Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Intégrale de Dunford

Soit E_0 un espace de Banach complexe de norme notée $|\ |_{E_0}$; $L(E_0)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E_0 dans lui -même, ou encore l'espace des opérateurs bornés sur E_0, muni de la norme $\|A\| = \sup\limits_{|x|_{E_0} \leq 1} |Ax|_{E_0}$, $L(E_0)$ est un espace de Banach.
Soit A un opérateur dans E_0, de domaine $D(A)$. On pose

$$A_\lambda = \lambda I - A, \lambda \in \mathbb{C}$$

où $I : E_0 \longrightarrow E_0$ est l'identité sur E_0.

1.1.1 Les opérateurs bornés, fermés

Définition 1.1.1

Soit $A : D(A) \subset E_0 \longrightarrow E_0$.

i) *A est dit **borné** si*

$$D(A) = E_0 \ et \ \sup_{|x|_{E_0} \leq 1} |Ax|_{E_0} < +\infty$$

et on écrit $A \in L(E_0)$.

ii) A *est dit* ***fermé*** *si*

$$G(A) := \{(x, Ax) \in E_0 \times E_0 : x \in D(A)\}$$

est fermé de $E_0 \times E_0$. *Ceci équivaut à dire que si une suite* $(u_n)_n$ *dans* $D(A)$ *telle que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* E_0 *et* $Au_n \longrightarrow f$ *dans* E_0, *alors*

$$\begin{cases} u \in D(A), \\ f = Au. \end{cases}$$

iii) A *est dit* ***fermable*** *s'il existe* $\overline{A}$, *un opérateur linéaire sur* E_0, *tel que* $\overline{G(A)} = G(\overline{A})$, *dans ce cas* $\overline{A}$ *est uniquement déterminé, c'est un opérateur fermé appelé* ***la fermeture*** *de* A.

Si A *et* B *sont deux opérateurs linéaires dans* E_0, *de domaines respectifs* $D(A)$ *et* $D(B)$, *on écrira* $A \subset B$ *pour signifier que* B *est un prolongement de* A *i.e.,*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \\ \\ Bx = Ax \ , \text{ si } x \in D(A). \end{cases}$$

Noter que si A *est fermable,* $\overline{A}$ *est le plus petit prolongement fermé de* A.

1.1.2 Ensemble et opérateur résolvant. Spectre de A

Définition 1.1.2

i) $\rho(A)$ ***l'ensemble résolvant*** *de* A, *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que :*

- $A_\lambda(D(A))$ *est dense dans* E_0.
- A_λ^{-1} *existe et est continu de* $A_\lambda(D(A))$ *(muni par la topologie induite par* E_0*) dans* E_0.

ii) *On note*

$$R(\lambda, A) = A_\lambda^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}$$

$R(\lambda, A)$ *est appelé* ***l'opérateur résolvant*** *ou* ***résolvante*** *de* A. *Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira* $R(\lambda)$ *au lieu de* $R(\lambda, A)$.

Définition 1.1.3

On désigne par $\sigma(A)$ *l'ensemble complémentaire dans* $\mathbb{C}$ *de l'ensemble* $\rho(A)$. $\sigma(A)$ *est* ***le spectre*** *de* A.

Proposition 1.1.1

Si A *est fermé, on a*

$$\rho(A) \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{C}; R(\lambda) = A_\lambda^{-1} \in L(E_0)\} \tag{1.1}$$

et $(D(A), \|.\|_A)$ *est un espace de Banach, où* $\|x\|_A := |Ax|_{E_0} + |x|_{E_0}$ *est la* norme du graphe.

Théorème 1.1.1 ([12])

Soit A *un opérateur linéaire fermé de domaine* $D(A)$ *dans l'espace de Banach* E_0. *Alors :*

i) *L'ensemble* $\rho(A)$ *est un ensemble* ouvert *dans le plan complexe* $\mathbb{C}$

ii) *La fonction* $\lambda \longmapsto R(\lambda) = R(\lambda, A)$ *est une fonction analytique de* λ, *dans chaque composante connexe de* $\rho(A)$.

Remarque 1.1.1

Noter que si A *est fermé,* $R(\lambda) \in L(E_0)$ *dès que* $\lambda \in \rho(A)$ *d'après la Proposition* 1.1.1.

Théorème 1.1.2

Si λ *et* $\mu \in \rho(A)$ *et si* $R(\lambda)$ *et* $R(\mu)$ *soit dans* $L(E_0)$, *alors* $R(\lambda)$ *et* $R(\mu)$ *satisfont* l'équation de la résolvante

$$R(\lambda) - R(\mu) \quad = \quad (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu). \tag{1.2}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
R(\lambda) &= R(\lambda)A_\mu R(\mu),\\
&= R(\lambda)(\mu I - A)R(\mu),\\
&= R(\lambda)[(\mu-\lambda)I + (\lambda I - A)]R(\mu),\\
&= (\mu-\lambda)R(\lambda) + R(\mu).
\end{aligned}$$

D'où (1.2).

1.1.3 Intégrale de Dunford et calcul opérationnel

Soit E_0 un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(U)$, l'espace des fonctions holomorphes, de U dans $\mathbb{C}$.

Intégrale de Dunford

Si $A \in L(E_0)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(A)$, alors **l'intégrale de Dunford** est définit par :

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)(zI - A)^{-1}dz,$$

où Γ est le bord, positivement orienté, d'un compact K contenant $\sigma(A)$ et contenu dans U.

Remarque 1.1.2

On a :

1. $f(A) \in L(E_0)$.
2. *D'après la théorie de l'intégrale de Cauchy, l'opérateur $f(A)$ ne dépend que de la fonction f et de l'opérateur A.*

Théorème 1.1.3 ([12])

Soit $A \in L(E_0)$ dans un espace de Banach E_0.

i) *Soit* $f, g \in H(U), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Alors :*

- $\alpha f + \beta g \in H(U)$ *et* $\alpha f(A) + \beta g(A) = (\alpha f + \beta g)(A)$.
- $f \circ g \in H(U)$ *et* $f(A) \circ g(A) = (f \circ g)(A)$.

ii) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H(A)$, *on suppose que les* f_n *sont holomorphes dans un voisinage fixe* V *de* $\sigma(A)$. *Si*

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformément sur } V,$$

alors

$$f_n(A) \longrightarrow f(A) \text{ dans } L(E_0).$$

1.2 Les semi-groupes

1.2.1 Les semi-groupes

Soit E un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme $x \longmapsto \|x\|_E$.

Définition 1.2.1

On appelle ***semi-groupe*** *d'opérateurs dans* E *une application* $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(E)$ *qui vérifie:*

i) $G(0) = I$ *(identité dans* $L(E)$*).*

ii) $G(t+s) = G(t)G(s)$, *pour tout* $s, t \geq 0$ *(propriété algébrique).*

Remarque 1.2.1

Comme $t+s = s+t$, *on a* $G(t+s) = G(s+t) = G(t)G(s) = G(s)G(t)$. *Donc les opérateurs d'un semi-groupe* ***commutent****.*

Définition 1.2.2

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe.* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est appelé semi-groupe* ***uniformément continu*** *si*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \|G(t)-I\|_{L(E)}=0.$$

Définition 1.2.3 (***Générateur Infinitésimal***)

On appelle ***générateur infinitésimal*** *du semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$*, l'opérateur linéaire non borné* A *défini par:*

$$A\varphi=\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{G(t)\varphi-\varphi}{t}$$

et

$$D(A)=\{\varphi\in E/\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{G(t)\varphi-\varphi}{t}\ \textit{existe dans}\ E\}$$

Définition 1.2.4

Un semi-groupe est dit ***fortement continu*** (*de* classe C_0) *si*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} G(t)x=x,\forall x\in E. \tag{1.3}$$

Remarques 1.2.1

1. *Un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *uniformément continu est fortement continu car*

$$\|G(t)-I\|_{L(E)}=\sup_{\|x\|\leq 1}\|G(t)x-x\|_E.$$

2. *Si* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0-*semi-groupe, l'application* $t\longmapsto G(t)x$ *est continue sur* $[0\ ,+\infty[$*,* $\forall x\in E$*.*

3. *Si* A *est un opérateur linéaire borné, il existe un semi-groupe uniformément continu* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *unique ayant* A *comme générateur infinitésimal.*

Théorème 1.2.1 ([30], [34])

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu. Alors il existe deux nombres* $M\geq 1$ *et*

$\omega \geq 0$ tels que :

$$\|G(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0 \tag{1.4}$$

*En particulier, si $M = 1$ et $\omega = 0$, alors on dit que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de **contraction**.*

Théorème 1.2.2 ([30], [12])

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu. Alors le domaine $D(A)$ de son générateur infinitésimal est caractérisé par:

$$D(A) = \{x \in E : \; l'application \; t \longrightarrow G(t)x \in C^1(\mathbb{R}^+)\}.$$

De plus, on a

- $AG(t)x = G(t)Ax$,
- *Pour $x \in D(A)$, on a $G(t)x \in D(A)$,*
- $\frac{d}{dt}G(t)x = G(t)Ax = AG(t)x$.

Théorème 1.2.3 ([30], [12]) (***Hille-Yosida***)

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

i) *A est fermé et $\overline{D(A)} = E$.*

ii) *$\exists \omega > 0$, $\exists M > 0$, tels que $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$, et $\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}$, pour $Re\lambda > \omega$.*

Rappelons le résultat suivant qui généralise le théorème de Hille-Yosida.

Théorème 1.2.4 (***Phillips-Myadera-Feller***)

Un opérateur linéaire A vérifie les deux conditions suivantes:

i) *A est fermé et* $\overline{D(A)} = E$.

ii) *il existe deux nombres réels* $M \geq 1$ *et* ω *tels que*

$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$

et $\|(A - \lambda I)^{-n}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}$, *pour* $Re\lambda > \omega$, $n = 1, 2, ...,$

si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0- *semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$

tels que $\|G(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}$, *pour* $t \geq 0$.

On a aussi le théorème essentiel suivant:

Théorème 1.2.5 ([30])

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0-*semi-groupe et A son générateur infinitésimal.*

Alors:

i) *Pour* $x \in X$, $\lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x \, ds = G(t)x$.

ii) *Pour* $x \in X$, $\int_0^t G(s)x \, ds \in D(A)$ *et* $A(\int_0^t G(s)x \, ds) = G(t)x - x$.

iii) *Pour* $x \in D(A)$, $G(s)x \in D(A)$ *et* $\frac{d}{dt} G(t)x|_{t=s} = AG(s)x = G(s)Ax$.

iv) *Pour* $x \in D(A)$, $G(t)x - G(s)x = \int_s^t G(\tau)Ax \, d\tau = \int_s^t AG(\tau)x \, d\tau$.

On aura besoin dans ce travail d'une autre notion importante qui est celle des:

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Au lieu de $t \in [0 \, , +\infty[$ dans la définition de $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, on peut penser à élargir ce domaine à $\Delta \subset \mathbb{C}$.

On doit choisir nécessairement Δ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} s \in \Delta \\ et \\ t \in \Delta \end{array} \right. \Longrightarrow s + t \in \Delta.$$

En général, on pose $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, avec $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$.

Soit E un espace de Banach complexe .

Définition 1.2.5

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ avec\ \ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ *ou* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 <\mid \arg z \mid< \varphi_2\}$ *un secteur dans* $\mathbb{C}$.

Une famille $\{G(z)\}_{z\in\Delta} \subset L(E)$ *forme un semi-groupe d'opérateurs dans E* ***analytique*** *dans* Δ, *si elle vérifie les conditions suivantes:*

i) $G(z_1 + z_2) = G(z_1).G(z_2),\ pour\ z_1, z_2 \in \Delta.$

ii) $G(0) = I_E.$

iii) $\lim\limits_{z\longrightarrow 0,\ z\in\Delta} G(z)x = x, \forall x \in E.$

iv) *L'application* $z \in \Delta^* = \Delta\backslash\{0\} \longmapsto G(z)x \in E$ *est analytique,* $\forall x \in E$.

Remarques 1.2.2

1. *En général on parle d'un semi-groupe analytique lorsque le secteur* Δ *contient l'intervalle* $[\,0,\ +\infty[$.

2. *Un semi-groupe analytique est fortement continu.*

Théorème 1.2.6 ([30])

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu et* A *son générateur infinitésimal. Si on suppose que* $0 \in \rho(A)$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *peut s'étendre à un semi-groupe analytique dans un secteur*

$\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} :\mid \arg z \mid< \delta\}$ *et* $\|G(t)\|_{L(E)}$ *est uniformément bornée* *(i.e.,* $\exists M > 0, \|G(t)\|_{L(E)} < M$*) sur chaque sous-secteur fermé* $\overline{\Delta_{\delta'}}$ *de* Δ_δ *tel que*

$\Delta_{\delta'} = \{z \in \mathbb{C} :\mid \arg z \mid \leq \delta' < \delta\}$,

ii) *Il existe une constante* C *telles que pour chaque* $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|(A - (\sigma + i\tau))^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{|\tau|},$$

iii) *Il existe* $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ *et* $M > 0$ *telles que*

$$\rho(A) \supset \sum := \{\lambda \in \mathbb{C} :\mid \arg \lambda \mid < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$$

et

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{|\tau|}\ ,pour\ \ \lambda \in \sum\ \ et\ \ \lambda \neq 0.$$

Ce travail utilise une autre notion qui est celle des fonctions eulériennes :

1.3 Les fonctions Gamma, Béta

1.3.1 La fonction Gamma (Γ)

La fonction **Gamma**, notée $\Gamma(z)$, est définie par

$$\Gamma(z) = \int_O^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

En utilisant, le théorème de la convergence dominée et ses conséquences, on peut montrer que $\Gamma(z)$ existe et holomorphe dans le demi-plan $Re(z) > 0$.

On établit aussi que, dans ce demi-plan, les dérivées successives de Γ peuvent s'obtenir par dérivation " sous le signe somme " ainsi:

$$\Gamma'(z) = \int_O^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln t\, dt.$$

$$\Gamma''(z) = \int_O^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (\ln t)^2\, dt.$$

1.3.2 Relations fonctionnelles

- Notons que $\Gamma(1) = \int_O^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$.
- $n!$ (factorielle n), on a $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$ (fonction factorielle).

  Notons que certains auteurs parlent de $z!$ pour z complexe, en posant par définition $z! = \Gamma(z+1)$.

Remarques 1.3.1

Soit z un nombre complexe a partie réelle positive. On a:

1. $\Gamma(z)$ *est équivalent à* $\frac{1}{z}$ *quand* z *tend vers 0.*
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. $\Gamma'(1) = -\gamma$ *où* γ *est la constante d'*Euler*, limite de la suite* $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$. ($\gamma \simeq 0,577215664901532$).

1.3.3 Autres expressions de $\Gamma(z)$ pour $Re(z) > 0$

Le changement de variable $t = u^2$ conduit à :
$\Gamma(z) = 2\int_O^{+\infty} e^{-u^2} u^{2z-1}\, du$, pour $Re(z) > 0$, l'intégrale figurant au deuxième membre dite intégrale de Gauss.

1.3.4 La fonction Béta

Soient deux complexes p et q à partie réelle positive. La fonction **Béta**, notée $B(p\,;q)$ est définie par

$$B(p\,;q) = \int_O^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$$

elle est reliée à la fonction Gamma par l'expression

$$B(p\,;q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

les fonctions B et Γ souvent appelées respectivement fonctions **eulériennes** de première espèce et de deuxième espèce.

1.3.5 Propriétés

- $$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{p-1}(\beta-x)^{q-1}\, dx \quad = \quad (\beta-\alpha)^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.5}$$

- Pour $p = z$, $q = 1-z$, $0 < Re(z) < 1$, on a

$$B(z; 1-z) = \int_{O}^{1} t^{z-1}(1-z)^{-z}\, dt$$

et le changement de variable homographique défini par $u = \frac{t}{1-t}$, conduit à

$$B(z; 1-z) = \int_{O}^{+\infty} \frac{u^{z-1}}{1+u}\, du$$

pour

$$0 < Re(z) < 1.$$

1.4 Les espaces de Hölder

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Notations 1.4.1

On définit les espaces de Banach suivants :

$B(I;E) = \{f : I \longrightarrow E/\ f \text{ borné}\}$, $\|f\|_{B(I;E)} = \sup_{t\in I} \|f(t)\|_E$,

$C^m(I;E) = \{f : I \longrightarrow E/\ f\ m \text{ fois continûment différentiable }\}$, $(m \in \mathbb{N})$,

$C^{\infty}(I;E) = \{f : I \longrightarrow E/\ f \text{ indéfiniment continûment dérivable sur } I\}$,

$C_b(I;E) = B(I;E) \cap C(I;E)$,

$C_b^m(I;E) = \{f \in C^m(I;E) : f^{(i)} \in C_b(I;E), i = 0, ..., m\}, (m \in \mathbb{N})$, *muni de la norme*

$$\|f\|_{C_b^m(I;E)} = \sum_{k=0}^{m} \| f \|_{B(I;E)} .$$

Définition 1.4.1 ([28])

Pour $\theta \in]0,1[$, on définit l'espace de ***Hölder*** *$C^\theta(I;E)$ à exposant θ par :*

$$C^\theta(I;E) := \{f : I \longrightarrow E : [f]_\theta = \sup_{t,\, s\in I,\, t\neq s} \frac{\|f(t)-f(s)\|_E}{\mid t-s\mid^\theta} < +\infty\},$$

$$\|f\|_{C^\theta(I;E)} = \|f\|_{C(I;E)} + [f]_\theta,$$

$$C^{k+\theta}(I;E) := \{f \in C_b^k(I;E) : f^{(k)} \in C^\theta(I;E)\},$$

$$\|f\|_{C^{k+\theta}(I;E)} = \|f\|_{C_b^k(I;E)} + [f^{(k)}]_{C^\theta(I;E)}.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach.

1.5 La théorie d'interpolation linéaire

Dans cette section, on introduit quelques notions de base et on énonce quelques résultats fondamentaux de la théorie des espaces d'interpolation qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

On se donne deux espaces de Banach $(E_0, \|\|_0)$ et $(E_1, \|\|_1)$, tous deux contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé Ξ. L'injection de E_i dans Ξ étant continue, $i = 0, 1$. Le couple $\{E_0, E_1\}$ est dit alors couple **d'interpolation** et l'inclusion $E \subset \Xi$ signifiera dans cette section que E est inclus dans Ξ avec injection continue, de même lorsque K est un opérateur linéaire et continu de E_0 dans E_1, on écrira simplement $K : E_0 \longrightarrow E_1$.

Définition 1.5.1

Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation. Un espace de Banach E tel que $E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1$ s'appelle espace ***intermédiaire*** *entre E_0 et E_1.*

Définition 1.5.2

Un espace intermédiare E entre E_0 et E_1 est dit espace ***d'interpolation*** *si l'implication* *suivante a lieu pour tout* $K : E_0 + E_1 \longrightarrow E_0 + E_1$

$$\begin{cases} K : E_0 \longrightarrow E_0 \\ \\ K : E_1 \longrightarrow E_1 \end{cases} \Longrightarrow K : E \longrightarrow E.$$

Définition 1.5.3

Si $\{E_0, E_1\}$ *et* $\{F_0, F_1\}$ *sont deux couples d'interpolation. On dit que deux espaces de Banach* E *et* F *sont des espaces d'interpolation entre* $\{E_0, E_1\}$ *et* $\{F_0, F_1\}$ *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

i) E *est un espace intermédiaire entre* E_0 *et* E_1.

ii) F *est un espace intermédiaire entre* F_0 *et* F_1.

iii) $$\begin{cases} K : E_0 \longrightarrow F_0 \\ \\ K : E_1 \longrightarrow F_1 \end{cases} \Longrightarrow K : E \longrightarrow F.$$

Remarque 1.5.1

Quand deux espaces E *et* F *sont des espaces d'interpolation entre* $\{E_0, E_1\}$ *et* $\{F_0, F_1\}$ *l'espace* E (resp.F) *n'est pas nécessairement d'interpolation entre* E_0 *et* E_1 (resp.F_0 et F_1).

Théorème 1.5.1 ([10]) (*Propriété fondamentale d'interpolation*)

Soit E *et* F *deux espaces d'interpolation entre* $\{E_0, E_1\}$ *et* $\{F_0, F_1\}$*. Il existe une constante* C *telle que, pour tout opérateur linéaire et continu* $K : E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1$*, l'inégalité suivante a lieu* $\|K\|_{L(E;F)} \leq C \max(\|K\|_{L(E_0;F_0)}, \|K\|_{L(E_1;F_1)})$.

Dans ce qui suite on va décrire quelques méthodes connues dans la théorie de l'interpolation.

1.5.1 La méthode K

Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation.

Posons pour $t > 0$ et $a = a_0 + a_1 \in E_0 + E_1$.

$$K(t, a\,; E_0, E_1) = \inf_{a=a_0+a_1 \in E_0+E_1} (\|a_0\|_{E_0} + t\|a_1\|_{E_1})$$

Dans la suite, on utilisera la notation $K(t, a)$ à la place de $K(t, a; E_0, E_1)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 1.5.2

$K(t, a)$ est équivalent à la norme de $E_0 + E_1$.

Lemme 1.5.1 ([35])

Pour $a \in E_0 + E_1$ fixé , $K(t, a)$ est une fonction croissante, continue et concave.

$K(t, a)$ est différentiable pour chaque t et on a

$$\frac{dK(t, a)}{dt} \leq \frac{K(t, a)}{t}$$

de plus on a

$$\min(1, t)\|a\|_{E_0+E_1} \leq K(t, a) \leq \max(1, t)\|a\|_{E_0+E_1}.$$

Définition 1.5.4

Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation.

Pour $0 < \theta < 1$.

Si $1 \leq p < +\infty$, on pose

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = \{a/a \in E_0 + E_1 : \|a\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} = [\int_O^{+\infty} [t^{-\theta} K(t, a)]^p \frac{dt}{t}]^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

ou $\frac{dt}{t}$ désigne la mesure de Haar.

Si $p = \infty$, on pose

$$(E_0, E_1)_{\theta,\infty} = \{a/a \in E_0 + E_1 : \|a\|_{(E_0,E_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} (t^{-\theta} K(t, a)) < \infty\}.$$

Remarques 1.5.1

1. *Si* $\{E_0, E_1\}$ *est un couple d'interpolation et* E_1 *est réflexif alors on a* $(E_0, E_1)_{1,\infty} = E_1$.

2. $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ *muni de la norme* $\|.\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}}$ *est un espace de Banach.*

Théorème 1.5.2 ([35])

i) $(E_0, E_1)_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ *est un espace d'interpolation .*

ii) $(E_0, E_1)_{\theta,p} = (E_1, E_0)_{1-\theta,p}$.

iii) *Si* $0 < \theta < 1$ *et* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *alors*

$$(E_0, E_1)_{\theta,1} \subset (E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\theta,q} \subset (E_0, E_1)_{\theta,\infty}.$$

iv) *Si* $E_0 \subset E_1$, *alors, pour* $0 < \theta < \theta' < 1$ *et* $1 \leq q, p \leq \infty$ *on a*

$$(E_0, E_1)_{\theta,q} \subset (E_0, E_1)_{\theta',p}.$$

v) *Si* $E_0 = E_1$, *alors* $(E_0, E_1)_{\theta,p} = E_0 = E_1$.

vi) *Il existe* $C_{\theta,p} > 0$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, *tels que pour tout* $a \in E_0 + E_1$ *on a*

$$\|a\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \leq C_{\theta,p} \|a\|_{E_0}^{1-\theta} \|a\|_{E_1}^{\theta}.$$

1.5.2 La méthode des moyennes

Dans cette sous-section, s'il n'y a pas risque de confusion, on notera $L_*^{p_i}(E_i)$ au lieu de $L_*^{p_i}(\mathbb{R}_*^+; E_i), i = 0, 1$ sachant que pour $0 \leq a < b \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ et un espace de Banach E, on définit les espaces $L_*^p((a, b); E)$ ou $L_*^p(E)$ par :

$L_*^p((a, b); E) = \{f : (a, b) \longrightarrow E$ mesurable et $\|f\|_{L_*^p((a,b);E)} < \infty\}$, où

$$\|f\|_{L_*^p((a,b);E)} = \begin{cases} (\int_a^b \|f(t)\|_E^p \frac{dt}{t})^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sup ess_{a<t<b} \|f(t)\|_E & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.5.1 ([35])

Soit $\{E_0, E_1\}$ *un couple d'interpolation, et* p_0, p_1, p *et* θ *des nombres réels tels que*

$$\begin{cases} 1 \leq p_0, p_1 < \infty, \\ 0 < \theta < 1, \\ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \end{cases}$$

Désignons par $((E_0; E_1))_{\theta, p_0, p_1}$ *l'espace des vecteurs* $x \in E_0 + E_1$ *satisfaisant à :*

i) $\exists\, u_i : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow E_i$ *continues,* $i = 0, 1$ *:* $\forall t > 0, x = u_0(t) + u_1(t)$,

ii) $\|t^{-\theta} u_0(t)\|_{L_*^{p_0}(E_0)} + \|t^{1-\theta} u_1(t)\|_{L_*^{p_1}(E_1)} < \infty$.

Alors

$$\inf \varphi(t, u_0, u_1) \simeq \inf(\|t^{-\theta} u_0(t)\|_{L_*^{p_0}(E_0)}^{p_0} + \|t^{1-\theta} u_1(t)\|_{L_*^{p_1}(E_1)}^{p_1})^{\frac{1}{p}}$$

Les infinimas étant pris sur les représentations (u_0, u_1) *de* $x = u_0(t) + u_1(t)$*, où* $\varphi(t, u_0, u_1)$ *désigne l'expréssion* $\|t^{-\theta} u_0(t)\|_{L_*^{p_0}(E_0)} + \|t^{1-\theta} u_1(t)\|_{L_*^{p_1}(E_1)}$.

Théorème 1.5.3 ([35])

i) *L'application* $x \longmapsto \|x\|_{((E_0;E_1))_{\theta,p_0,p_1}} = \inf(\|t^{-\theta} u_0(t)\|_{L_*^{p_0}(E_0)} + \|t^{1-\theta} u_1(t)\|_{L_*^{p_1}(E_1)})$ *est une norme sur* $((E_0; E_1))_{\theta, p_0, p_1}$.

ii) *On a* $E_0 \cap E_1 \subset ((E_0; E_1))_{\theta, p_0, p_1} \subset E_0 + E_1$.

Théorème 1.5.4 ([25])

Sous les hypothèses précédentes on a $((E_0; E_1))_{\theta, p_0, p_1} = (E_0; E_1)_{\theta, p}$*.Cette égalité reste valable dans le cas où* $p_0 = +\infty$, $p_1 = +\infty$ *et* $p = +\infty$.

1.5.3 Méthode complexe

Soit$\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation. On pose

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < Rez < 1\},$$

$$\overline{S} := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Rez \leq 1\},$$

$$S_j := \{z \in \mathbb{C} : Rez = j\}, j = 0, 1.$$

Définition 1.5.5

On note par $F(E_0, E_1)$ l'ensemble des fonctions f continues et bornées de $\overline{S}$ dans $E_0 + E_1$, telles que $f|_S$ est holomorphe et $f|_{S_j} \in C_0(S_j, E_j), j = 0, 1.$ où C_0 est l'espace des fonctions continues et nulles à l'infini.

Théorème 1.5.5

L'espace $F(E_0, E_1)$ muni de la norme

$$\|f\|_{F(E_0,E_1)} := \max\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{E_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{E_1}\}$$

est un espace de Banach.

Définition 1.5.6

Pour $0 < \theta < 1$, on pose

$$[E_0, E_1]_\theta := \{a \in E_0 + E_1 / \exists f \in F(E_0, E_1) : f(\theta) = a\}.$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|a\|_\theta = \inf\{\|f\|_{F(E_0,E_1)}; f(\theta) = a\}.$$

Théorème 1.5.6

$[E_0, E_1]_\theta$ est un espace de Banach.

Théorème 1.5.7 ([35])

i) $[E_0, E_1]_\theta, 0 < \theta < 1$ *est un espace d'interpolation.*

ii) $[E_0, E_1]_\theta = [E_0, E_1]_{1-\theta}$.

iii) $E_0 \cap E_1$ *est dense dans* $[E_0, E_1]_\theta$.

iv) *Si* $E_0 \subset E_1$, *alors pour* $0 < \theta < \theta' < 1$ *on a*

$$E_0 \subset [E_0, E_1]_\theta \subset [E_0, E_1]_{\theta'} \subset E_1$$

v) *Si* $E_0 = E_1$, *on a* $[E_0, E_1]_\theta = E_0 = E_1$.

vi) *il existe* $C_\theta > 0$ $(0 < \theta < 1)$, *tel que pour tout* $a \in E_0 \cap E_1$ *on a*

$$\|a\|_{[E_0,E_1]_\theta} \leq C_\theta \|a\|_{E_0}^{1-\theta} \|a\|_{E_1}^{\theta}.$$

1.5.4 Interpolation et domaines d'opérateurs.

Dans le cas particulier où E_1 est le domaine $D(A)$ d'un opérateur linéaire fermé (muni de la norme du graphe) et $E_0 = E$, on définit l'espace intermédiaire entre $D(A)$ et E par :

$$D_A(\theta, p) := (D(A), E)_{1-\theta,\, p},$$

où

$$0 < \theta < 1 \; et \; 1 \leq p \leq +\infty.$$

C'est un espace d'interpolation caractérisé par :

$$D_A(\theta, p) = \{x \in E / r \longmapsto r^\theta A(A - rI)^{-1} x \in L_*^p(E)\}$$

où l'espace $L_*^p(E)$ est défini par

$$L_*^p(E) = \{u : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow E, \; mesurable \; et \; \|u\|_{L_*^p(E)} = (\int_0^{+\infty} \|u\|_X^p \frac{dr}{r})^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$$

i.e.,

$$D_A(\theta, p) = \{x \in E / \int_0^{+\infty} \|r^\theta A(A - rI)^{-1}x\|_E^p \frac{dr}{r} < +\infty\}.$$

Si $p = +\infty$ alors,

$$D_A(\theta, p) = \{x \in E / \sup_{r>0} A(A - rI)^{-1}x\|_E^p \frac{dr}{r} < +\infty\}.$$

Ces espaces sont de Banach et vérifient

$$D(A) \hookrightarrow D_A(\theta, p) \hookrightarrow E.$$

Remarque 1.5.3

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés à domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. Si $D(A) = D(B)$, alors $D_A(\theta, p) = D_B(\theta, p)$ algébriquement avec équivalence des normes. Autrement dit l'espace d'interpolation $D_A(\theta, p)$ dépend uniquement du domaine $D(A)$ et ne dépend pas de l'opérateur A.

1.6 Equations intégrales

1.6.1 Equations de Fredholm

Equations de première espèce

L'équation de Fredholm homogène de première espèce est définie par la relation suivante

$$\int_a^b K(t, s) f(s) \, ds = g(t),$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. $g(t)$ est le terme de source, $K(t, s)$ est appelé le noyau.

Equations de seconde espèce

L'équation de Fredholm non homogène de deuxième espèce est définie par la relation suivante

$$\lambda f(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)\,ds + g(t),$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer, $g(t)$ est le terme de source, $K(t,s)$ est le noyau et λ est un scalaire introduit en général par commodité dans la résolution de cette équation.

Remarque 1.6.1

Si la fonction g est nulle l'équation de Fredholm devient homogène.

1.6.2 Equations de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de celles de Fredholm dans lesquelles le noyau K est tels que

$$K(t,s) = 0 \textit{ pour } s > t.$$

Equations de première espèce

L'équation de Volterra homogène de première espèce est définie par la relation suivante

$$\int_a^b K(t,s)f(s)\,ds = g(t),$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. $g(t)$ est le terme de source, $K(t,s)$ est le noyau.

Equations de seconde espèce

De manière similaire, l'équation de Volterra de deuxième espèce non homogène s'écrit

$$\lambda f(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)\,ds + g(t).$$