# 4

# Applications

## Sommaire



Nous allons illustrer les résultats obtenus via des examples concrets variés en considérant les espaces $X = C([0,1])$, $X = L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, $X = C\left(\overline{\Omega}\right)$ et $X = L^p(\Omega)$, où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

## 4.1 Cas d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$

### 4.1.1 Exemple 1

Considérons l'espace de Banach $X = C([0,1])$ muni de sa norme. On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $(-A(x))^{1/2}$ pour tout $x \in [0,1]$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} D\left(-(-A(x))^{1/2}\right) = \{\varphi \in C^2([0,1]) : a(x)\varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0,\ \varphi(1) = 0\} \\ \left(-(-A(x))^{1/2}\varphi\right)(y) = \varphi''(y)\,, \ \ y \in [0,1], \end{array} \right.$$

(on s'est inspiré d'un exemple analogue traité dans [1], voir p. 52), ceci nous conduit à écrire

$$\left\{\begin{array}{l} D\left(A\left(x\right)\right)=\{\varphi\in C^{4}\left(\left[0,1\right]\right):a\left(x\right)\varphi\left(0\right)-b(x)\varphi'\left(0\right)=0,\ \varphi'\left(1\right)=0; \\ \qquad\qquad a\left(x\right)\varphi''\left(0\right)-b(x)\varphi'''\left(0\right)=0 \ \text{ et } \varphi''\left(1\right)=0\} \\ \left(A\left(x\right)\varphi\right)\left(y\right)=-\varphi^{(iv)}\left(y\right),\ \ y\in\left[0,1\right]. \end{array}\right.$$

On suppose que $a,b\in C^{2,\theta}[0,1]$, $a(x)\geqslant 0$ et $\min\limits_{x\in[0,1]}b(x)>0$. D'autre part, on définit la famille d'opérateurs linéaires bornés $\left(B\left(x\right)\right)_{x\in[0,1]}$ par

$$D\left(B\left(x\right)\right)=X;\quad \left(B\left(x\right)\varphi\right)\left(y\right)=c(x)\varphi(y).$$

où $c$ désigne une fonction dans $C^{\theta}\left(\left[0,1\right]\right)$.

Notons que les domaines $D\left(-(-A\left(x\right))^{1/2}\right)$ (aussi pour $D(A(x))$) dépendent de la variable $x$ et ils ne sont jamais denses dans $X$, puisque

$$\overline{D(A(x))}=\overline{D((-A\left(x\right))^{1/2})}=\{\varphi\in C\left(\left[0,1\right]\right):\ \varphi\left(1\right)=0\}\neq X.$$

Un calcul direct, pour $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{-}$ et $\psi\in X$, montre qu'on peut résoudre l'équation spectrale

$$-(-A\left(x\right))^{1/2}\varphi-z\varphi=\psi\in X,$$

qui est équivalente à

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi''(y)-z\varphi\left(y\right)=\psi(y),\ \ y\in[0,1], \\ a\left(x\right)\varphi\left(0\right)-b(x)\varphi'\left(0\right)=0,\ \ \varphi\left(1\right)=0. \end{array}\right.$$

On obtient

$$\left((-(-A\left(x\right))^{1/2}-zI)^{-1}\psi\right)\left(y\right)=\int_{0}^{1}K_{\rho}\left(y,x,s\right)\psi\left(s\right)ds,$$

avec $\rho=\sqrt{z}$ (ici $\mathrm{Re}\left(\rho\right)>0$) et $K_{\rho}\left(y,x,s\right)$ est le noyau de Green défini par

$$K_{\rho}\left(y,x,s\right)=-\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\sinh\rho(1-y)\left[a(x)\sinh\rho s+b(x)\rho\cosh\rho s\right]}{\rho\left[a(x)\sinh\rho+b(x)\rho\cosh\rho\right]} & \text{si } 0\leqslant s\leqslant y, \\ \dfrac{\sinh\rho(1-s)\left[a(x)\sinh\rho y+b(x)\rho\cosh\rho y\right]}{\rho\left[a(x)\sinh\rho+b(x)\rho\cosh\rho\right]} & \text{si } y\leqslant s\leqslant 1. \end{array}\right.$$

Notons

$$K(x)=-(-A\left(x\right))^{1/2}.$$

(On obtient les mêmes résultats quand on considère le paramètre $\lambda$).

L'opérateur $K(x)$ est inversible et son inverse est borné. On a

$$[(K(x))^{-1}\,\psi](y) = \left[-(-A\,(x))^{-1/2}\psi\right](y) = \int_0^1 K_0\,(y,x,s)\,\psi\,(s)\,ds,$$

avec

$$K_0\,(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{(1-y)\,[a(x)s+b(x)]}{a(x)+b(x)} & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant y, \\ \dfrac{(1-s)\,[a(x)y+b(x)]}{a(x)+b(x)} & \text{si } \; y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Soit $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}
&-[\left((K(x_2))^{-1} - (K(x_1))^{-1}\right)\psi](y) \\
=\;& \int_0^1 [K_0\,(y,x_2,s) - K_0\,(y,x_1,s)]\psi\,(s)\,ds \\
=\;& (1-y)\int_0^y \frac{[a(x_2)s+b(x_2)]}{a(x_2)+b(x_2)}\psi\,(s)\,ds \\
& -(1-y)\int_0^y \frac{[a(x_1)s+b(x_1)]}{a(x_1)+b(x_1)}\psi\,(s)\,ds \\
& +[a(x_2)y+b(x_2)]\int_y^1 \frac{(1-s)\psi\,(s)}{a(x_2)+b(x_2)}ds \\
& -[a(x_1)y+b(x_1)]\int_y^1 \frac{(1-s)\psi\,(s)}{a(x_1)+b(x_1)}ds,
\end{aligned}$$

en écrivant

$$\begin{aligned}
& (1-y)\int_0^y \frac{[a(x_2)s+b(x_2)]}{a(x_2)+b(x_2)}\psi\,(s)\,ds - (1-y)\int_0^y \frac{[a(x_1)s+b(x_1)]}{a(x_1)+b(x_1)}\psi\,(s)\,ds \\
=\;& (1-y)\int_0^y \left(\frac{[a(x_2)s+b(x_2)]}{a(x_2)+b(x_2)} - \frac{[a(x_1)s+b(x_1)]}{a(x_1)+b(x_1)}\right)\psi\,(s)\,ds \\
=\;& (1-y)\int_0^y \frac{a(x_2)b(x_1)-a(x_1)b(x_2)]s+b(x_2)a(x_1)-b(x_1)a(x_2)}{[a(x_2)+b(x_2)][a(x_1)+b(x_1)]}\psi\,(s)\,ds \\
=\;& (1-y)\int_0^y \frac{b(x_1)[a(x_2)-a(x_1)]s+b(x_1)[a(x_1)-a(x_2)]}{[a(x_2)+b(x_2)][a(x_1)+b(x_1)]}\psi\,(s)\,ds \\
& +(1-y)\int_0^y \frac{a(x_1)[b(x_1)-b(x_2)]s+a(x_1)[b(x_2)-b(x_1)]}{[a(x_2)+b(x_2)][a(x_1)+b(x_1)]}\psi\,(s)\,ds,
\end{aligned}$$

(on fait de même pour l'autre terme), on en déduit que

$$\left\|\left((K(x_2))^{-1} - (K(x_1))^{-1}\right)\right\| \leqslant C\left|x_2 - x_1\right|. \tag{4.1}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} & [(K(x))^{-1}\,\psi]'(y) \\ = & -\int\limits_0^y \frac{a(x)s + b(x)}{a(x) + b(x)}\psi\left(s\right)ds + a(x)\int\limits_y^1 \frac{(1-s)}{a(x) + b(x)}\psi\left(s\right)ds; \end{aligned}$$

et par un calcul analogue au précédent, il résulte

$$\left\|[(K(x_2))^{-1}\,\psi]'(y) - [(K(x_1))^{-1}\,\psi]'(y)\right\|_X \leqslant C\left|x_2 - x_1\right|\left\|\psi\right\|_X. \tag{4.2}$$

Posons $d(x) = a(x)/b(x)$ et écrivons

$$[a(x)\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho] = b(x)\left[d(x)\sinh\rho + \rho\cosh\rho\right] = b(x)D(x,\rho).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et $x \in [0,1]$, on a $D(x,\rho) \neq 0$. D'autre part, pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et $x \in [0,1]$ (comme dans [1], p. 54), on a

$$\left|\frac{d(x)}{2}(e^{\rho} - e^{-\rho}) + \frac{\rho}{2}(e^{\rho} + e^{-\rho})\right| \geqslant \left|d(x) + \operatorname{Re}(\rho)\right|\sinh\operatorname{Re}(\rho).$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^1 \left|K_\rho\left(y,x,s\right)\right|ds \\ \leqslant\; & \frac{\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,(1-y)\displaystyle\int_0^y [a(x)\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,s + b(x)\left|\rho\right|\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,s]\,ds}{b(x)\left|\rho\right|\left|d(x)+\operatorname{Re}(\rho)\right|\sinh\operatorname{Re}(\rho)} \\ & + \frac{[a(x)\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,y + b(x)\left|\rho\right|\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,y]\displaystyle\int_y^1 \cosh\operatorname{Re}(\rho)\,(1-s)ds}{b(x)\left|\rho\right|\left|d(x)+\operatorname{Re}(\rho)\right|\sinh\operatorname{Re}(\rho)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leqslant\; & \frac{a(x)\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,(1-y)\sinh\operatorname{Re}(\rho)\,y + b(x)\left|\rho\right|\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,(1-y)\sinh\operatorname{Re}(\rho)\,y}{b(x)\operatorname{Re}(\rho)\left|\rho\right|\left|d(x)+\operatorname{Re}(\rho)\right|\sinh\operatorname{Re}(\rho)} \\ & + \frac{[a(x)\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,y + b(x)\left|\rho\right|\cosh\operatorname{Re}(\rho)\,y]\sinh\operatorname{Re}(\rho)\,(1-y)}{b(x)\operatorname{Re}(\rho)\left|\rho\right|\left|d(x)+\operatorname{Re}(\rho)\right|\sinh\operatorname{Re}(\rho)} \\ \leqslant\; & \frac{a(x)\sinh\operatorname{Re}(\rho) + b(x)\left|\rho\right|\sinh\operatorname{Re}(\rho)}{b(x)\operatorname{Re}(\rho)\left|\rho\right|\left|d(x)+\operatorname{Re}(\rho)\right|\sinh\operatorname{Re}(\rho)} \\ \leqslant\; & \frac{a(x) + b(x)\operatorname{Re}(\rho)}{b(x)\left|(d(x)+\operatorname{Re}(\rho))\right|\operatorname{Re}(\rho)\left|\rho\right|} \\ \leqslant\; & \frac{b(x)(d(x)+\operatorname{Re}(\rho))}{b(x)\left|(d(x)+\operatorname{Re}(\rho))\right|\operatorname{Re}(\rho)\left|\rho\right|} \leqslant \frac{1}{\cos(\theta/2)\left|z\right|}, \end{aligned}$$

avec $\theta = \arg(z)$. Ainsi, il existe $C > 0$, $r_1 > 0$ , $\theta_1 > 0$ indépendants de $x$ ($\theta_1$ est un angle petit dans $]0, \pi/2[$) tels que pour tout

$$z \in \Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_1 + \pi/2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_1\}$$

$$\left\|(-(-A(x))^{1/2} - zI)^{-1}\right\| \leqslant \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 |K_x(y,s)|\, ds \leqslant \frac{C}{|z|}. \tag{4.3}$$

Grâce à Haase [21], pour tout $\lambda > 0$, il existe un opérateur linéaire borné $T_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ tel que

$$\begin{aligned}(-Q(x))^{1/2} &= (-A(x) + \lambda I)^{1/2} \\ &= (-A(x))^{1/2} + T_\lambda(x)\end{aligned}$$

avec $\|T_\lambda(x)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C\lambda^{1/2}$ et $C$ est indépendante de $x$. Donc, de cette dernière propriété et de (4.3), on déduit que $-(-Q(x))^{1/2}$ génère un semi-groupe analytique non fortement continu en 0. Maintenant, on va étudier les propriétés de l'opérateur

$$\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=0} = \frac{d}{dx}\left[-(-A(x))^{-1/2}\right]_{|x=0}.$$

Pour tout $\psi \in X$ et $y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}\psi\right\}(y) \\
&= -\int_0^1 \frac{d}{dx}\left[K_0(y,x,s)\right]\psi(s)\, ds \\
&= -(1-y)\int_0^y \frac{d}{dx}\left[\frac{a(x)s+b(x)}{a(x)+b(x)}\right]\psi(s)\, ds \\
&\quad -\frac{d}{dx}\left[\frac{a(x)y+b(x)}{a(x)+b(x)}\right]\int_y^1 (1-s)\psi(s)\, ds \\
&= -\frac{(1-y)\left[a(x)b'(x)-a'(x)b(x)\right]}{\left[a(x)+b(x)\right]^2}\int_0^1 (1-s)\psi(s)\, ds,
\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=0}\psi\right\}(y) \\
&= -\frac{(1-y)(a(0)b'(0)-a'(0)b(0))}{\left[a(0)+b(0)\right]^2}\int_0^1 (1-s)\psi(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\overline{D((-Q\,(x))^{1/2})} = \overline{D(A(x))} = \{\varphi \in C\,([0,1]) :\ \varphi\,(1) = 0\} \neq X.$$

$$\frac{d\,(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=0}(X) \subset \overline{D(K(0))},$$

D'une manière similaire, on obtient

$$\frac{d\,(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=1}(X) \subset \overline{D(K(1))}.$$

Notons que, pour $\psi \in D\left(-(-A\,(0))^{1/2}\right) = D\,(K(0))$, on a

$$\begin{cases} \psi \in C^2\,([0,1])\,, \quad a\,(0)\,\psi\,(0) - b(0)\psi'\,(0) = 0, \\ \psi\,(1) = 0, \quad K(0)\psi = \psi'', \end{cases}$$

d'où (après une intégration par parties)

$$\begin{aligned} & \left\{\frac{d\,(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=0} K(0)\psi\right\}(y) \\ = & -\frac{(1-y)(a(0)b'(0) - a'(0)b(0))}{[a(0)+b(0)]^2}\int_0^1 (1-s)\psi''\,(s)\,ds \\ = & \frac{(1-y)(a(0)b'(0) - a'(0)b(0))}{[a(0)+b(0)]^2}\,[\psi'(0) + \psi(0)] \\ = & \varphi(y). \end{aligned}$$

Ainsi on peut vérifier que

$$\varphi \in C^2\,([0,1])\,, \quad \varphi(1) = 0,$$

mais

$$a\,(0)\,\varphi\,(0) - b(0)\varphi'\,(0) \neq 0.$$

Ceci montre que $\dfrac{d}{dx}\,(K(x))^{-1}_{|x=0}\,(D(K(0))$ n'est pas inclu dans $D(K(0))$. On a seulement

$$\frac{d}{dx}\,(K(x))^{-1}_{|x=0}\,(D(K(0)) \subset \overline{D(K(0))},$$

et on aura la même propriété en 1. De manière similaire, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x}(K(x) - zI)^{-1}\psi\right)(y) \\ = & -\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}\frac{[a(x)\sinh\rho s + b(x)\rho\cosh\rho s]}{\rho\,[a(x)\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]}\psi(s)ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x}\frac{[a(x)\sinh\rho y + b(x)\rho\cosh\rho y]}{\rho\,[a(x)\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]} \\
& \qquad \cdot \int_y^1 \sinh\rho(1-s)\psi(s)ds \\
= & \; -\sinh\rho(1-y)\frac{[a(x)b'(x) - a'(x)b(x)]}{[a(x)\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]^2} \\
& \qquad \cdot \int_0^1 \sinh\rho(1-s)\psi(s)ds.
\end{aligned}
$$

Comme dans [1], p. 55, on aura

$$
\left\| \frac{\partial}{\partial x}(K(x) - zI)^{-1} \right\| \leqslant \frac{C}{|z|} \leqslant \frac{C}{|z|^{\nu}}
$$

pour tout $z \in \Pi_{\theta_1+\pi/2, r_1}$ avec $\nu \in\, ]1/2, 1]$. On s'intéresse à l'estimation de l'opérateur $\dfrac{d^2\,(K(x))^{-1}}{dx^2}$. Pour cela on note :

$$
\begin{aligned}
\left[\left(\frac{d^2}{dx^2}\,(K(x))^{-1}\right)\psi\right](y) &= -\int_0^1 \frac{d^2}{dx^2}\,[K_0\,(y,x,s)]\,\psi\,(s)\,ds \\
&= -\,(1-y)\left(\int_0^1 (1-s)\psi\,(s)\,ds\right)\cdot H\,(x)\,,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
H\,(x) &= \frac{[a''(x)b(x) - a(x)b''(x)]\,[a(x) + b(x)]}{[a(x) + b(x)]^3} \\
&\quad - \frac{2\,[a(x)b'(x) - a'(x)b(x)]\,[a'(x) + b'(x)]}{[a(x) + b(x)]^3} \\
&= H_1\,(x) + H_2\,(x)\,.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\left\| \left(\frac{d^2}{dx^2}\,(K(x))^{-1}\right)\psi \right\|_X \leqslant C\,\|\psi\|_X\,.
$$

Grâce à la formule (2.19), on peut vérifier que

$$
\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C\,|z|^{1-\nu}\,. \tag{4.4}
$$

Pour l'estimation de $\dfrac{d^2\,(K(x))^{-1}}{dx^2} - \dfrac{d^2\,(K(s))^{-1}}{ds^2}$, par un calcul direct il vient

$$\begin{aligned}
&\left\| \left( \frac{d^2 \left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2} - \frac{d^2 \left(K(s)\right)^{-1}}{ds^2} \right) \psi \right\| \\
\leqslant\; & C \left( \left[ H_1(x) - H_1(s) \right] + \left[ H_2(x) - H_2(s) \right] \right) \|\psi\|_X \\
\leqslant\; & C \left| x - s \right| \|\psi\|_X \leqslant C \left| x - s \right|^{\eta} \|\psi\|_X .
\end{aligned}$$

Examinons, maintenant, l'opérateur

$$K(x)(K(x) - zI)^{-1} \frac{d}{dx} \left(K(x)\right)^{-1} .$$

Pour cela, on utilise les mêmes techniques que celles utilisées dans [39]. On considère les notations suivantes, pour $\varphi \in D\left(K(x)\right)$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left[p(y, D)\varphi\right](y) = \varphi''(y), \quad y \in [0, 1], \\
\left[b(x, D)\varphi\right](\sigma) = \left\{ \begin{array}{l} a(x)\varphi(\sigma) - b(x)\varphi'(\sigma) \;\; si \;\; \sigma = 0, \\ \varphi(\sigma) \;\; \text{si} \;\; \sigma = 1. \end{array} \right.
\end{array} \right.$$

Pour $\psi \in X$, on a par définition

$$\left\{ \begin{array}{l}
p(y, D) \left[ \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right](y) = \psi(y), \quad y \in ]0, 1[, \\
a(x) \left[ \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right](0) - b(x) \left[ \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right]'(0) = 0, \\
\left[ \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right](1) = 0,
\end{array} \right.$$

et grâce à la différentiabilité de $\left(K(x)\right)^{-1}$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l}
p(y, D) \left[ \dfrac{d}{dx} \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right](y) = 0, \quad y \in ]0, 1[, \\
a(x) \left[ \dfrac{d}{dx} \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right](0) - b(x) \left[ \dfrac{d}{dx} \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right]'(0) \\
= -a'(x) \left[ \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right](0) + b'(x) \left[ \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right]'(0), \\
\left[ \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right](1) = 0.
\end{array} \right. \tag{4.5}$$

Pour $z \in \Pi_{\theta_1 + \pi/2, r_1}$, $x \in [0, 1]$ et $\phi \in C^2[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
& (p(y, D) - zI)K(x)(K(x) - z)^{-1}\phi \\
=\; & (p(y, D) - zI) \left[ I + z(K(x) - z)^{-1} \right] \phi \\
=\; & p(y, D)\phi - z\phi + zp(y, D)(K(x) - z)^{-1}\phi \\
=\; & p(y, D)\phi.
\end{aligned}$$

Donc, en vertu de (4.5),

$$(p(y, D) - zI)K(x)(K(x) - z)^{-1} \left[ \frac{d}{dx} \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right] \tag{4.6}$$

$$= \; p(y, D) \left[ \frac{d}{dx} \left(K(x)\right)^{-1} \psi \right].$$

D'une manière similaire, on écrit

$$\begin{aligned} & b(x,D)\left[K(x)(K(x)-z)^{-1}\phi\right] \\ = \ & b(x,D)\phi + zb(x,D)(K(x)-z)^{-1}\phi \\ = \ & b(x,D)\phi, \end{aligned}$$

puisque $b(x,D)(K(x)-z)^{-1}\phi = 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} & b(x,D)\left[K(x)(K(x)-z)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right] \\ = \ & b(x,D)\left[\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Posons

$$\varphi_x = K(x)(K(x)-z)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\psi,$$

alors en additionnant (4.6), (4.7) et (4.5), il résulte

$$\begin{cases} \left(p(y,D)-zI\right)(\varphi_x)(y) = 0, \quad y\in]0,1[, \\ a(x)\,\varphi_x(0) - b(x)\varphi_x'(0) \\ = -a'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](0) + b'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right]'(0), \\ \varphi_x(1) = 0. \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \varphi_x''(y) - z\varphi_x(y) = 0, \quad y\in]0,1[, \\ a(x)\,\varphi_x(0) - b(x)\varphi_x'(0) \\ = -a'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](0) + b'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right]'(0), \\ \varphi_x(1) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

sa solution exacte $\varphi_x$ est

$$\begin{aligned} & \varphi_x(y) \\ = \ & \frac{\left(-a'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](0) + b'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right]'(0)\right)}{a(x)\sinh\sqrt{z} + b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}}\sinh\sqrt{z}(1-y) \\ = \ & \frac{1}{b(x)}\frac{\left(-a'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](0) + b'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right]'(0)\right)}{d(x)\sinh\sqrt{z} + \sqrt{z}\cosh\sqrt{z}}\sinh\sqrt{z}(1-y). \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà vu, si on pose $\sqrt{z} = \rho$,

$$\begin{aligned} & \left|\frac{\sinh\sqrt{z}(1-y)}{d(x)\sinh\sqrt{z} + \sqrt{z}\cosh\sqrt{z}}\right| \\ \leqslant \ & \frac{\cosh\operatorname{Re}(\rho)}{\left|d(x)+\operatorname{Re}(\rho)\right|\sinh\operatorname{Re}(\rho)} \leqslant \frac{C}{\left|d(x)+\operatorname{Re}(\rho)\right|} \leqslant \frac{C}{|z|^{1/2}}, \end{aligned}$$

alors

$$\|\varphi_x\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{|z|^{1/2}}. \tag{4.9}$$

On a vu aussi, que les fonctions suivantes

$$\begin{cases} K(x_1)(K(x_1)-z)^{-1}\dfrac{d}{dx_1}\left(K(x_1)\right)^{-1}\psi = \varphi_{x_1} \\ K(x_2)(K(x_2)-z)^{-1}\dfrac{d}{dx_2}\left(K(x_2)\right)^{-1}\psi = \varphi_{x_2} \end{cases}$$

vérifient

$$\begin{cases} \varphi''_{x_1}(y) - z\varphi_{x_1}(y) = 0, \quad y \in ]0,1[, \\ a\left(x_1\right)\varphi_{x_1}\left(0\right) - b(x_1)\varphi'_{x_1}\left(0\right) \\ = -a'\left(x_1\right)\left[\left(K(x_1)\right)^{-1}\psi\right](0) + b'(x_1)\left[\left(K(x_1)\right)^{-1}\psi\right]'(0), \\ \varphi_{x_1}(1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi''_{x_2}(y) - z\varphi_{x_2}(y) = 0, \quad y \in ]0,1[, \\ a\left(x_2\right)\varphi_{x_2}\left(0\right) - b(x_2)\varphi'\left(0\right) \\ = -a'\left(x_2\right)\left[\left(K(x_2)\right)^{-1}\psi\right](0) + b'(x_2)\left[\left(K(x_2)\right)^{-1}\psi\right]'(0), \\ \varphi_{x_2}(1) = 0. \end{cases}$$

Donc $\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2} = \chi$ est solution de

$$\begin{cases} \chi''(y) - z\chi(y) = 0, \quad y \in ]0,1[, \\ a\left(x_1\right)\chi\left(0\right) - b(x_1)\chi'\left(0\right) = d^1(x_1,x_2) + d^2(x_1,x_2), \\ \chi(1) = 0, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} & d^1(x_1,x_2) \\ = \; & -a'\left(x_1\right)\left[\left(K(x_1)\right)^{-1}\psi\right](0) + b'(x_1)\left[\left(K(x_1)\right)^{-1}\psi\right]'(0) \\ & +a'\left(x_2\right)\left[\left(K(x_2)\right)^{-1}\psi\right](0) - b'(x_2)\left[\left(K(x_2)\right)^{-1}\psi\right]'(0), \end{aligned}$$

et

$$d^2(x_1,x_2) = \left[a\left(x_1\right) - a\left(x_2\right)\right]\varphi_{x_2}\left(0\right) - \left[b\left(x_1\right) - b\left(x_2\right)\right]\varphi'_{x_2}\left(0\right).$$

Tenant compte de (4.8), on aura

$$\chi(y) = \frac{1}{b(x)}\frac{\left[d^1(x_1,x_2) + d^2(x_1,x_2)\right]\sinh\sqrt{z}(1-y)}{d(x)\sinh\sqrt{z} + \sqrt{z}\cosh\sqrt{z}},$$

et

$$
\begin{aligned}
& d^1(x_1,x_2) \\
= \;& -a'(x_1)\left[(K(x_1))^{-1}\psi\right](0)+b'(x_1)\left[(K(x_1))^{-1}\psi\right]'(0) \\
& +a'(x_2)\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right](0)-b'(x_2)\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right]'(0) \\
= \;& a'(x_1)\left[(K(x_2))^{-1}\psi-(K(x_1))^{-1}\psi\right](0) \\
& +[a'(x_2)-a'(x_1)]\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right](0) \\
& +b'(x_1)\left(\left[(K(x_1))^{-1}\psi\right]'-\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right]\right)(0) \\
& +[b'(x_1)-b'(x_2)]\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right]'(0),
\end{aligned}
$$

ce qui conduit, en vertu des hypothèses sur $a, b$, (4.1) et (4.2) à

$$\left|d^1(x_1,x_2)\right| \leqslant C\left|x_2-x_1\right|\|\psi\|.$$

Pour $d^2(x_1,x_2)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left|d^2(x_1,x_2)\right| &= \left|[a(x_1)-a(x_2)]\varphi_{x_2}(0)-[b(x_1)-b(x_2)]\varphi'_{x_2}(0)\right| \\
&\leqslant C\left|x_2-x_1\right|\|\psi\|.
\end{aligned}
$$

Donc, en utilisant (4.9), il vient

$$
\begin{aligned}
\|\chi\| &= \left\|\varphi_{x_1}-\varphi_{x_2}\right\| \\
&\leqslant \frac{C\left|x_2-x_1\right|\|\psi\|_X}{|(d(x)+\operatorname{Re}(\rho))|}\frac{|\sinh\sqrt{z}(1-y)|}{\sinh\operatorname{Re}(\rho)} \\
&\leqslant \frac{C\left|x_2-x_1\right|\|\psi\|_X\cosh\operatorname{Re}(\rho)}{|(d(x)+\operatorname{Re}(\rho))|\sinh\operatorname{Re}(\rho)} \\
&\leqslant \frac{C\left|x_2-x_1\right|\|\psi\|_X}{|z|^{1/2}},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
& \left\|\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}-\frac{\partial}{\partial s}(K(s)-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
\leqslant \;& \frac{C\left|x-s\right|}{|z|^{1/2}}\leqslant\frac{C\left|x-s\right|^{\eta}}{|z|^{1/2}},
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

avec $\eta\in\,]0,1[$ et $\nu+\eta-1>0$.

On vérifie les autres hypothèses d'une manière similaire à ce qui précède. Finalement tous les résultats obtenus s'appliquent au problème concret quasi-elliptique suivant (où $\lambda>0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + c(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - \lambda u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in (0,1)^2 \\ a(x)\,u(x,0) - b(x)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \ \ x \in (0,1), \\ a(x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) - b(x)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,0) = 0, \quad x \in (0,1), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1) = u(x,1) = 0, \ \ x \in (0,1), \\ u(0,y) = \varphi(y), \ \ y \in (0,1), \\ u(1,y) = \psi(y), \ \ y \in (0,1). \end{cases}$$

### 4.1.2 Exemple 2

Considérons l'espace de Banach $X = L^p(0,1)$, $(1 < p < \infty)$ muni de sa norme. On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $(-A(x))^{1/2}$ pour tout $x \in [0,1]$ par

$$\begin{cases} D\left(-(-A(x))^{1/2}\right) = \{\varphi \in W^{2,p}(0,1) : \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0, \, \varphi(1) = 0\} \\ \left(-(-A(x))^{1/2}\varphi\right)(y) = \varphi''(y), \ \ y \in (0,1). \end{cases}$$

D'où, on écrit

$$\begin{cases} D(A(x)) = \{\varphi \in W^{4,p}(0,1) : \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0 \ ; \ \varphi(1) = 0; \\ \qquad\qquad \varphi''(0) - b(x)\varphi'''(0) = 0 \text{ et } \varphi''(1) = 0\} \\ (A(x)\varphi)(y) = -\varphi^{(iv)}(y), \ \ y \in (0,1). \end{cases}$$

On suppose que $b \in C^{2,\kappa}[0,1]$ et $b(x) > 0$ dans $[0,1]$ et on définit la famille d'opérateurs linéaires bornés $(B(x))_{x\in[0,1]}$ par

$$D(B(x)) = L^p(0,1); \ (B(x)\varphi)(y) = \alpha(x)\varphi(y),$$

où $\alpha$ est une fonction dans $X$. Un calcul direct permet, pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et $\psi \in X$, de résoudre l'équation spectrale

$$-(-A(x))^{1/2}\varphi - z\varphi = \psi \in X,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} \varphi''(y) - z\varphi(y) = \psi(y), \quad y \in [0,1] \\ \varphi(0) - b(x)\varphi'(0) = 0, \, \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

On obtient

$$\left((-(-A(x))^{1/2} - zI)^{-1}\psi\right)(y) = \int_0^1 K_\rho(y,x,s)\,\psi(s)\,ds,$$

avec $\rho = \sqrt{z}$ (ici $\mathrm{Re}(\rho) > 0$) et le noyau de Green $K_\rho$ est défini par

$$K_\rho(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh\rho(1-y)\,[\sinh\rho s + b(x)\rho\cosh\rho s]}{\rho\,[\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]} & \text{si } \ 0 \leqslant s \leqslant y, \\ \dfrac{\sinh\rho(1-s)\,[\sinh\rho y + b(x)\rho\cosh\rho y]}{\rho\,[\sinh\rho + b(x)\rho\cosh\rho]} & \text{si } y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Posons

$$K(x) = -(-A(x))^{1/2}.$$

(On obtient les mêmes résultats quand on considère le paramètre $\lambda$).

L'opérateur $K(x)$ est inversible, son inverse est borné et on a

$$[(K(x))^{-1}\psi](y) = \left[-(-A(x))^{-1/2}\psi\right](y) = \int_0^1 K_0(y,x,s)\,\psi(s)\,ds,$$

avec

$$K_0(y,x,s) = -\begin{cases} \dfrac{(1-y)\,[s+b(x)]}{1+b(x)} & \text{si } \ 0 \leqslant s \leqslant y, \\ \dfrac{(1-s)\,[y+b(x)]}{1+b(x)} & \text{si } \ y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Soit $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} & -[\left((K(x_2))^{-1} - (K(x_1))^{-1}\right)\psi](y) \\ = & \int_0^1 [K_0(y,x_1,s) - K_0(y,x_1,s)]\psi(s)\,ds \\ = & \ (1-y)\int_0^y \frac{[s+b(x_2)]}{1+b(x_2)}\psi(s)\,ds \\ & -(1-y)\int_0^y \frac{[s+b(x_1)]}{1+b(x_1)}\psi(s)\,ds \\ & +[y+b(x_2)]\int_y^1 \frac{(1-s)\psi(s)}{1+b(x_2)}ds \\ & -[y+b(x_1)]\int_y^1 \frac{(1-s)\psi(s)}{1+b(x_1)}ds; \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \left\|\left[\left((K(x_2))^{-1} - (K(x_1))^{-1}\right)\psi\right](y)\right\|_X \\ \leqslant & \ (1-y)\left\|\int_0^y \frac{[b(x_1)-b(x_2)]\,s + [b(x_1)-b(x_2)]}{[1+b(x_1)]\,[1+b(x_2)]}\psi(s)\,ds\right\| \end{aligned}$$

D'où

$$\left\| \left( (K(x_2))^{-1} - (K(x_1))^{-1} \right) \psi \right\|_X \leqslant C \left| x_2 - x_1 \right| \left\| \psi \right\|_X . \tag{4.11}$$

On a aussi

$$[(K(x))^{-1} \psi]'(y) = -\int_0^y \frac{s + b(x)}{1 + b(x)} \psi(s) \, ds + \int_y^1 \frac{(1-s)}{1 + b(x)} \psi(s) \, ds.$$

Un calcul similaire à celui de l'exemple 1, permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
& [(K(x_2))^{-1} \psi]'(y) - [(K(x_1))^{-1} \psi]'(y) \\
= & - \left[ \int_0^y \frac{s + b(x_2)}{1 + b(x_2)} - \frac{s + b(x_1)}{1 + b(x_1)} \psi(s) \, ds \right] \\
& + \left[ \int_y^1 \frac{(1-s)}{1 + b(x_2)} - \frac{(1-s)}{1 + b(x_1)} \psi(s) \, ds \right] \\
= & - \left[ \int_0^y \frac{[1 + b(x_1) + s] \left( b(x_2) - b(x_1) \right)}{[1 + b(x_2)] \, [1 + b(x_1)]} \psi(s) \, ds \right] \\
& + \left[ \int_y^1 \frac{(1-s) \left( b(x_1) - b(x_2) \right)}{[1 + b(x_2)] \, [1 + b(x_1)]} \psi(s) \, ds \right].
\end{aligned}$$

Alors

$$\left| [(K(x_2))^{-1} \psi]'(y) - [(K(x_1))^{-1} \psi]'(y) \right| \leqslant C \left| x_2 - x_1 \right| \left\| \psi \right\|_X . \tag{4.12}$$

Posons $g(x) = 1/b(x)$ et écrivons

$$[\sinh \rho + b(x) \rho \cosh \rho] = b(x) \left[ g(x) \sinh \rho + \rho \cosh \rho \right] = b(x) G(x, \rho).$$

Comme dans l'exemple 1, pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, $x \in [0, 1]$, on a $G(x, \rho) \neq 0$.

D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ et $x \in [0, 1]$

$$\left| g(x) \sinh \rho + \rho \cosh \rho \right| \geqslant \left| g(x) + \operatorname{Re}(\rho) \right| \sinh \operatorname{Re}(\rho).$$

Puisque le noyau $K_\rho$ est symétrique, alors grâce au lemme de Schur (voir [20]), on obtient

$$\left\| (-(-A(x))^{1/2} - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \left( \int_0^1 \left| K_\rho(y, x, s) \right|^p ds \right)^{1/p} \leqslant \frac{C}{|z|}. \tag{4.13}$$

D'après Haase [21], il résulte que pour tout $\lambda > 0$, il existe un opérateur linéaire borné $T_\lambda \in L(X)$ tel que

$$(-Q(x))^{1/2} = (-A(x) + \lambda I)^{1/2} = (-A(x))^{1/2} + T_\lambda(x)$$

avec $\|T_\lambda(x)\|_{L(X)} \leqslant C\lambda^{1/2}$ et $C$ est indépendant de $x$. Ainsi on déduit de de cette dernière propriété et de (4.13) que $-(-Q(x))^{1/2}$ génère un semi-groupe analytique non fortement continu en 0. Regardons, maintenant, les propriétés de l'opérateur

$$\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=0} = \frac{d}{dx}\left[-(-A(x))^{-1/2}\right]_{|x=0}.$$

Pour tout $\psi \in X$ et $y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}\psi\right\}(y) &= -\int_0^1 \frac{d}{dx}\left[K_\rho(y,x,s)\right]\psi(s)\,ds \\ &= -\frac{(1-y)b'(x)}{[1+b(x)]^2}\int_0^1 (1-s)\psi(s)\,ds,\end{aligned}$$

alors

$$\left\{\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=0}\psi\right\}(y) = -\frac{(1-y)b'(0)}{[1+b(0)]^2}\int_0^1 (1-s)\psi(s)\,ds$$

et

$$\overline{D((-Q(x))^{1/2})} = \overline{D(A(x))} = X = L^p(0,1).$$

D'où

$$\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=0}(X) \subseteq \overline{D(K(0))}.$$

De même

$$\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=1}(X) \subseteq \overline{D(K(1))}.$$

Notons que, quand $\psi \in D\left(-(-A(0))^{1/2}\right) = D(K(0))$,

$$\begin{cases} \psi \in W^{2,p}([0,1]), \quad \psi(0) - b(0)\psi'(0) = 0, \\ \psi(1) = 0, \quad K(0)\psi = \psi'', \end{cases}$$

d'où (après une intégration par parties)

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d(K(x))^{-1}}{dx}_{|x=0}K(0)\psi\right\}(y) &= -\frac{(1-y)(b'(0)}{[1+b(0)]^2}\int_0^1 (1-s)\psi''(s)\,ds \\ &= \frac{(1-y)b'(0)}{[1+b(0)]^2}\left[\psi'(0)+\psi(0)\right] \\ &= \varphi(y),\end{aligned}$$

donc on peut vérifier que

$$\varphi \in W^{2,p}(0,1)\,,\ \varphi(1)=0,$$

mais

$$\varphi(0)-b(0)\varphi'(0)=\frac{b'(0)}{[1+b(0)]}\left[\psi'(0)+\psi(0)\right]\neq 0.$$

Ainsi, $\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}_{|x=0}(D(K(0))$ n'est pas inclu dans $D(K(0))$. On a seulement

$$\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}_{|x=0}(D(K(0))\subset \overline{D(K(0))},$$

et on aura la même propriété en 1. De manière similaire, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\psi\right)(y)\\
=\ & -\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}\frac{[\sinh\rho s+b(x)\rho\cosh\rho s]}{\rho\,[\sinh\rho+b(x)\rho\cosh\rho]}\psi(s)ds\\
& -\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\sinh\rho y+b(x)\rho\cosh\rho y]}{\rho\,[\sinh\rho+b(x)\rho\cosh\rho]}\int_y^1 \sinh\rho(1-s)\psi(s)ds\\
=\ & -\sinh\rho(1-y)\frac{b'(x)}{[\sinh\rho+b(x)\rho\cosh\rho]^2}\int_0^1\sinh\rho(1-s)\psi(s)ds.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\left(\int_0^1 \left|\sinh\rho(1-y)\right|^p dy\right)^{1/p}\leqslant \frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{(p\,\mathrm{Re}(\rho))^{1/p}}$$

et

$$\left|\int_0^1 \sinh\rho(1-s)\psi(s)ds\right|\leqslant\left(\int_0^1\left|\sinh\rho(1-s)\right|^q ds\right)^{1/q}\left\|\psi\right\|_{L^p(0,1)}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\right]\psi\right\|_{L^p(0,1)}\\
\leqslant\ & \left[\int_0^1\left|-\sinh\rho(1-y)\right|^p dy\right]^{1/p}\\
&\cdot\left(\left|\frac{b'(x)}{[\sinh\rho+b(x)\rho\cosh\rho]^2}\right|^p\left|\int_0^1\sinh\rho(1-s)\psi(s)ds\right|^p\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{\left(p\,\mathrm{Re}(\rho)\right)^{1/p}}\left|\frac{b'(x)}{\left[\sinh\rho+b(x)\rho\cosh\rho\right]^2}\right|\left(\int_0^1\left|\sinh\rho(1-s)\right|^q ds\right)^{1/q}\|\psi\|_{L^p(0,1)}\\
&\leqslant \left(\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{\left(p\,\mathrm{Re}(\rho)\right)^{1/p}}\right)\left(\frac{C}{\left[\left|g(x)+\mathrm{Re}\,(\rho)\right|\sinh\mathrm{Re}\,(\rho)\right]^2}\right)\left(\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{\left(q\,\mathrm{Re}(\rho)\right)^{1/q}}\right)\|\psi\|_{L^p(0,1)}\\
&\leqslant \left(\frac{e^{2\,\mathrm{Re}(\rho)}}{p^{1/p}q^{1/q}\left(\mathrm{Re}(\rho)\right)^{1/p+1/q}}\right)\left(\frac{C}{\left|g(x)+\mathrm{Re}\,(\rho)\right|\sinh\mathrm{Re}\,(\rho)}\right)\|\psi\|_{L^p(0,1)}\\
&\leqslant \frac{C}{\left|g(x)+\mathrm{Re}\,(\rho)\right|\left|\mathrm{Re}\,(\rho)\right|^{1/p+1/q}}\|\psi\|_{L^p(0,1)}\leqslant\frac{C}{\left|\sqrt{z}\right|^{1/p+1/q}}\|\psi\|_{L^p(0,1)}\\
&\leqslant \frac{C}{\left(|z|^{1/2}\right)^{1/p+1/q}}\|\psi\|_{L^p(0,1)}\leqslant\frac{C}{|z|^{1/2}}\|\psi\|_{L^p(0,1)}\,,
\end{aligned}
$$

avec $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Donc

$$
\left\|\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))}\leqslant\frac{C}{|z|^{1/2}},\tag{4.14}
$$

pour tout $z\in\Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}$. Les estimations de $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}$ s'obtiennent comme dans l'exemple 1. D'autre part, pour estimer l'opérateur

$$
K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1},
$$

on utilise les mêmes techniques que celles utilisées dans [39]. On va utiliser les notations suivantes, pour $\varphi\in D\left(K(x)\right)$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left[p(y,D)\varphi\right](y)=\varphi''(y)\,,\quad y\in[0,1],\\
\left[b(x,D)\varphi\right](\sigma)=\left\{
\begin{array}{l}
\varphi(\sigma)-b(x)\varphi'(\sigma)\ \ si\ \sigma=0,\\
\varphi(\sigma)\ \ \text{si}\ \ \sigma=1.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Pour $\psi\in X$, on a, par définition

$$
\left\{
\begin{array}{l}
p(y,D)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](y)=\psi(y),\quad y\in]0,1[,\\
\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](0)-b(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right]'(0)=0,\\
\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](1)=0,
\end{array}\right.
$$

et grâce à la différentiabilité de $\left(K(x)\right)^{-1}$, il vient

$$
\left\{
\begin{array}{l}
p(y,D)\left[\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](y)=0,\quad y\in]0,1[,\\
\left[\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](0)-b(x)\left[\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right]'(0)\\
=b'(x)\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right]'(0)\,,\\
\left[\left(K(x)\right)^{-1}\psi\right](1)=0.
\end{array}\right.
\tag{4.15}
$$

Pour $z \in \Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}$, $x \in [0,1]$ et $\phi \in W^{2,p}([0,1])$, nous avons

$$\begin{aligned} & (p(y,D)-zI)K(x)(K(x)-z)^{-1}\phi \\ = \ & (p(y,D)-zI)\left[I+z(K(x)-z)^{-1}\right]\phi \\ = \ & p(y,D)\phi - z\phi + zp(y,D)(K(x)-z)^{-1}\phi \\ = \ & p(y,D)\phi, \end{aligned}$$

Donc, en vertu de (4.15), on a

$$\begin{aligned} & (p(y,D)-zI)K(x)(K(x)-z)^{-1}\left[\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\psi\right] \\ = \ & p(y,D)\left[\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\psi\right]. \end{aligned} \tag{4.16}$$

De même

$$\begin{aligned} & b(x,D)\left[K(x)(K(x)-z)^{-1}\phi\right] \\ = \ & b(x,D)\phi + zb(x,D)(K(x)-z)^{-1}\phi \\ = \ & b(x,D)\phi, \end{aligned}$$

puisque $b(x,D)(K(x)-z)^{-1}\phi = 0$. Donc

$$\begin{aligned} & b(x,D)\left[K(x)(K(x)-z)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\psi\right] \\ = \ & b(x,D)\left[\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\psi\right]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Posons

$$\varphi_x = K(x)(K(x)-z)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\psi,$$

alors en additionnant (4.16), (4.17) et (4.15), il résulte

$$\begin{cases} (p(y,D)-zI)(\varphi_x)(y) = 0, \quad y \in ]0,1[, \\ \varphi_x(0) - b(x)\varphi_x'(0) = b'(x)\left[(K(x))^{-1}\psi\right]'(0), \\ \varphi_x(1) = 0, \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \varphi_x''(y) - z\varphi_x(y) = 0, \quad y \in ]0,1[, \\ \varphi_x(0) - b(x)\varphi_x'(0) = b'(x)\left[(K(x))^{-1}\psi\right]'(0), \\ \varphi_x(1) = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Sa solution $\varphi_x$ est donnée par

$$\begin{aligned}\varphi_x(y) &= \frac{b'(x)\left[(K(x))^{-1}\psi\right]'(0)}{\sinh\sqrt{z}+b(x)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}}\sinh\sqrt{z}(1-y)\\ &= \frac{1}{b(x)}\frac{\left(b'(x)\left[(K(x))^{-1}\psi\right]'(0)\right)}{g(x)\sinh\sqrt{z}+\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}}\sinh\sqrt{z}(1-y),\end{aligned}$$

comme nous l'avons déjà vu, si on pose $\sqrt{z}=\rho$, alors

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\sinh\sqrt{z}(1-y)}{g(x)\sinh\sqrt{z}+\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}}\right|\\ \leqslant\ & \frac{\cosh\operatorname{Re}(\rho)}{|g(x)+\operatorname{Re}(\rho)|\sinh\operatorname{Re}(\rho)}\leqslant\frac{C}{|g(x)+\operatorname{Re}(\rho)|}\leqslant\frac{C}{|z|^{1/2}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\varphi_x\|_{L^p(0,1)} &\leqslant \frac{C\|\psi\|_X}{|(g(x)+\rho)|}\frac{1}{\sinh\operatorname{Re}(\rho)}\left(\int_0^1\left|\sinh\sqrt{z}(1-y)\right|^p dy\right)^{1/p}\\ &\leqslant \frac{C\|\psi\|_X}{|z|^{1/2}}\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^{1/p}}\leqslant\frac{C\|\psi\|_X}{|z|^{1/2p+1/2}}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Ainsi

$$\left\|K(x)(K(x)-z)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\psi\right\|_{L^p(0,1)}\leqslant\frac{C}{|z|^{1/2p+1/2}}.$$

On a vu, aussi, que les fonctions suivantes (voir exemple 1)

$$\begin{cases}K(x_1)(K(x_1)-z)^{-1}\dfrac{d}{dx_1}(K(x_1))^{-1}\psi=\varphi_{x_1},\\ K(x_2)(K(x_2)-z)^{-1}\dfrac{d}{dx_2}(K(x_2))^{-1}\psi=\varphi_{x_2},\end{cases}$$

vérifient

$$\begin{cases}\varphi_{x_1}''(y)-z\varphi_{x_1}(y)=0, \quad y\in]0,1[,\\ \varphi_{x_1}(0)-b(x_1)\varphi_{x_1}'(0)=b'(x_1)\left[(K(x_1))^{-1}\psi\right]'(0),\\ \varphi_{x_1}(1)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_{x_2}''(y)-z\varphi_{x_2}(y)=0, \quad y\in]0,1[,\\ \varphi_{x_2}(0)-b(x_2)\varphi'(0)=b'(x_2)\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right]'(0),\\ \varphi_{x_2}(1)=0.\end{cases}$$

Donc $\varphi_{x_1}-\varphi_{x_2}=\chi^*$ est une solution de

$$\begin{cases}(\chi^*)''(y)-z\chi^*(y)=0, \quad y\in]0,1[,\\ \chi^*(0)-b(x_1)(\chi^*)'(0)=d^1(x_1,x_2)+d^2(x_1,x_2),\\ \chi^*(1)=0,\end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} d^1(x_1,x_2) &= b'(x_1)\left[(K(x_1))^{-1}\psi\right]'(0) - b'(x_2)\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right]'(0)\,, \\ d^2(x_1,x_2) &= -[b\,(x_1) - b\,(x_2)]\varphi'_{x_2}(0)\,. \end{aligned}$$

Alors, de (4.8) on déduit

$$\chi^*(y) = \frac{1}{b(x)} \frac{[d^1(x_1,x_2) + d^2(x_1,x_2)]\sinh\sqrt{z}(1-y)}{g(x)\sinh\sqrt{z} + \sqrt{z}\cosh\sqrt{z}},$$

et

$$\begin{aligned} d^1(x_1,x_2) &= b'(x_1)\left[(K(x_1))^{-1}\psi\right]'(0) - b'(x_2)\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right]'(0) \\ &= b'(x_1)\left(\left[(K(x_1))^{-1}\psi\right]' - \left[(K(x_2))^{-1}\psi\right]\right)(0) \\ &\quad + [b'(x_1) - b'(x_2)]\left[(K(x_2))^{-1}\psi\right]'(0)\,, \end{aligned}$$

ce qui conduit, en vertu des hypothèses sur $a, b$, (4.11) et (4.12) à

$$\left|d^1(x_1,x_2)\right| \leqslant C\,|x_2 - x_1|\,\|\psi\|_X\,.$$

Pour $d^2(x_1,x_2)$, on obtient également

$$\left|d^2(x_1,x_2)\right| \leqslant C\,|x_2 - x_1|\,\|\psi\|_X\,.$$

Donc, de (4.19), il résulte que

$$\begin{aligned} \|\chi^*\| &= \left\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\right\| \\ &\leqslant \frac{C\,|x_2 - x_1|}{|g(x) + \mathrm{Re}\,(\rho)|\sinh\mathrm{Re}\,(\rho)} \left(\int_0^1 \left|\sinh\sqrt{z}(1-y)\right|^p dy\right)^{1/p} \|\psi\|_X \\ &\leqslant \frac{C\,|x_2 - x_1|}{|z|^{1/2p+1/2}}\|\psi\|_X \leqslant \frac{C\,|x_2 - x_1|^\eta}{|z|^{1/2p+1/2}}\|\psi\|_X\,, \end{aligned}$$

pour $0 < \eta \leqslant 1$, ce qui implique que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}(K(x) - zI)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s}(K(s) - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C\,|x - s|^\eta}{|z|^\nu},$$

avec $\eta \in ]0,1]$ et $\nu + \eta - 1 > 0$.

De la même manière on vérifie les autres hypothèses. Finalement tous les résultats obtenus s'appliquent au problème concret quasi-elliptique suivant (où $\lambda > 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + c(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - \lambda u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in (0,1)^2 \\ u(x,0) - b(x)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \ \ x \in (0,1), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) - b(x)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,0) = 0, \quad x \in (0,1), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1) = u(x,1) = 0, \ \ x \in (0,1), \\ u(0,y) = \varphi(y), \ \ y \in (0,1), \\ u(1,y) = \psi(y), \ \ y \in (0,1). \end{cases}$$

## 4.2 Cas d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

### 4.2.1 Exemple 1

Considérons l'espace de Banach $X = C\left(\overline{\Omega}\right)$, où $\Omega$ (de frontière $\partial\Omega$) est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Pour une fonction régulière $u : \Omega \to \mathbb{C},\ y \mapsto u(y_1, y_2, ..., y_n)$, on a l'opérateur différentiel suivant (avec coefficients à valeurs complexes):

$$\begin{cases} E(x,y,D)\,u(y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y)\,D_i D_j u(y) \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,y)\,D_i u(y) + c(x,y)\,u(y), (x,y) \in [0,1] \times \overline{\Omega}, \end{cases}$$

et l'opérateur différentiel de bord (avec coefficients à valeurs complexes):

$\Gamma(x,s,D)\,u(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x,s)\,D_i u(s) + e(x,s)\,u(s), (x,s) \in (0,1) \times \partial\Omega.$

On suppose que les coefficients

$$a_{ij}, b_i, c : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C} \ \text{ et } \quad d_i, e : [0,1] \times \partial\Omega \to \mathbb{C},$$

vérifient les hypothèses suivantes :

$(A.1)$ $\exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in [0,1] \times \overline{\Omega}, \forall \xi = (\xi_1, \xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \delta |\xi|^2,$$

$(A.2)$ $\forall (x,s) \in [0,1] \times \partial\Omega,$

$$\operatorname{Im} d_i(x,s) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i(x,s)\,v_i(s) \neq 0,$$

où le vecteur $v(s) = (v_1(s), v_2(s), ..., v_n(s))$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ en $s$,

$$(A.3)\quad \begin{cases} a_{ij}(x,.)\,, b_i(x,.)\,, c(x,.) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) & \text{uniformément en } x \in [0,1] \text{ et} \\ d_i(x,.)\,, e(x,.) \in C^1(\partial\Omega) \text{ uniformément en } x \in [0,1]\,, \end{cases}$$

$$(A.4)\quad \begin{cases} a_{ij}(.,y)\,, b_i(.,y)\,, c(.,y) \in C^\sigma([0,1])\,, 0<\sigma<1, \text{ uniformément en } y, \\ d_i(.,y)\,, e(.,y) \in C^{2,\mu}([0,1])\,, \mu \in \,]0,1[ \text{ uniformément en } y. \end{cases}$$

Maintenant, considérons le problème concret suivant (où $\lambda > 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \beta(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - E^2(x,y,D)\,u(x,y) - \lambda u(x,y) = f(x,y)\,, \\ \Gamma(x,s,D)\,u(x,s) = 0, \;\; \Gamma'(x,s,D)\,u(x,s) = 0, \; (x,s) \in [0,1]\times\partial\Omega, \\ u(0,y) = \varphi(y)\,, \;\; y \in \overline{\Omega}, \\ u(1,y) = \psi(y)\,, \;\; y \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $\left((-A(x))^{1/2}\right)_{x\in[0,1]}$ par

$$\begin{cases} D\left(-(-A(x))^{1/2}\right) = \left\{u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{2,q}(\Omega)\,, q > n : E(x,.,D)\,u \in C\left(\overline{\Omega}\right)\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left.\text{et } \Gamma(x,.,D)\,u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}, \\ \left(-(-A(x))^{1/2}u\right)(y) = E(x,y,D)\,u(y)\,, \;\; y \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Posons

$$K(x) = -(-A(x))^{1/2}.$$

Notons que les domaines $D\left(-(-A(x))^{1/2}\right)$ (de même pour $D(A(x))$) dépendent de $x$ et ils ne sont pas denses dans $X$, puisque les conditions aux limites se réduisent à celles de Dirichlet si $d_i(x,y) \equiv 0$ dans $[0,1]\times\partial\Omega$, $i = 1,...,n$.

On définit la famille d'opérateurs linéaires $(B(x))_{x\in[0,1]}$ par

$$D(B(x)) = X; \quad (B(x)\,\varphi)(y) = \beta(x)\varphi(y).$$

où $\beta$ est une fonction dans $X$. Le théorème suivant nous sera très utile. Pour cela, on considère la fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec support contenu dans $B(0,1)$ et $\psi = 1$ dans $B(0,1/2)$. Pour chaque $x_0 \in \overline{\Omega}$ et $r > 0$, on définit la fonction

$$\psi_{r,x_0}(x) = \psi\left(\frac{x-x_0}{r}\right) \quad \text{et} \quad M_{r,x_0} = B(x_0,r)\cap\Omega.$$

**Théorème 4.2.1** *Sous les hypothèses* $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ *et* $(A.4)$, *il existe* $\lambda_0 > 0$, $\theta_0 \in \,]\pi/2,\pi[$, $r_0 > 0$ *et* $C_0 > 0$ *tels que, pour chaque* $K$, *suffisamment grand, le problème*

$$\begin{cases} E(x,.,D)\,u - zu = f, \; in \; \Omega, \\ \Gamma(x,.,D)\,u = g, \quad on \; \partial\Omega, \\ f \in L^q(\Omega)\,, \quad g \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)\,, \end{cases} \tag{4.21}$$

*a une solution unique* $u(x,.) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$*, qui vérifie l'inégalité suivante pour chaque* $z$ *dans le secteur* $\sum_{\theta_0,\lambda_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant \lambda_0,\ \arg|z-\lambda_0| \leqslant \theta_0\}$ *et* $r \leqslant r_z = (Kr_0/2)\,|z|^{-1/2}$ :

$$\begin{aligned} & |z|\,\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + |z|^{1/2}\,\|Du\|_{C(\overline{\Omega})} + |z|^{n/2q} \sup_{x_0\in\overline{\Omega}} \left\|D^2u\right\|_{L^q\left(M_{r,x_0}\right)} \\ \leqslant\ & C_0\,|z|^{n/2q} \left\{ \sup_{x_0\in\overline{\Omega}} \|f\|_{L^q\left(M_{2r,x_0}\right)} + \sup_{x_0\in\overline{\Omega}} \inf_{w} \left\{ \left\|w.\psi_{2r,x_0}\right\|_{W^{1,q}\left(M_{2r,x_0}\right)} \right\} \right\}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

*où* $w = g$ *sur* $\partial\Omega$.

**Preuve.** Voir la preuve dans Stewart [35], p. 306. ■

La première conséquence de ce théorème est donnée par le résultat suivant:

**Proposition 4.2.1** *Sous les hypothèses* $(A.1)$*,* $(A.2)$*,* $(A.3)$ *et* $(A.4)$*, il existe* $\lambda_0 > 0$*,* $\theta_0 \in \left]\pi/2, \pi\right[$ *tels que* $\sum_{\theta_0,\lambda_0} \subseteq \rho(A(x))$ *et la famille* $\left((-A(x))^{1/2}\right)$ *définie par (4.20) vérifie l'estimation*

$$\left\|(K(x)-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|z|},$$

*pour tout* $z \in \sum_{\theta_0,\lambda_0}$ *et tout* $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$.

**Preuve.** La preuve est similaire à celle faite dans [1], p. 60. ■

D'autre part, posons

$$u(x) = (K(x)-z)^{-1} f,$$

alors le théorème 4.2.1 conduit à

$$|z|\,\|u(x)\|_{C(\overline{\Omega})} + |z|^{1/2}\,\|Du(x)\|_{C(\overline{\Omega})} + \sup_{x_0\in\overline{\Omega}} \left\|D^2u(x)\right\|_{L^q\left(M_{r_\lambda,x_0}\right)} \leqslant C\,\|f\|_{C(\overline{\Omega})}. \tag{4.23}$$

**Proposition 4.2.2** *Soit* $\lambda \in \sum_{\theta_0,\lambda_0}$*. Sous les hypothèses* $(A.1)$*,* $(A.2)$*,* $(A.3)$ *et* $(A.4)$*, il existe* $\lambda_0 > 0$*,* $\theta_0 \in \left]\pi/2, \pi\right[$ *tels que la fonction* $u(x) = (K(x)-z)^{-1} f$ *est différentiable dans* $C\left(\overline{\Omega}\right)$ *pour chaque* $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ *et vérifie l'hypothèse (2.10), pour tout* $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$.

**Preuve.** Fixons $x, s \in [0,1]$, alors $u(x) - u(s)$ est une solution de

$$\begin{cases} [E(x,.,D) - \lambda]\,(u(x) - u(s)) = [E(x,.,D) - E(s,.,D)]\,u(s), \text{ dans } \Omega, \\ \Gamma(x,.,D)\,(u(x)-u(s)) = -\left[\Gamma(x,.,D) - \Gamma(s,.,D)\right]u(s), \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.24}$$

Tenant compte du théorème 4.2.1, (4.23) et $(A.3)$, il vient

$$\|u(x) - u(s)\|_{C(\overline{\Omega})} = O(|x-s|)\,\|f\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad \text{quand } s \to x. \tag{4.25}$$

D'autre part, soit $E'(x,y,D)$ et $\Gamma'(x,y,D)$ les opérateurs différentiels dont les coefficients sont les dérivées par rapport à $x$, correspondantes aux opérateurs $E(x,y,D)$ et $\Gamma(x,y,D)$ respectivement. Soit $h(x)$ la solution du problème suivant, similaire au problème (4.21):

$$\begin{cases} (E(x,.,D)u - z)\,h(x) = E'(x,.,D)\,u(x)\,, \text{ dans } \Omega, \\ \Gamma(x,.,D)\,h(x) = -\Gamma'(x,.,D)\,u(x)\,, \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.26}$$

Considérons la fonction

$$v(x,s) = \frac{u(x) - u(s)}{x-s} - h(x)\,.$$

en utilisant (4.25), il vient

$$|\lambda|\,\|v(x,s)\|_{C(\overline{\Omega})} = o(1)\,\|f\|_{C(\overline{\Omega})}\,, \quad \text{quand } s \to x.$$

d'où $\dfrac{du(x)}{dx}$ existe dans $C(\overline{\Omega})$ et

$$h(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(K(x)-z)^{-1}f.$$

Aussi, grâce au théorème 4.2.1, (4.23), on obtient

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-z)^{-1}f\right\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant \frac{C}{|z|}\|f\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant \frac{C}{|z|^{\nu}}\|f\|_{C(\overline{\Omega})}\,, \nu \in \left]1/2,1\right].$$

L'estimation de $\left\|\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-z)^{-1}f\right\|_{L(X)}$ s'obtient de la même manière que celle faite dans Labbas [24], P. 131-133. ■

**Proposition 4.2.3** *Sous les hypothèses* (A.1), (A.2), (A.3) *et* (A.5), *la famille* $\left((-A(x))^{1/2}\right)_{x\in[0,1]}$ *définie par (4.27) vérifie*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-z_0)^{-1}\varphi - \frac{\partial}{\partial s}(K(s)-z_0)^{-1}\varphi\right\| \leqslant C\,|x-s|^{\eta}\,\|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})}\,.$$

**Preuve.** voir [1], p. 62. ■

**Remarque 4.2.1** *Cas particulier, pour* $X = C(\overline{\Omega})$, *où* $\Omega$ *est un ouvert borné et régulier de* $\mathbb{R}^2$ *de frontière* $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *et* $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. *En considérant la famille d'opérateurs linéaires fermés* $\left((-A(x))^{1/2}\right)_{x\in[0,1]}$

$$\begin{cases} D\left(-(-A(x))^{1/2}\right) = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,q}(\Omega)\,,\ q>n : \triangle u \in C(\overline{\Omega}) \right. \\ \qquad\qquad \left. et\ u = 0\ sur\ \Gamma_1; \quad -\partial u/\partial\nu + \alpha(x,.)\,u = 0\ sur\ \Gamma_2\right\} \\ \left(-(-A(x))^{1/2}u\right)(y) = \triangle u(y)\,,\ \ y \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

*où la fonction* $\alpha(x,.) \in C^{2,\theta}([0,1])$ *uniformément en* $s, y \in \Omega$. *Ici, on considère* $(A(x)u)(y) = -\triangle^2 u(y)$. *Cet exemple peut être traité de la même manière que celle faite dans [24], p.126.*

### 4.2.2 Exemple 2

Soit $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, où $\Omega$ (de frontière $\partial\Omega$) est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Pour une fonction régulière $u : \Omega \to \mathbb{C}$, $y \mapsto u(y_1, y_2, ..., y_n)$, on considère l'opérateur différentiel suivant (avec coefficients à valeurs complexes):

$$\begin{cases} E(x,y,D)\,u(y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y)\,D_iD_ju(y) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,y)\,D_iu(y) + c(x,y)\,u(y), \\ (x,y) \in [0,1] \times \overline{\Omega}, \end{cases}$$

et l'opérateur différentiel de bord (avec coefficients à valeurs complexes):

$$\begin{cases} \Gamma(x,s,D)\,u(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x,s)\,D_iu(s) + e(x,s)\,u(s), \\ (x,s) \in (0,1) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

On suppose que les coefficients

$$a_{ij}, b_i, c : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C} \ \text{ et } \ d_i, e : [0,1] \times \partial\Omega \to \mathbb{C},$$

vérifient les hypothèses $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ utilisées dans l'exemple 1 (cas où $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$) et l'hypothèse suivante :

$$\exists\sigma > 0,\ K > 0 : \forall x_1, x_2 \in [0,1]\,, y \in \Omega,\ s \in \partial\Omega,$$

$$(A.5)\ \begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x_1,y) - a_{ij}(x_2,y)| + \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i(x_1,y) - b_i(x_2,y)| \\ + |c(x_1,y) - c(x_2,y)| \leqslant K\,|x_1 - x_2|^{\sigma}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} |d_i(x_1,s) - d_i(x_2,s)| + |e(x_1,s) - e(x_2,s)| \leqslant K\,|x_1 - x_2|, \\ \sum\limits_{i,k=1}^{n} |D_kd_i(x_1,s)| + \sum\limits_{k=1}^{n} |D_ke(x_1,s)| \leqslant K. \end{cases}$$

On considère le problème concret suivant (où $\lambda > 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \delta(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - E^2(x,y,D)\,u(x,y) - \lambda u(x,y) = f(x,y), \\ \Gamma^{(i)}(x,s,D)\,u(x,s) = 0,\ i = 1,2,\ \ (x,s) \in [0,1] \times \partial\Omega, \\ u(0,y) = \varphi(y),\ \ y \in \overline{\Omega}, \\ u(1,y) = \psi(y),\ \ y \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

et on définit la famille d'opérateurs linéaires fermés $\left((-A(x))^{1/2}\right)_{x\in[0,1]}$ par

$$\begin{cases} D\left(-(-A(x))^{1/2}\right) = \{\phi \in W^{2,p}(\Omega) : \Gamma(x,s,D)\,\phi = 0,\ s \in \partial\Omega\} \\ \left(-(-A(x))^{1/2}\phi\right)(y) = E(x,y,D)\,\phi(y)\,, \quad y \in \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{4.27}$$

Ici, les domaines $D\left(-(-A(x))^{1/2}\right)$ (de même pour $D(A(x))$) dépendent de $x$ et ils sont denses dans $X$, grâce aux conditions aux bord dépendant de $x$. On définit, aussi, la famille d'opérateurs linéaires bornés $(B(x))_{x\in[0,1]}$ par

$$D(B(x)) = X;\ \ (B(x)\,\varphi)(y) = \delta(x)\varphi(y).$$

où $\delta$ est une fonction dans $X$.

**Théorème 4.2.2** *Sous les hypothèses* $(A.1)$, $(A.2)$ *et* $(A.3)$, *il existe* $\phi \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ *et* $\omega = \omega(p) \geqslant 0$ *tels que, pour chaque* $z \in \sum_{\phi,\omega} = \{z \in \mathbb{C} : \arg(|z-\omega|) \leqslant \phi\}$ *et* $x \in [0,1]$, *le problème*

$$\begin{cases} E(x,.,D)\,u - zu = f \in L^p(\Omega), \\ \Gamma(x,.,D)\,u = g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega), \end{cases}$$

*a une solution unique* $u(x,.) \in W^{2,p}(\Omega)$. *De plus, il existe* $C(p) > 0$, *telle que*

$$\begin{aligned} & |z-\omega|\,\|u\|_{L^p(\Omega)} + |z-\omega|^{1/2}\,\|Du\|_{L^p(\Omega)} + \left\|D^2u\right\|_{L^p(\Omega)} \\ \leqslant\ & C(p)\left\{\|f\|_{L^p(\Omega)} + \inf_{w\in W^{1,p}(\Omega)}\left\{|z-\omega|^{1/2}\,\|w\|_{L^p(\Omega)} + \|Dw\|_{L^p(\Omega)}\right\}\right\}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

*où* $w = g$ *sur* $\partial\Omega$.

**Preuve.** Voir S. Agmon [2] où H. Tanabe [36]. ■

Une conséquence de ce théorème est le résultat suivant:

**Lemme 4.2.1** *Sous les hypothèses* $(A.1)$, $(A.2)$ *et* $(A.3)$, *la famille d'opérateurs linéaires* $\left((-A(x))^{1/2}\right)$ *définie par (4.27) vérifie l'estimation*

$$\left\|(K(x) - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|z|},$$

*avec* $\lambda_0 = \omega$, $C = C(p)$, $\omega = \lambda$ *et* $\theta_{1+\pi/2} = \phi$.

**Proposition 4.2.4** *Sous les hypothèses* $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ *et* $(A.5)$, *la famille d'opérateurs linéaires* $\left((-A(x))^{1/2}\right)_{x\in[0,1]}$ *définie par (4.27) vérifie les hypothèses (2.10) et (2.11), où* $C = C(p)$.

**Preuve.** Voir A.Yagi ([39], [38]). ■