Étude d'une équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique et à coefficients opérateurs variables.

Présentée par: Fatiha Boutaous

Dirigée par : Boubaker-Khaled Sadallah, E.N.S., Kouba, Alger.

et Rabah Labbas, Université du Havre, France

École Normale Supérieure, Kouba, le 09 Mai 2012.

Plan

1. Introduction
   - Position du Problème
   - Hypothèses
   - Outils

Plan

1. Introduction
   - Position du Problème
   - Hypothèses
   - Outils
2. Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
   - Construction de la solution
   - Régularité de la solution
   - Régularité maximale de la solution

Plan

1 Introduction
- Position du Problème
- Hypothèses
- Outils

2 Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
- Construction de la solution
- Régularité de la solution
- Régularité maximale de la solution

3 Application

Plan

1. Introduction
   - Position du Problème
   - Hypothèses
   - Outils
2. Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
   - Construction de la solution
   - Régularité de la solution
   - Régularité maximale de la solution
3. Application
4. Perspectives

Plan

1. Introduction
   - Position du Problème
   - Hypothèses
   - Outils
2. Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
   - Construction de la solution
   - Régularité de la solution
   - Régularité maximale de la solution
3. Application
4. Perspectives
5. Bibliographie

1 Introduction
- Position du Problème
- Hypothèses
- Outils

2 Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
- Construction de la solution
- Régularité de la solution
- Régularité maximale de la solution

3 Application

4 Perspectives

5 Bibliographie

Position du Problème

Ce travail est consacré à l'étude de l'équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique et à coefficients opérateurs variables :

$$u''(x) + B(x)u'(x) + A(x)u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet non homogènes :

$$\begin{cases} u(0) = \varphi, \\ u(1) = \psi, \end{cases} \quad (2)$$

où

Position du Problème

- $\lambda > 0$, φ et ψ sont deux fonctions données dans un espace de Banach complexe X,

- $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$, c'est-à-dire : $f : [0,1] \longrightarrow X$ et

$$\sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \frac{\|f(x)-f(y)\|_X}{|x-y|^\theta} < \infty.$$

- $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés à domaines $D(A(x))$ non nécessairement denses dans X,

- $(B(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés de X.

Aperçu historique

Dans le cas constant :

- **Cas** $B(x) = 0$ et $A(x) = A$, voir :

S. G. Krein : Linear differential equations in Banach spaces, Moscow, 1967, english transl. AMS, Providence, (1971).

- **Cas** $B(x) = B$ et $A(x) = A$, voir :

A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi : On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type, Funkcialaj Ekvacioj, 47 (2004), 423-452.

Aperçu historique

Dans le cas variable :

- **Cas** $B(x) = 0$ et $A(x) \neq 0$, voir :

G. Da Prato et P. Grisvard : Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles, J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54 (1975), 305-387.

R. Labbas : Problèmes aux limites pour une équation différentielle opérationnelle du second ordre, Thèse d'état, Université de Nice, (1987).

Aperçu historique

Dans le cas variable :

- **Cas** $B(x) \neq 0$ et $A(x) \neq 0$, voir :

A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et B.-K. Sadallah : Study of a Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type With Variable Operators Coefficients (Part I), Rev. Mat. Complut. 21 (2008), no. 1, 89-133.

F. Boutaous, R. Labbas et B.-K. Sadallah : Fractional-power approach for solving complete elliptic abstract differential equations with variable-operator coefficients, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 05, 1-33.

L'objectif de cette Thèse

L'objectif de cette Thèse

Traiter l'équation différentielle (1) par une **autre approche complètement différente** basée sur :

- Les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires et les semi-groupes engendrés par elles.
- L'utilisation de nouvelles hypothèses de différentiabilité des résolvantes des racines carrées des opérateurs caractérisant l'ellipticité.

F. Boutaous : Fractional Powers Approach of Operators for the Solvability of Some Elliptic PDE's with Variable Operators Coefficients, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 349 (2011), 969-972.

Hypothèses

Dans tout ce travail, on pose

$$Q(x) = A(x) - \lambda, \ \lambda > 0,$$

et en utilisera les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \exists C > 0, \ \forall z \geq 0, \ \forall x \in [0,1], \ \exists (Q(x) - zI)^{-1} \in \mathcal{L}(X), \\ \text{et } \left\| (Q(x) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C/(1+z), \end{cases} \tag{3}$$

$$\exists C > 0 : \ \forall x \in [0,1], \ \|B(x)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \ C, \tag{4}$$

Ici, le terme $B(x)u'(x)$ est considéré dans l'équation (1) comme une "perturbation".

Hypothèses

L'hypothèse (3) nous permet d'utiliser **les racines carrées** $\sqrt{(-Q(x))}$ et pour chaque $x \in [0,1]$, $\lambda > 0$, l'opérateur

$$K(x) = -(-Q(x))^{1/2} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi} \int_0^\infty z^{-1/2} Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} dz$$

engendre **un semi-groupe analytique** $(e^{yK(x)})_{y>0}$ **non fortement continu** en 0 (voir Balakrishnan [2] pour les domaines denses et Martinez et Sanz [10] pour les domaines non denses).

De plus, il existe un secteur (pour $\theta_1 > 0$ et $r_1 > 0$ petits) :

$$\prod_{\theta_1+\frac{\pi}{2}, r_1} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_1 + \frac{\pi}{2}\} \bigcup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1\},$$

où $\prod_{\theta_1+\frac{\Pi}{2}, r_1} \subset \rho(K(x))$. On considère la **courbe** $\Gamma_1 = \partial \prod_{\theta_1+\frac{\Pi}{2}, r_1}$, orientée positivement.

Hypothèses

D'où, pour tout $x \in [0,1]$, $y > 0$, on a

$$e^{yK(x)} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{yz}(K(x)-zI)^{-1}dz,$$

où la résolvante $(K(x)-zI)^{-1}$ est définie par (voir Tanabe [12])

$$(K(x)-zI)^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{s}(Q(x)-sI)^{-1}}{s+z^2}ds.$$

En plus des hypothèses (3) et (4), on suppose que : pour tout $z \in \prod_{\theta_1+\frac{\pi}{2},r_1}$, l'application $x \mapsto (K(x)-zI)^{-1}$, définie sur $[0,1]$, est dans $C^2([0,1],\mathcal{L}(X))$ et il existe $C>0$, $\nu \in]1/2,1]$ et $\eta \in]0,1[$ tels que $\forall z \in \prod_{\theta_1+\frac{\pi}{2},r_1}$, $\forall x,s \in [0,1]$,

Hypothèses

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(K(x) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|z|^{\nu}}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \left\| \frac{\partial}{\partial x}(K(x) - zI)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s}(K(s) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C|x-s|^{\eta}}{|z|^{\nu}}, \\ \text{avec} \quad \eta + \nu - 1 > 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C|z|^{1-\nu}, \tag{7}$$

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1} - \frac{d^2}{ds^2}(K(s))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C|x-s|^{\eta}, \tag{8}$$

Hypothèses

$$\begin{cases} B(0)(X) \subset \overline{D(K(0))}, \\ B(1)(X) \subset \overline{D(K(1))}, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(K(x))^{-1}_{|x=0}(D(K(0))) \subset \overline{D(K(0))}, \\ \dfrac{d}{dx}(K(x))^{-1}_{|x=1}(D(K(1))) \subset \overline{D(K(1))}. \end{cases} \tag{10}$$

Outils

- Les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires.
- La théorie des semi-groupes.
- Le calcul fonctionnel de Dunford.
- Les techniques de calcul de E. Sinestrari.
- Les techniques de calculs de P. Acquistapace et B. Terreni.
- Les espaces d'interpolation.

1 Introduction
- Position du Problème
- Hypothèses
- Outils

2 Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
- Construction de la solution
- Régularité de la solution
- Régularité maximale de la solution

3 Application

4 Perspectives

5 Bibliographie

Formule de représentation de la solution

Comme dans le cas $B(x) = 0$ et $Q(x) = Q$ est un opérateur **constant** satisfaisant l'hypothèse (3) (voir S. G. Krein [7],) on va chercher la solution u du Problème (1)-(2) sous la forme

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xK(x)}\xi_0^*(x) + e^{(1-x)K(x)}\xi_1^*(x) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)ds \\ &+\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)ds, \end{aligned} \tag{11}$$

où f^* est une fonction inconnue dans $C^\beta([0,1];X), (0<\beta<1)$.
Les fonctions ξ_0^* et ξ_1^* sont définies par

Formule de représentation de la solution

$$\begin{aligned} \xi_0^*(x) &= (I - Z(x))^{-1}(\varphi^* - e^{K(x)}\psi^*) \\ &- \frac{(I - Z(x))^{-1}}{2} \int_0^1 e^{sK(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)ds \\ &+ \frac{(I - Z(x))^{-1}}{2} \int_0^1 e^{(2-s)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)ds, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \xi_1^*(x) &= (I - Z(x))^{-1}(\psi^* - e^{K(x)}\varphi^*) \\ &- \frac{(I - Z(x))^{-1}}{2} \int_0^1 e^{(1-s)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)ds \\ &+ \frac{(I - Z(x))^{-1}}{2} \int_0^1 e^{(1+s)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)ds, \end{aligned} \tag{13}$$

Formule de représentation de la solution

avec

$$Z(x) = e^{2K(x)}$$

et en posant

$$Y(x) = (I - Z(x))^{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{2z}}{1 - e^{2z}} (K(x) - zI)^{-1} dz + I,$$

(voir Lunardi [9]), la solution cherchée u va s'écrire sous la forme :

$$
\begin{aligned}
u(x) &= Y(x)[(e^{xK(x)} - e^{(2-x)K(x)})\varphi^* + (e^{(1-x)K(x)} - e^{(1+x)K(x)})\psi^*] \\
&\quad - \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)ds \\
&\quad + \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(2+x-s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)ds \\
&\quad - \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x-s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)ds \\
&\quad + \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x+s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)ds \\
&= d_0(x)\varphi^* + d_1(x)\psi^* + m(x,f^*) + v(x,f^*).
\end{aligned} \tag{14}
$$

Régularité de la solution

On cherche les fonctions inconnues φ^*, ψ^* et f^* pour que la fonction u donnée dans (11) soit une solution stricte du Problème (1)-(2).

Solution stricte

Une solution stricte est une fonction u telle que :

- $u \in C^2([0,1];X)$,
- $u(x) \in D(Q(x))$ pour chaque $x \in [0,1]$,
- $x \mapsto Q(x)u(x) \in C([0,1];X)$,
- u vérifie le Problème (1)-(2).

Régularité de la solution

Parmi les difficultés rencontrées dans ce travail, il y a l'étude de régularité de la solution aux bords en 0 et 1.
Par un calcul formel on obtient

$$\begin{cases} u(0) = \varphi = \varphi^*, \\ \\ u(1) = \psi = \psi^*. \end{cases}$$

Pour étudier la régularité de la solution u écrite dans (14), on pose pour tout $x \in]0,1[$,

$$Op(u)(x) = u''(x) + B(x)u'(x) + Q(x)u(x),$$

ce qui conduit à

Régularité de la solution

$$Op(u)(x) = Op(d_0(x))\varphi + Op(d_1(x))\psi + Op(m(x,f^*)) + Op(v(x,f^*)), \tag{15}$$

$$\begin{cases} Op(d_0(x))\varphi = [d_0''(x) + Q(x)d_0(x)]\varphi + B(x)d_0'(x)\varphi \\ \qquad\qquad\qquad = F_\lambda(x)\varphi + G_\lambda(x)\varphi, \\ Op(d_1(x))\psi = [d_1''(x) + Q(x)d_1(x)]\psi + B(x)d_1'(x))\psi \\ \qquad\qquad\qquad = S_\lambda(x)\psi + T_\lambda(x)\psi, \\ Op(m(x,f^*)) = [m''(x,f^*) + Q(x)m(x,f^*)] + B(x)m'(x,f^*) \\ \qquad\qquad\qquad = M_\lambda(f^*)(x) + N_\lambda(f^*)(x), \\ Op(v(x,f^*)) = [v''(x,f^*) + Q(x)v(x,f^*)] + B(x)v'(x,f^*) \\ \qquad\qquad\qquad = V_\lambda(f^*)(x) + W_\lambda(f^*)(x) + f^*(x). \end{cases} \tag{16}$$

Régularité de la solution

Proposition 1

Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$, $\psi \in D((K(1))^2)$. Supposons que les hypothèses (3) $\sim$ (10) sont vérifiées. Alors,

- Les fonctions $x \mapsto Op(d_0(.))(x)$, $x \mapsto Op(d_1(.))(x)$

  et $x \mapsto Op(m(., f^*))(x)$ appartiennent à l'espace

  $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$.
- La fonction $x \mapsto Op(v(., f^*))(x)$ appartient à l'espace

  $C^{\min(\beta,\eta+\nu-1)}([0,1];X)$.

Régularité de la solution

Proposition 2

Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$, $\psi \in D((K(1))^2)$ et $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, où $0 < \theta < 1$. Supposons que les hypothèses (3)∼(10) sont vérifiées. Si la fonction u donnée dans (11) est une solution stricte du Problème (1)-(2), alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, l'équation

$$(I + R_\lambda)(f^*)(.) = f(.) - F_\lambda(.)\varphi - G_\lambda(.)\varphi - S_\lambda(.)\psi - T_\lambda(.)\psi,$$

où

$$R_\lambda(f^*)(.) = M_\lambda(f^*)(.) + N_\lambda(f^*)(.) + V_\lambda f^*(.) + W_\lambda(f^*)(.),$$

admet une solution unique $f^*(.)$ où

$$f^*(.) \in C^{\beta}([0,1];X), \quad \beta = \min(\theta, \eta + \nu - 1).$$

Preuve

Pour déterminer la fonction f^*, on doit résoudre l'équation

$$Op(u)(x) = f(x), \; pour \; x \in]0,1[.$$

Par calcul, on obtient

$$(I + R_\lambda)(f^*)(.) = f(.) - F_\lambda(.)\varphi - G_\lambda(.)\varphi - S_\lambda(.)\psi - T_\lambda(.)\psi,$$

où

$$R_\lambda(f^*)(.) = M_\lambda(f^*)(.) + N_\lambda(f^*)(.) + V_\lambda(f^*)(.) + W_\lambda(f^*)(x).$$

On doit inverser $(I + R_\lambda)$, pour cela il suffit de vérifier que

$$\|R_\lambda\|_{L(C([0,1];X))} < 1.$$

Régularité de la solution

Proposition 3

Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$, $\psi \in D((K(1))^2)$ et $f \in C^\theta([0,1];X)$, où $0 < \theta < 1$. Sous les hypothèses (3)∼(10) et si la fonction u donnée dans (11) est une solution stricte du Problème (1)-(2), alors

$$\begin{cases} f^*(0) = f(0) + \dfrac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0}K(0)\varphi + \Phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*,\psi), \\ \\ f^*(1) = f(1) + \dfrac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=1}K(1)\psi + \Phi_1^*(\psi) + r_1(f^*,\varphi), \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \Phi_0^*(\varphi),\ r_0(f^*,\psi) \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}, \\ \Phi_1^*(\psi),\ r_1(f^*,\varphi) \in \overline{D(K(1))} = \overline{D(Q(1))}. \end{cases}$$

Résultat principal d'existence et d'unicité de la solution

Théorème 1

Soit $\varphi \in D(A(0))$, $\psi \in D(A(1))$ et $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$. Sous les hypothèses $(3) \sim (10)$, il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, la fonction u donnée dans la représentation (11) est la solution stricte unique du Problème (1)-(2) si et seulement si

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}(\lambda - A(x))^{-\frac{1}{2}}_{|x=0}(\lambda - A(0))^{\frac{1}{2}}\varphi \in \overline{D(A(0))}, \\ \\ f(1) - A(1)\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}(\lambda - A(x))^{-\frac{1}{2}}_{|x=1}(\lambda - A(1))^{\frac{1}{2}}\psi \in \overline{D(A(1))}. \end{cases}$$

Régularité maximale de la solution

Sachant qu'on a

$$D_{K(0)}(\theta;+\infty) \subset \overline{D(K(0))}; \quad D_{K(1)}(\theta;+\infty) \subset \overline{D(K(1))},$$

où l'espace d'interpolation $D_{K(0)}(\theta;+\infty)$ est défini par :

$$D_{K(0)}(\theta;+\infty) = \{\phi \in X : \sup_{r>0} r^{\theta} \|K(0)(K(0)-r)^{-1}\phi\|_X < \infty\}.$$

(Voir P. Grisvard [6]). Pour traiter la régularité maximale de la solution du problème (1)-(2), on imposera les hypothèses suivantes :

Régularité maximale de la solution

$$\left\{\begin{array}{l} B(0)(X) \subset D_{K(0)}(\theta;+\infty), \\ \\ B(1)(X) \subset D_{K(1)}(\theta;+\infty), \end{array}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}(K(x))^{-1}_{|x=0}(D(K(0))) \subset D_{K(0)}(\theta;+\infty), \\ \\ \dfrac{d}{dx}(K(x))^{-1}_{|x=1}(D(K(1))) \subset D_{K(1)}(\theta;+\infty) \end{array}\right. \tag{18}$$

Résultat essentiel de régularité maximale de la solution

Théorème 2

Soit $\varphi \in D(A(0))$, $\psi \in D(A(1))$ et $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, où $0 < \theta < 1$. Sous les hypothèses $(3) \sim (8)$ et (17)-(18), il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, la solution stricte u donnée dans (11) satisfait :

$$u''(.),\ B(.)u'(.),\ Q(.)u(.) \in C^{\beta}([0,1];X),\ \beta = min(\theta, \eta + \nu - 1),$$

si et seulement si

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}(\lambda - A(x))^{-\frac{1}{2}}_{|x=0}(\lambda - A(0))^{\frac{1}{2}}\varphi \in D_{A(0)}(\frac{\theta}{2};+\infty), \\ \\ f(1) - A(1)\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}(\lambda - A(x))^{-\frac{1}{2}}_{|x=1}(\lambda - A(1))^{\frac{1}{2}}\psi \in D_{A(1)}(\frac{\theta}{2};+\infty). \end{cases}$$

Conclusion

Améliorations obtenues

- Les Théorèmes 1 et 2 nous permettent d'obtenir des conditions de compatibilité nécessaires et suffisantes pour l'existence de la solution stricte du problème (1)-(2). Cela est dû essentiellement aux propriétés fines des semi-groupes analytiques engendrés par les $K(x)$.
- Ceci améliore les résultats obtenus en 2008 où les auteurs ont trouvé seulement des conditions de compatibilité suffisantes pour l'existence de la solution stricte, en utilisant le calcul fonctionnel de Dunford et les opérateurs $Q(x)$.

1 Introduction
- Position du Problème
- Hypothèses
- Outils

2 Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
- Construction de la solution
- Régularité de la solution
- Régularité maximale de la solution

3 **Application**

4 Perspectives

5 Bibliographie

Application

On considère l'espace de Banach $X = C([0,1])$ muni de la norme sup. On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $(-(-A(x))^{1/2})_{x\in[0,1]}$ par :

$$\begin{cases} D(-(-A(x))^{1/2}) = \{\phi \in C^2([0,1]) : a(x)\phi(0) - b(x)\phi'(0) = 0; \\ \qquad\qquad et \quad \phi(1) = 0\}, \\ ((-(-A(x))^{1/2})\phi)(y) = \phi''(y), \quad y \in [0,1], \end{cases}$$

avec $a, b \in C^{2,k}([0,1])$, $a(x) \geqslant 0$ et $\min_{x\in[0,1]} b(x) > 0$.

On s'inspire ici d'un **exemple analogue** donné dans Acquistapace et Terreni [1].

Application

Ainsi, on obtient la famille des opérateurs linéaires fermés

$(A(x))_{x\in[0,1]}$ définie par :

$$\begin{cases} D(A(x)) = \{\phi \in C^4([0,1]) : a(x)\phi(0) - b(x)\phi'(0) = 0; \phi'(1) = 0, \\ \qquad\qquad a(x)\phi''(0) - b(x)\phi'''(0) = 0 \quad et \quad \phi''(1) = 0\} \\ ((A(x))\phi)(y) = -\phi^{(4)}(y), \quad y \in \ [0,1]. \end{cases}$$

Application

Notons que les domaines $D(-(-A(x))^{1/2})$ (aussi pour $D(A(x))$) **dépendent** de la variable x et ils **ne sont pas denses** dans X, car

$$\overline{D(A(x))} = \overline{D((-A(x))^{1/2})} = \{\phi \in C([0,1]) : \phi(1) = 0\} \neq X.$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires $(B(x))_{x\in[0,1],}$ par

$$D(B(x)) = X; \quad (B(x)\phi)(y) = c(x)\phi(y),$$

où c est une fonction dans l'espace $C([0,1])$.

Application

Les résultats obtenus s'appliquent au Problème (en EDP) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + c(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - \lambda u(x,y) = f(x,y), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ u(0,y) = \varphi(y), \quad y \in (0,1), \\ u(1,y) = \psi(y), \quad y \in (0,1), \\ a(x)u(x,0) - b(x)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad x \in (0,1), \\ a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) - b(x)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,0) = 0, \quad x \in (0,1), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1) = u(x,1) = 0, \quad x \in (0,1). \end{cases}$$

1. Introduction
   - Position du Problème
   - Hypothèses
   - Outils
2. Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
   - Construction de la solution
   - Régularité de la solution
   - Régularité maximale de la solution
3. Application
4. Perspectives
5. Bibliographie

Perspectives

1. Étudier cette équation différentielle dans l'espace L^p, et aussi sur la demi-droite $[0, \infty)$ dans les cadres Höldérien et L^p.

2. Traiter des équations différentielles d'ordre supérieur dans le cas variable.

3. Généraliser l'étude de cette équation différentielle au cas où les opérateurs $(B(x))_{x \in ([0,1])}$ forment une famille d'opérateurs linéaires fermés et ceci dans les deux cadres fonctionnels Höldérien et L^p.

1. Introduction
   - Position du Problème
   - Hypothèses
   - Outils
2. Étude d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution
   - Construction de la solution
   - Régularité de la solution
   - Régularité maximale de la solution
3. Application
4. Perspectives
5. Bibliographie

Bibliographie

P. Acquistapace et B. Terreni, Some Existence and Regularity Results for Abstract Non-Autonomous Parabolic Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 99, No 1,(1984), 9-64.

A. V. Balakrishnan, Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by them, Pacific J. Math., 10 (1960), 419-437.

G. Da Prato et P. Grisvard, Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles, J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54 (1975), 305-387.

A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi, On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type, Funkcialaj Ekvacioj, 47 (2004), 423-452.

A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet and B.-K. Sadallah, Study of a Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type With Variable Operators Coefficients (Part I), Rev. Mat. Complut. 21(2008), no. 1, 89-133.

P. Grisvard, Spazi di Tracce e Applicazioni, Rendiconti di Matematica(4) Vol. 5, série VI, (1972), p. 657-729.

S.G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Spaces, Moscow, 1967, english transl. AMS, Providence, (1971).

R. Labbas, Problèmes aux limites pour une équation différentielle opérationnelle du second ordre, Thèse d'état, Université de Nice, (1987).

A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, (1995).

C. Martinez Carracedo et M. Sanz Alix, The Theory of Fractional Powers of Operators, North-Holland Mathematics Studies 187. New York, Elsevier Science, (2001).

E. Sinestrari, On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Functions, J. Math. Anal. Appli. 66 (1985), 16-66.

H. Tanabe, Equations of Evolution, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, (1979).

Merci de votre attention.