U_A(t,\tau) f(\tau) d\tau - \int_0^r U_A(r,\tau) f(\tau) d\tau \|_\alpha, \\
&\leq \int_r^t \|U_A(t,\tau)\|_{0\longrightarrow 0} \|f(\tau)\|_0 d\tau + \int_0^r \|U_A(t,\tau) - UA(r,\tau)\|_{0\longrightarrow \alpha} \|f(\tau)\|_0 d\tau, \\
&:= (I) + (II).
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.3.1 et l'Inégalité (2.30) on a

$$\begin{aligned}
(I) &\leq c \int_r^t \frac{\tau^{k\alpha}}{\tau^{k-1}(t-\tau)^\alpha} \|f\|_{C_{k-1}} d\tau, \\
&= c \int_r^t \frac{\tau^{k\alpha-k+1}}{(t-\tau)^\alpha} \|f\|_{C_{k-1}} d\tau.
\end{aligned}$$

D'où

$$(I) \leq c\|f\|_{C_{k-1}} t^{k\alpha-k+1} (t-r)^{1-\alpha}. \tag{2.32}$$

D'autre part, on a (d'après le Lemme 2.4.1):

$$\begin{aligned}
(II) &\leq \int_0^r c(t,r,\tau) \tau^{k\alpha-k+1} (t-r)^\epsilon \|f(\tau)\|_0 d\tau, \\
&\leq c \int_0^r c(t,r,\tau) \tau^{k\alpha-k+1} (t-r)^\epsilon d\tau, \\
&= c(t-r)^\epsilon \int_0^r \{ \frac{(t-r)^{\alpha-\epsilon}}{(t-\tau)^\alpha (r-\tau)^\alpha} + (t-\tau)^{1-\alpha-\epsilon} (r-\tau)^{1-\widetilde{\rho}} + 1 \} \tau^{k\alpha-k+1} d\tau, \\
&= c(t-r)^\epsilon \int_0^r \{ \frac{(t-r)^{\alpha-\epsilon}}{(t-\tau)^{\alpha+\epsilon-\epsilon} (r-\tau)^\alpha} + (t-\tau)^{1-\alpha-\epsilon} (r-\tau)^{1-\widetilde{\rho}} + 1 \} \tau^{k\alpha-k+1} d\tau, \\
&\leq c(t-r)^\epsilon \int_0^r \{ \frac{1}{(t-r)^\epsilon (r-\tau)^\alpha} + (t-\tau)^{1-\alpha-\epsilon} (r-\tau)^{1-\widetilde{\rho}} + 1 \} \tau^{k\alpha-k+1} d\tau.
\end{aligned}$$

donc

$$(II) \quad \leq \quad c(t-r)^{\epsilon}\{r^{(k-1)\alpha+2-k-\epsilon} + r^{k\alpha+\widetilde{\rho}-k+1} + r^{k(\alpha-1)+2}\} \tag{2.33}$$

et comme $\epsilon < \alpha \wedge (1-\alpha)$, on a

$$(k-1)\alpha + 2 - k - \epsilon > 0,\ k\alpha + \widetilde{\rho} - k + 1 > 0,\ k(\alpha-1) + 2 > 0.$$

D'où la proposition.

Démonstration du lemme 2.4.1

Soit $r, t \in J$, tel que $r \leq t$. Alors

$$\begin{aligned}
\|U_A(t,\tau) - U_A(r,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha} &= \|a(t,\tau) - a(r,\tau) + a*\omega(t,\tau) - a*\omega(r,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha}, \\
&\leq \|a(t,\tau) - a(r,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha} + \|a*\omega(t,\tau) - a*\omega(r,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha}, \\
&:= (I) + (II).
\end{aligned}$$

Si on note par T_B le semi-groupe génère par $-B$, on a

$$\|BT_B(t)\|_{0\longrightarrow\alpha} \quad \leq \quad c\, t^{-1-\alpha}$$

et

$$\|BT_B\|_{0\longrightarrow 1} \quad = \quad \|B^2T_B(t)\|_{0\longrightarrow 0} \leq c\, t^{-2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(I) &\leq \|\exp(-(t-\tau)A(\tau)) - \exp(-(r-\tau)A(\tau))\|_{0\longrightarrow\alpha}, \\
&= \|T_{\tau^k A(\tau)}(\frac{t-\tau}{\tau^k}) - T_{\tau^k A(\tau)}(\frac{r-\tau}{\tau^k})\|_{0\longrightarrow\alpha}, \\
&= \|\int_{\frac{r-\tau}{\tau^k}}^{\frac{t-\tau}{\tau^k}} \tau^k A(\tau) T_{\tau^k A(\tau)}(\sigma) d\sigma\|_{0\longrightarrow\alpha}, \\
&\leq \int_{\frac{r-\tau}{\tau^k}}^{\frac{t-\tau}{\tau^k}} \|\tau^k A(\tau) T_{\tau^k A(\tau)}(\sigma)\|_{0\longrightarrow\alpha} d\sigma, \\
&\leq c\, \frac{\tau^{k\alpha}(t-r)^{\alpha}}{(t-r)^{\alpha}(r-\tau)^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(II) &= \| \int_\tau^t a(t,\sigma)\omega(\sigma,\tau)d\sigma - \int_\tau^r a(r,\sigma)\omega(\sigma,\tau)d\sigma\|_{0\longrightarrow\alpha},\\
&= \| \int_r^t a(t,\sigma)\omega(\sigma,\tau)d\sigma + \int_\tau^r \{a(t,\sigma)-a(r,\sigma)\}\omega(\sigma,\tau)d\sigma\|_{0\longrightarrow\alpha},\\
&\leq \int_r^t \|a(t,\sigma)\omega(\sigma,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha}d\sigma + \| \int_\tau^r \{a(t,\sigma)-a(r,\sigma)\}\omega(\sigma,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha}d\sigma,\\
&:= (III)+(IV).
\end{aligned}$$

Alors grâce à (2.17) et (2.24)

$$\begin{aligned}
(III) &\leq \int_r^t \|a(t,\sigma)\omega(\sigma,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha}d\sigma,\\
&\leq c\int_r^t \frac{\sigma^{k\alpha}}{(t-\sigma)^\alpha}\exp(-\omega_0\frac{t-\sigma}{\sigma^k})(\frac{\tau}{\sigma})^{k\alpha}(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma,\\
&\leq c\int_r^t \frac{\tau^{k\alpha}}{(t-\sigma)^\alpha}(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma,\\
&\leq c\,\tau^{k\alpha}\int_r^t \frac{(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}}{(t-\sigma)^\alpha}d\sigma,\\
&\leq c\,\frac{\tau^{k\alpha}(t-r)^{1-\alpha}}{(r-\tau)^{1-\widetilde{\rho}}}.
\end{aligned}$$

Or

$$\|a(t,\sigma)-a(r,\sigma)\|_{0\longrightarrow\alpha} \leq c\,\frac{\sigma^{k\alpha}(t-r)^\alpha}{(t-\sigma)^\alpha(r-\sigma)^\alpha},$$

doù

$$\begin{aligned}
(IV) &\leq \int_\tau^r \|a(t,\sigma)-a(r,\sigma)\|_{0\longrightarrow\alpha}\|\omega(\sigma,\tau)\|_{0\longrightarrow\alpha}d\sigma,\\
&\leq c\int_\tau^r \frac{\sigma^{k\alpha}(t-r)^\alpha}{(t-\sigma)^\alpha(r-\sigma)^\alpha}\frac{\tau^{k\alpha}}{\sigma^{k\alpha}}(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}d\sigma,\\
&= c(t-r)^\alpha\tau^{k\alpha}\int_\tau^r \frac{(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}}{(t-\sigma)^{\alpha-\epsilon+\epsilon}(r-\sigma)^\alpha}d\sigma,\\
&\leq c(t-r)^\alpha\tau^{k\alpha}\int_\tau^r \frac{(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}}{(t-r)^{\alpha-\epsilon+\epsilon}(r-\sigma)^\alpha}d\sigma,\\
&= c(t-r)^\epsilon\tau^{k\alpha}\int_\tau^r \frac{(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}}{(t-r)^{\epsilon}(r-\sigma)^\alpha}d\sigma,\\
&\leq c(t-r)^\epsilon\tau^{k\alpha}\int_\tau^r \frac{(\sigma-\tau)^{\widetilde{\rho}-1}}{(r-\sigma)^{\alpha+\epsilon}}d\sigma,\\
&= c\,\tau^{k\alpha}(t-r)^\epsilon B(1-\alpha-\epsilon,\widetilde{\rho}).
\end{aligned}$$

Donc

$$(II) \quad \leq \quad c\,\tau^{k\alpha}\{(r-\tau)^{\tilde{\rho}-1}(t-r)^{1-\alpha}+(t-r)^{\epsilon}\}.$$

D'où le lemme 2.4.1.

Remarque 2.4.2

On peut remplacer la condition $f \in C_{k-1}(J, E_0)$, *dans la Proposition 2.4.2 par* $f \in C_l(J, E_0)$, *où* $0 \leq l < k$.