

---

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique

École Normale Supérieure (Kouba)

Département de mathématiques

---

## MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de  
Magister

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

Présenté par : Mohamed MERABET

Intitulé

*Étude d'une équation différentielle  
quasi-linéaire abstraite singulière*

devant le jury composé de :

Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	<b>Président</b>
Mr. B.K. Sadallah	Professeur	E.N.S-Kouba	<b>Rapporteur</b>
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	<b>Examineur</b>
Mr. R. Benabidallah	Maître de conférence	Université de Tizi Ouzou	<b>Examineur</b>

Le 20.06.2007, à la salle de cours de P.G.

# Table des matières

---

Table des matières	i
Introduction	1
Notations	8
<b>1 Rappels et définitions</b>	<b>9</b>
1.1 Intégrale de Dunford . . . . .	9
1.1.1 Les opérateurs bornés, fermés . . . . .	9
1.1.2 Ensemble et opérateur résolvant. Spectre de $A$ . . . . .	10
1.1.3 Intégrale de Dunford et calcul opérationnel . . . . .	12
1.2 Les semi-groupes . . . . .	13
1.2.1 Les semi-groupes . . . . .	13
1.2.2 Semi-groupes analytiques . . . . .	16
1.3 Les fonctions Gamma, Béta . . . . .	18
1.3.1 La fonction Gamma ( $\Gamma$ ) . . . . .	18
1.3.2 Relations fonctionnelles . . . . .	19
1.3.3 Autres expressions de $\Gamma(z)$ pour $Re(z) > 0$ . . . . .	19

1.3.4	La fonction Béta . . . . .	19
1.3.5	Propriétés . . . . .	20
1.4	Les espaces de Hölder . . . . .	20
1.5	La théorie d'interpolation linéaire . . . . .	21
1.5.1	La méthode K . . . . .	23
1.5.2	La méthode des moyennes . . . . .	24
1.5.3	Méthode complexe . . . . .	26
1.5.4	Interpolation et domaines d'opérateurs. . . . .	27
1.6	Equations intégrales . . . . .	28
1.6.1	Equations de Fredholm . . . . .	28
1.6.2	Equations de Volterra . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Le problème de Cauchy et l'opérateur d'évolution</b>	<b>30</b>
2.1	Quelques notations . . . . .	30
2.2	Problème linéaire de Cauchy . . . . .	31
2.3	L'opérateur d'évolution . . . . .	37
2.3.1	Existence d'opérateur d'évolution . . . . .	39
2.3.2	Estimation d'opérateur d'évolution . . . . .	41
2.4	La formule singulière de variation de la constante . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Le problème quasi-linéaire de Cauchy singulier</b>	<b>56</b>
3.1	Quelques notations . . . . .	56
3.2	Position du problème et hypothèses . . . . .	57

3.3	Résultat principal d'existence et d'unicité . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Problèmes aux limites à valeurs initiales, singuliers</b>	<b>64</b>
4.1	Rappels et définitions . . . . .	64
4.2	Problèmes paraboliques linéaires, non homogènes . . . . .	70
4.3	Problème parabolique quasi-linéaire aux limites. . . . .	75
	<b>Bibliographie</b>	<b>78</b>

# ملخص

سنتطرق في هذا البحث لخواص حلول معادلتين تفاضلتين مجردتين من الرتبة الأولى من النمط المكافئ في فضاء بناخي. سندرس وجود ووحدانية وصقالة الحل تحت شروط مدرجة في هذا الموضوع.

## الكلمات الفاتحة:

مسألة كوشي الشاذة، معادلة شبه خطية، الوجود و الصقالة، طريقة تغيير الثابت.

# Abstract

In this work we give some results about existence, uniqueness and regularity of the solutions of two first order abstract parabolic equations on Banach space.

**Key words :**

Singular Cauchy problems, quasilinear equations, existence and regularity, singular variation-of-constant-formula.

# Résumé

Ce travail a pour but de donner des résultats sur la résolution de deux équations différentielles abstraites du premier ordre de type parabolique dans un espace de Banach.

Nous étudions l'existence, l'unicité et la régularité de la solution sous certaines hypothèses.

**Mots clés :**

Problème de Cauchy singulier, équation quasi-linéaire, existence et régularité, formule singulière de variation de la constante.