Introduction

On distingue en analyse mathématique trois types d'équations différentielles abstraites du premier ordre ou d'ordre supérieur:

- Équations différentielles abstraites de type parabolique.
- Équations différentielles abstraites de type hyperbolique.
- Équations différentielles abstraites de type elliptique.

Les équations différentielles abstraites du premier ordre ont été étudiées par de nombreux auteurs, parmi lesquels on trouve Amann [8], Guidotti [16], [17], Kato [20], Krein [24], Lunardi [27], Sobolevskii [32], Tanabe [34] et Yagi [37].
Ces auteurs ont étudié aussi les équations différentielles abstraites du premier ordre de type parabolique.
Notre travail a pour objet l'étude d'une équation différentielle linéaire abstraite

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in \dot{J}, \tag{1}$$

et l'équation différentielle quasi-linéaire abstraite

$$\dot{u} + A(t,u)u = F(t,u), \quad t \in \dot{J}, \tag{2}$$

où

- J est un intervalle dans $\mathbb{R}^+$, contenant 0 et $\dot{J} := J \backslash \{0\}$,

- E_0 et E_1 deux espaces de Banach, tels que $E_1 \subset E_0$, avec injection continue et E_1 dense dans E_0.

Pour le Problème (1), on suppose que

- $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, (avec $0 < \rho < 1$ et $k > 1$) désigne une fonction de Hölder à exposant ρ, définie sur l'intervalle J à valeurs dans $\mathcal{H}^-(E_1, E_0)$, telle que $t \longmapsto t^k A(t)$ est une fonction de Hölder à exposant ρ, définie sur l'intervalle $\dot{J}$. $\mathcal{H}^-(E_1, E_0)$ étant l'ensemble des $A \in L(E_1, E_0)$ (applications linéaires et continues) tels que $D(A) = E_1$ ($D(A)$ est le domaine de A) et $(-A)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$ vérifiant $\| \; e^{-tA} \; \|_{L(E_0)} \leq c \; e^{-\omega t}$ (c, ω sont des constantes positives),

- $f \in C_{k-1}(J, E_0)$,(avec $k > 1$) désigne une fonction définie sur l'intervalle J à valeurs dans l'espace de Banach E_0, telle que $t \longmapsto t^{k-1} f(t)$ est une fonction continue de J dans E_0.

Pour le Problème (2), on suppose que

- $A \in C_k^{\rho,1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$, (avec $k > 1$) X_α étant un sous-ensemble ouvert de $E_\alpha := (E_0, E_1)_\alpha$,(l'espace d'interpolation entre E_0 et E_1), contenant 0. Cela signifie que

$$A(., u) \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)), \; pour \; u \; fixé \; dans \; X_\alpha,$$

et

$$A(t, .) \in C^{1-}(X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0)), \; pour \; t \; fixé \; dans \; J,$$

sachant que C^{1-} signifie "Lipchitzien".

- $F \in C_{k,b}^{0,1-}(J \times X_\alpha, E_\beta)$, avec $0 < \beta < \alpha < 1$ et $k > 1$, i.e., $F \in C_k^{0,1-}(J \times X_\alpha, E_\beta)$ et F est borné sur tout sous-ensemble borné de $J \times X_\alpha$.

Ce travail consiste à étudier l'existence, l'unicité et la régularité de la solution des problèmes (1) et (2).

Commençons par l'aspect historique :

- En 1953, Kato [19] a étudié le problème de Cauchy abstrait homogène suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = 0 \quad 0 < t \leq T, \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{3}$$

Ses résultats concernent l'existence et l'unicité de la solution sous les hypothèses suivantes :

i) Pour tout $t \in [0,T]$, $-A(t)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu tel que $\{e^{-\tau A(t)}, \tau \geq 0\}$, avec $\| e^{-\tau A(t)} \| \leq e^{-\tau\omega}$ $(\omega > 0)$,

ii) Le domaine de $A(t)$ ne dépend pas de t i.e., $D(A(t)) := E_1$,

iii) Pour tout $t \in (0,T]$, $A(t)A^{-1}(0)$ est continûment différentielle,

iv) $x \in D(A(t)) = E_1$.

- En 1956, Krasnoselskii, Krein et Sobolevskii [22] ont étudié le problème de Cauchy abstrait non homogène suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t) \quad 0 < t \leq T, \\ u(0) = x \qquad\qquad , \end{cases} \tag{4}$$

Ils ont montré que si f est continûment différentiable, la solution du Problème (4) est donnée par la formule suivante :

$$u(t) = U_A(t,0)x + \int_0^t U_A(t,s)f(s)ds \tag{5}$$

où U_A est l'opérateur d'évolution associé au Problème (4).

- En 1957, Krasnoselskii, Krein et Sobolevskii [23] ont étudié l'équation différentielle abstraite

$$\dot{u} + A(t)u = f(t,u), \quad 0 < t \leq T, \tag{6}$$

et ont cherché des conditions pour lesquelles la solution de l'équation intégrale (5) est une solution du Problème (6).

- En 1958, Sobolevskii [31] a étudié le Problème (4) dans un espace de Hilbert où $A(t)$ est un opérateur auto-adjoint, défini positif.

- En 1962, Kato et Tanabe [21] prouvent l'existence d'un opérateur d'évolution associé au Problème (4), (solution fondamentale du Problème (4)) sous l'hypothèse :

$$\| \ (\lambda + A(t))^{-1} \ \| \leq \frac{C}{|\lambda|^{\rho}} \ \ avec \ \ \rho \in (0, 1].$$

- En 1966, Sobolevskii [32] montre le résultat suivant concernant le Problème (4)

Théorème 0.0.1

Soit E_0, E_1 deux espaces de Banach tels $E_1 \hookrightarrow_d E_0$, (i.e., $E_1 \subset E_0$, avec injection continue et $\overline{E_1} = E_0$), $x \in E_0$, $A \in C^{\rho}(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)$ et $f \in C^{\rho}(J, E_0)$. Alors le problème parabolique de Cauchy (4) admet une solution unique

$$u(t) = U_A(t, 0)x + \int_0^t U_A(t, s)f(s)ds.$$

*De plus, si $x \in D(A(t)) = E_1$, u est une solution **stricte**, (u est dite solution stricte du Problème (4) si $u \in C^1(J, E_0)$ et $u(0) \in D(A(t)) = E_1$).*

- En 1976, Yagi [36] a montré qu'il suffit de supposer que $[\lambda + A(.)]^{-1} \in C^1([0, T], L(E_0))$, pour montrer l'existence de l'opérateur d'évolution associé au Problème (4).

- En 1985, Acquistapace et Terreni [1] ont montré que la solution u du Problème (4) vérifie

$$u \in C^{\rho}(\dot{J}, E_1) \cap C^{1+\rho}(\dot{J}, E_0),$$

sous les hypothèses du Théorème 0.0.1.

- En 1986, Amann [2] a montré sous les hypothèses du Théorème que la solution u du Problème (4) vérifit

$$u \in C^{\alpha-\beta}(J, E_\beta),$$

avec $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ et $x \in E_\alpha = (E_0, E_1)_\alpha$.

- En 1987, Amann [3] a étudié le Problème (4), lorsque le domaine de $A(t)$, $D(A(t))$, ne dépend pas de t

- En 2007, Guidotti [17] a montré que le Problème (4) admet une solution unique $u \in C^\beta_\alpha((0,T], E_0)$, (avec $\beta \in (0,1)$ et $\alpha = 0, \beta$) telle que

$$\dot{u}, Au \in C^\beta_\alpha \;\; et \;\; \|\dot{u}\|_{\beta,\alpha} + \|Au\|_{\beta,\alpha} \leq C\|f\|_{\beta,\alpha},$$

sous les hypothèses suivantes :

(i) $A(t) \in \mathcal{H}^-(E_1, E_0), \;\; t > 0,$

(ii) $\|[A(t) - A(s)]A^{-1}(\tau)\|_{L(E_0)} \leq c\frac{t-s}{t}$ et $\|[A(t) - A(s)](-A)^{-\rho}(\tau)\|_{L(E_0)} \leq c(t-s),$

(iii) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} A^{-1}(t) = 0,$

avec $\rho \in (0,1)$ et $0 < \tau \leq s \leq t \leq T$, où

$$(-A)^{-\rho} := \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty t^{p-1} e^{tA} dt$$

et

$$\|v\|_{\beta,\alpha} = \|(.)^\alpha v\|_\infty + [(.)^{\beta+\alpha} v]_\alpha$$

avec

$$[(.)^{\beta+\alpha} v]_\alpha := \sup_{0<t\neq s\leq T} \frac{\|t^{\alpha+\beta} v(t) - s^{\alpha+\beta} v(s)\|_{E_0}}{|t-s|^\alpha}.$$

Ce travail présente essentiellement un travail de Guidotti [16].

Ce mémoire est réparti en quatre chapitres.

On trouve dans **le premier chapitre** quelques résultats de base qui seront utiles dans le reste du travail (sur l'intégrale de Dunford, les semi-groupes et la théorie d'interpolation).

Dans **le deuxième chapitre**, on s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution intégrale du Problème (1).

On montrera le premier résultat principal suivant :

Proposition 0.0.1

Soit E_0, E_1 deux espaces de Banach tels que $E_0 \subset E_1$, avec injection compacte et $\overline{E_1} = E_0$.

Supposons que $A \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$ et $f \in L_{1,Loc}(J, E_0)$. Alors il existe un opérateur d'évolution unique U_A tel que

$$u(t) = \int_0^t U_A(t,\tau) f(\tau) d\tau. \tag{7}$$

est une solution du Problème (1).

D'autre part, si $u : J \longrightarrow E_0$ est une solution du Problème (1), alors elle est nécessairement donnée par la formule de variation de la constante (7).

La preuve de cette proposition est basée sur les deux résultats suivants :

Lemme 0.0.1

Soit $A \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$. On suppose que $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ et $\beta < \min\{\rho, \frac{1}{k'}\}$. Alors il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\|U_A(t,\tau)\|_{\beta \longrightarrow \alpha} := \|U_A(t,\tau)\|_{L(E_\beta, E_\alpha)} \leq c \frac{\tau^{k(\alpha-\beta)}}{(t-\tau)^{(\alpha-\beta)}}, t \in \dot{J}, \tau \in (0,t).$$

(k' est l'exposant conjugué de k).

Proposition 0.0.2

Soit $A \in C_k^\rho(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$. Alors pour $t > 0$ et $\alpha \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \tau &\longrightarrow 0 \\ U_A(t,\tau) &\longrightarrow 0 \text{ dans } L(E_0, E_\alpha). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut énoncer un autre résultat concernant la régularité de la solution du Problème (1).

Proposition 0.0.3

Supposons que $A \in C_k^{\rho}(J, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$ *et* $f \in C_{k-1}(J, E_0)$*, avec* $k > 1$*, et* $\rho \in (0, 1)$*. Alors*

$$u(.) \quad = \quad \int_0^{.} U_A(., \tau) f(\tau) d\tau \in C^{\nu}(J, E_\alpha) \tag{8}$$

où $\alpha \in [\frac{1}{k'}, 1)$ *et* $0 \leq \nu < \min\{\alpha, (1-\alpha)\}$*, (*$k'$ *est l'exposant conjugué de* k*).*

Dans **le troisième chapitre**, on montrera un autre résultat qui caractérise l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du Problème (2). C'est le :

Théorème 0.0.2

Supposons que $A \in C_k^{\rho, 1-}(J \times X_\alpha, \mathcal{H}^-(E_1, E_0))$ *et* $F \in C_{k,b}^{0,1-}(J \times X_\alpha, E_\beta)$*, avec* $0 < \beta < \alpha < 1$ *. Alors il existe* $T > 0$*, tel que le Problème (2) admet une solution unique* $u \in C([0, T], X_\alpha)$ *qui est le point fixe de la formule de variation de la constante suivante :*

$$u(t) \quad = \quad \int_0^t U_{A(.,u)}(t, \tau) F(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

De plus, on a

$$u \in C^{\delta}([0, T], E_\epsilon) \cap C((0, T], E_1) \cap C^1((0, T], E_0)$$

où $\epsilon, \delta \in (0, 1)$*, tel que* $\epsilon \geq \frac{1}{k'}$ *et* $\delta < \min\{\epsilon, (1-\epsilon)\}$*.*

La preuve de ce théorème repose sur le théorème du point fixe de Banach et la Proposition 0.0.3.

Dans **le dernier chapitre** on s'intéresse à l'illustration des résultats obtenus.

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

E'	espace dual de E.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$x \wedge y$	$:= \min(x, y)$.
$x \vee y$	$:= \max(x, y)$.
J_Δ	$:= \{(t, s) \in J \times J : s \leq t\}$
J_Δ^*	$:= \{(t, s) \in J \times J : s < t\}$
E_θ	$:= (E_0, E_1)_\theta, (0 \leq \theta \leq 1)$.
k'	exposant conjugué de k, c'est-à-dire $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$.
$\\|.\\|_{\beta \longrightarrow \alpha}$	$: = \\|.\\|_{L(E_\beta, E_\alpha)}$.
$\dot{u}$	$:= \partial_t u$.
$L(E, F)$	espace des applications linéaires continues de E dans F.
$\mathcal{C}(E, F)$	ensemble des applications linéaires et fermés de E dans F.
$D(A)$	domaine de l'opérateur A.
$\rho(A)$	ensemble résolvant de l'opérateur A.
$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$,	$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
$L^p(\Omega)$	$= \{u \textit{ mesurable sur } \Omega \textit{ et } \int_\Omega \|u\|^p dx < \infty\}, 1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u \textit{ mesurable sur } \Omega \textit{ et il existe } C \textit{ tel que } \|u(x)\| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega\}$.
W_p^1, W_p^s	espaces de Sobolev.
$B_{p,q}^s$	espace de Besov.