3

Régularité maximale de la solution

Sommaire

3.1 Préliminaire

Sachant qu'on a toujours

$$D_{K(0)}\left(\theta;+\infty\right) \subset \overline{D(K(0))}; \quad D_{K(1)}\left(\theta;+\infty\right) \subset \overline{D(K(1))}.$$

Pour traiter la régularité maximale de la solution stricte du problème (2.1)-(2.2), en plus des hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)$\sim$(2.13), on imposera les hypothèses suivantes:

$$B(0)(X) \subset D_{K(0)}\left(\theta;+\infty\right); \quad B(1)(X) \subset D_{K(1)}\left(\theta;+\infty\right), \tag{3.1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}\left(D(K(0))\right) \subset D_{K(0)}\left(\theta;+\infty\right), \\ \\ \dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=1}\left(D(K(1)\right) \subset D_{K(1)}\left(\theta;+\infty\right). \end{array}\right. \tag{3.2}$$

3.2 Résultat principal de régularité maximale

On va démontrer le résultat fondamental de la régularité maximale de la solution stricte du problème (2.1)-(2.2), c'est le :

Théorème 3.2.1 *Soit* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $(0<\theta<1)$, $\varphi \in D((K(0))^2)$ *et* $\psi \in D((K(1))^2)$. *Sous les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.13), (3.1) et (3.2), il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda^*$, *la solution stricte* u *écrite dans la représentation (2.22) satisfait la régularité*

$$u''(.),\ B(.)\,u'(.),\ Q(.)\,u(.) \in C^{\beta}([0,1];X)$$

où

$$\beta = \min(\theta, \eta+\nu-1)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} f(0) + (K(0))^2\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0}\,K(0)\varphi \in D_{K(0)}(\theta,+\infty), \\ \\ f(1) + (K(1))^2\,\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=1}\,K(1)\psi \in D_{K(1)}(\theta,+\infty). \end{cases}$$

On peut énoncé aussi ce théorème sous la forme suivante:

Théorème 3.2.2 *Soit* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $(0<\theta<1)$, $\varphi \in D(A(0))$ *et* $\psi \in D(A(1))$. *Sous les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.13), (3.1) et (3.2), il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda^*$, *la solution stricte* u *écrite dans la représentation (2.22) satisfait la régularité*

$$u''(.),\ B(.)\,u'(.),\ Q(.)\,u(.) \in C^{\beta}([0,1];X)$$

où

$$\beta = \min(\theta, \eta+\nu-1)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}(\lambda - A(x))^{-1/2}_{|x=0}\,(\lambda - A(0))^{1/2}\,\varphi \in D_{A(0)}(\theta/2,+\infty), \\ \\ f(1) - A(1)\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}(\lambda - A(x))^{-1/2}_{|x=1}\,(\lambda - A(1))^{1/2}\,\psi \in D_{A(1)}(\theta/2,+\infty). \end{cases}$$

Preuve. Montrons que

$$u''(.),\ B(.)\,u'(.),\ Q(.)\,u(.) \in C^{\beta}([0,1];X).$$

On commence par l'étude de l'höldérianité du terme $Q\left(.\right)u\left(.\right)$. D'abord, on rappelle que

$$\begin{cases} f^*(0) = f(0) + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi + \Phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi), \\ \\ f^*(1) = f(1) + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=1} K(1)\psi + \Phi_1^*(\psi) + r_1(f^*, \varphi), \end{cases}$$

où (voir proposition 2.6.2)

$$\begin{array}{rcl} \Phi_0^*(\varphi),\ r_0(f^*, \psi) & \in & D_{K(0)}\left(\theta; +\infty\right) \subset \overline{D(K(0))}, \\ \Phi_1^*\left(\psi\right),\ r_1(f^*, \varphi) & \in & D_{K(1)}\left(\theta; +\infty\right) \subset \overline{D(K(1))}. \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} Q\left(x\right)u\left(x\right) & = & -(K(x))^2 u(x) \\ & = & -(K(x))^2\left[v\left(x, f^*\right) + d_0\left(x\right)\varphi + d_1\left(x\right)\psi + m\left(x, f^*\right)\right] \\ & = & -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*\left(s\right) - f^*\left(x\right))ds \\ & & -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^1 K(x)e^{(s-x)K(x)}(f^*\left(s\right) - f^*\left(x\right))ds \\ & & +f^*\left(x\right) - \dfrac{1}{2}e^{xK(x)}f^*\left(x\right) - \dfrac{1}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*\left(x\right) \\ & & -(K(x))^2 Y\left(x\right)e^{xK(x)}\varphi + (K(x))^2 Y\left(x\right)e^{(2-x)K(x)}\varphi \\ & & -(K(x))^2 Y\left(x\right)e^{(1-x)K(x)}\psi + (K(x))^2 Y\left(x\right)e^{(1+x)K(x)}\psi \\ & & +\dfrac{Y\left(x\right)}{2}K(x)\displaystyle\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}\left(f^*\left(s\right) - f^*\left(0\right)\right)ds \\ & & -\dfrac{e^{2(1-x)K(x)}Y\left(x\right)}{2}K(x)\displaystyle\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}\left(f^*\left(s\right) - f^*\left(0\right)\right)ds \\ & & +\dfrac{Y\left(x\right)}{2}K(x)\displaystyle\int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)}\left(f^*\left(s\right) - f^*\left(1\right)\right)ds \\ & & -\dfrac{e^{2xK(x)}Y\left(x\right)}{2}K(x)\displaystyle\int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)}\left(f^*\left(s\right) - f^*\left(1\right)\right)ds \\ & & +\dfrac{Y\left(x\right)}{2}e^{(x+1)K(x)}f^*\left(0\right) - \dfrac{e^{2(1-x)K(x)}Y\left(x\right)}{2}e^{(x+1)K(x)}f^*\left(0\right) \\ & & -\dfrac{Y\left(x\right)}{2}e^{xK(x)}f^*\left(0\right) + \dfrac{e^{2(1-x)K(x)}Y\left(x\right)}{2}e^{xK(x)}f^*\left(0\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{Y(x)}{2}e^{(2-x)K(x)}f^*(1)-\frac{e^{2xK(x)}Y(x)}{2}e^{(2-x)K(x)}f^*(1)\\
&-\frac{Y(x)}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(1)+\frac{e^{2xK(x)}Y(x)}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(1)\\
=\;&\sum_{i=1}^{21}\triangle_i(x).
\end{aligned}$$

Ici on a remplacé $U_0(x)$ et $U_1(x)$ écrits dans $d_0(x)\varphi$, $d_1(x)\psi$ et $m(x,f^*)$ par

$$U_0(x)=(I-e^{2(1-x)K(x)}),\quad U_1(x)=(I-e^{2xK(x)}).$$

Regardons l'höldérianité de $\triangle_1(x)$. Soit $0\leqslant\tau<x\leqslant 1$. D'après Acquistapace et Terreni [1], p. 38-39, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\triangle_1(x)-\triangle_1(\tau)\\
=\;&-\frac{1}{2}\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau K(\tau)e^{(\tau-s)K(\tau)}(f^*(s)-f^*(\tau))ds\\
=\;&-\frac{1}{2}\int_\tau^x K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds\\
&-\frac{1}{2}\int_0^\tau\left[K(x)e^{(x-s)K(x)}-K(\tau)e^{(x-s)K(\tau)}\right](f^*(s)-f^*(x))ds\\
&-\left[e^{xK(\tau)}-e^{\tau K(\tau)}\right](f^*(\tau)-f^*(x))\\
&-\frac{1}{2}\int_0^\tau\left[K(\tau)e^{(x-s)K(\tau)}-K(\tau)e^{(\tau-s)K(\tau)}\right](f^*(s)-f^*(\tau))ds.
\end{aligned}$$

Grâce à la formule (3.11) utilisée dans [1], p. 38-39, on obtient

$$\triangle_1\in C^\beta([0,1];X).$$

Traitons maintenant l'höldérianité de $\triangle_4(x)+\triangle_6(x)+\triangle_{16}(x)$. La somme $\triangle_5(x)+\triangle_8(x)+\triangle_{20}(x)$ peut être traitée de la même manière au voisinage de 1. Par le calcul fonctionnel de Dunford, on écrit

$$\begin{aligned}
\triangle_4(x)&=-\frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(x)\\
&=-\frac{1}{2}e^{xK(x)}(f^*(x)-f^*(0))-\frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(f^*(x)-f^*(0)\right)dz \\
&\quad +\frac{1}{4i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(0)\,dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_6(x) &= -(K(x))^2 Y(x)\, e^{xK(x)}\varphi \\
&= \frac{Y(x)}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\
&= \frac{Y(x)}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left((K(x)-zI)^{-1}-(K(0)-zI)^{-1}\right)\varphi dz \\
&\quad +\frac{Y(x)}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\
&= \frac{Y(x)}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left((K(x)-zI)^{-1}-(K(0)-zI)^{-1}\right)\varphi dz \\
&\quad -Y(x)\, e^{xK(0)}\left(K(0)\right)^2\varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_{16}(x) &= -\frac{Y(x)}{2} e^{xK(x)} f^*(0) \\
&= \frac{Y(x)}{4i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(0)\,dz,
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \triangle_4(x)+\triangle_6(x)+\triangle_{16}(x) \\
={}& -\frac{1}{2}e^{xK(x)}\left(f^*(x)-f^*(0)\right)-\frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(0) \\
& +\frac{Y(x)}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left((K(x)-zI)^{-1}-(K(0)-zI)^{-1}\right)\varphi dz \\
& -Y(x)\, e^{xK(0)}\left(K(0)\right)^2\varphi-\frac{Y(x)}{2}e^{xK(x)}f^*(0) \\
={}& \sum_{i=1}^{5} I_i(x).
\end{aligned}$$

Concernant le premier terme $I_1(x)$, posons

$$g^*(x) = f^*(x)-f^*(0), \qquad g^*(0)=0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \frac{1}{4i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1} g^*(x)\,dz \\
&= \frac{1}{4i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left[\left(K(x)-zI\right)^{-1}-\left(K(0)-zI\right)^{-1}\right] g^*(x)\,dz \\
&\quad +\frac{1}{4i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1} g^*(x)\,dz \\
&= I_{11}(x)+I_{12}(x)\,.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& I_{11}(x)-I_{11}(\tau) \\
= {} & \frac{1}{4i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(\int_0^x \frac{\partial}{\partial r}\left(K(r)-zI\right)^{-1} dr\right)\left(g^*(x)-g^*(\tau)\right) dz \\
& +\frac{1}{4i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(\int_\tau^x \frac{\partial}{\partial r}\left(K(r)-zI\right)^{-1} dr\right) g^*(\tau)\,dz \\
& +\frac{1}{4i\pi}\int_{\Gamma_1}\left(\int_\tau^x z e^{rz} dr\right)\left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial r}\left(K(r)-zI\right)^{-1} dr\right) g^*(\tau)\,dz \\
= {} & (a_1)+(a_2)+(a_3)\,.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|(a_1)\|_X \leqslant C\,(x-\tau)^\beta \|g^*\|_{C^\beta(X)}\,, \|(a_2)\|_X \leqslant C\,(x-\tau)^\nu \|g^*\|_{C(X)}\,,$$

$$\|(a_3)\|_X \leqslant C\,(x-\tau)^\nu \|g^*\|_{C(X)}\,.$$

Pour le terme $I_{12}(x)$, on écrit

$$\begin{aligned}
I_{12}(x)-I_{12}(\tau) &= \frac{1}{4i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1}\left(g^*(x)-g^*(\tau)\right) dz \\
&\quad +\frac{1}{4i\pi}\int_{\Gamma_1}\left(\int_\tau^x z e^{rz} dr\right)\left(K(0)-zI\right)^{-1} g^*(\tau)\,dz \\
&= (\gamma_1)+(\gamma_2)\,.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\|(\gamma_1)\|_X \leqslant C\,(x-\tau)^\beta \|g^*\|_{C^\beta(X)}\,, \|(\gamma_2)\|_X \leqslant C\,(x-\tau)^\beta \|f^*\|_{C^\beta(X)}\,.$$

D'autre part, écrivons

$$
\begin{aligned}
& I_2(x) + I_4(x) + I_5(x) \\
= \; & -\frac{1}{2} e^{xK(x)} f^*(0) - Y(x) e^{xK(0)} (K(0))^2 \varphi - \frac{Y(x)}{2} e^{xK(x)} f^*(0) \\
= \; & -\frac{1}{2} e^{xK(x)} f^*(0) - (Y(x) - I) e^{xK(0)} (K(0))^2 \varphi - e^{xK(0)} (K(0))^2 \varphi \\
& -\frac{(Y(x) - I)}{2} e^{xK(x)} f^*(0) - \frac{1}{2} e^{xK(x)} f^*(0) \\
= \; & \sum_{i=1}^{5} J_i(x).
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
& J_1(x) + J_3(x) + J_5(x) \\
= \; & -e^{xK(0)} (K(0))^2 \varphi - e^{xK(x)} f^*(0) \\
= \; & -e^{xK(0)} (K(0))^2 \varphi - \left(e^{xK(x)} - e^{xK(0)}\right) f^*(0) - e^{xK(0)} f^*(0) \\
= \; & -e^{xK(0)} \left((K(0))^2 \varphi + f^*(0)\right) - \left(e^{xK(x)} - e^{xK(0)}\right) f^*(0) \\
= \; & -e^{xK(0)} \left[(K(0))^2 \varphi + f(0) + \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi + \Phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi)\right] \\
& - \left(e^{xK(x)} - e^{xK(0)}\right) f^*(0) \\
= \; & -e^{xK(0)} \left((K(0))^2 \varphi + f(0) + \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi\right) \\
& -e^{xK(0)} \Phi_0^*(\varphi) - e^{xK(0)} r_0(f^*, \psi) - \left(e^{xK(x)} - e^{xK(0)}\right) f^*(0) \\
= \; & \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) + \alpha_4(x).
\end{aligned}
$$

D'après le lemme 2.4.5, on obtient

$$\alpha_1 \in C^\theta([0,1]; X)$$

si et seulement si

$$(K(0))^2 \varphi + f(0) + \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi \in D_{K(0)}(\theta; +\infty).$$

Par ailleurs

$$\alpha_2 \in C^\theta([0,1]; X) \quad \text{si et seulement si} \quad \Phi_0^*(\varphi) \in D_{K(0)}(\theta; +\infty),$$

et

$$\alpha_3 \in C^\theta([0,1]; X) \quad \text{si et seulement si} \quad r_0(f^*, \psi) \in D_{K(0)}(\theta; +\infty).$$

Pour le terme α_4, on écrit

$$\begin{aligned}
\alpha_4(x) &= -\left(e^{xK(x)} - e^{xK(0)}\right) f^*(0) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left((K(x)-zI)^{-1} - (K(0)-zI)^{-1}\right) f^*(0)\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(\int_0^x \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right) f^*(0)\,dz.
\end{aligned}$$

Soit $0 \leqslant \tau < x \leqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
& \alpha_4(x) - \alpha_4(\tau) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(\int_0^x \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right) f^*(0)\,dz \\
& \quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{\tau z}\left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right) f^*(0)\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} \left[e^{xz} - e^{\tau z}\right]\left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right) f^*(0)\,dz \\
& \quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(\int_\tau^x \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right) f^*(0)\,dz \\
&= (\alpha_{41}) + (\alpha_{42}).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|(\alpha_{41})\|_X &\leqslant C\left\|\int_{\Gamma_1}\left(\int_\tau^x \frac{e^{sz}}{z}ds\right)\left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right) f^*(0)\,dz\right\|_X \\
&\leqslant C(x-\tau)^\nu \|f^*\|_{C(X)}, \\
\|(\alpha_{42})\|_X &\leqslant C(x-\tau)^\nu \|f^*\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

De manière analogue

$$J_2 \in C^\theta([0,1];X) \quad \text{si et seulement si} \quad (K(0))^2\varphi \in D_{K(0)}(\theta;+\infty).$$

Pour le terme J_4, on a

$$\begin{aligned}
J_4(x) - J_4(\tau) &= -\frac{(Y(x)-I)}{2}\left(e^{xK(x)} - e^{\tau K(\tau)}\right) f^*(0) \\
& \quad -\frac{(Y(x)-Y(\tau))}{2} e^{\tau K(\tau)} f^*(0) \\
&= J_{41} + J_{42}.
\end{aligned}$$

Concernant le terme J_{41}, on doit estimer la norme du terme $\left(e^{xK(x)} - e^{\tau K(\tau)}\right)$. On a

$$\begin{aligned} e^{xK(x)} - e^{\tau K(\tau)} &= \left(e^{xK(x)} - e^{xK(\tau)}\right) \\ &\quad + \left[\left(e^{xK(\tau)} - e^{\tau K(\tau)}\right) - \left(e^{xK(0)} - e^{\tau K(0)}\right)\right] \\ &\quad + \left(e^{xK(0)} - e^{\tau K(0)}\right) \\ &= (a_1) + (a_2) + (a_3)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} J_{41} &= -\frac{(Y(x) - I)}{2}\left[(a_1) + (a_2) + (a_3)\right] f^*(0) \\ &= (b_1) + (b_2) + (b_3)\,. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \|(b_1)\|_X &\leqslant C \left\| \int_{\Gamma_1} e^{xz}\left((K(x) - zI)^{-1} - (K(\tau) - zI)^{-1}\right) dz \right\|_X \|f^*\|_{C(X)} \\ &\leqslant C\,(x-\tau)^{\nu}\,\|f^*\|_{C(X)}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|(b_2)\|_X \\ \leqslant\ & C\,\|f^*\|_{C(X)} \left\| \int_{\Gamma_1} \left(\int_{\tau}^{x} z e^{rz} dr \right) \left[(K(\tau) - zI)^{-1} - (K(0) - zI)^{-1}\right] dz \right\|_X \\ \leqslant\ & C\,(x-\tau)^{\nu}\,\|f^*\|_{C(X)}\,, \end{aligned}$$

$$(b_3) \in C^{\theta}([0,1]\,;X) \quad \text{si et seulement si} \quad f^*(0) \in D_{K(0)}(\theta; +\infty)\,,$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} & [Y'(x) - Y'(\tau)] \\ =\ & Y(x)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right) Y(x) - Y(\tau)\left(\frac{d}{d\tau}e^{2K(\tau)}\right) Y(\tau) \\ =\ & Y(x)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)[Y(x) - Y(\tau)] \\ & + Y(x)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)} - \frac{d}{d\tau}e^{2K(\tau)}\right) Y(\tau) \\ & + [Y(x) - Y(\tau)]\left(\frac{d}{d\tau}e^{2K(\tau)}\right) Y(\tau) \\ =\ & \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \end{aligned}$$

avec

$$\|\theta_1\|_X \leqslant C\,|x-\tau|\,, \quad \|\theta_2\|_X \leqslant C\,(x-\tau)^{\eta} \quad \text{et} \quad \|\theta_3\|_X \leqslant C\,|x-\tau|\,.$$

Alors

$$\|J_{42}\|_X \leqslant C\left(|x-\tau| + (x-\tau)^{\eta}\right)\|f^*\|_{C(X)}.$$

Pour le terme $I_3(x)$, on a

$$\begin{aligned}
& I_3(x) - I_3(\tau) \\
= \; & \frac{Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2\left[e^{xz} - e^{\tau z}\right]\left(\int_0^{\tau}\frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}dr\right)\varphi dz \\
& + \frac{Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left(\int_{\tau}^{x}\frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}dr\right)\varphi dz \\
& + \frac{(Y(x)-Y(\tau))}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2 e^{\tau z}\left(\int_0^{\tau}\frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}dr\right)\varphi dz \\
= \; & (\gamma_1) + (\gamma_2) + (\gamma_3).
\end{aligned}$$

D'où

$$\|(\gamma_1)\|_X \leqslant C(x-\tau)^{\nu}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X, \|(\gamma_2)\|_X \leqslant C(x-\tau)^{\nu}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X,$$

$$\|(\gamma_3)\|_X \leqslant C|x-\tau|\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X.$$

Concernant le terme $\triangle_{10}(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\triangle_{10}(x) = \; & \frac{Y(x)}{2}\int_0^1\left(K(x)e^{(x+s)K(x)}\right)(K(x)-zI)^{-1}(f^*(s)-f^*(0))ds \\
& = -\frac{Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} ze^{(x+s)z}(K(x)-zI)^{-1}(f^*(s)-f^*(0))dzds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \triangle_{10}(x) - \triangle_{10}(\tau) \\
= \; & -\frac{Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} ze^{(x+s)z}\left((K(x)-zI)^{-1} - (K(\tau)-zI)^{-1}\right)(f^*(s)-f^*(0))dzds \\
& -\frac{Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\left(\int_{\tau}^{x} z^2 e^{(r+s)z}dr\right)(K(\tau)-zI)^{-1}(f^*(s)-f^*(0))dzds \\
& -\frac{[Y(x)-Y(\tau)]}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} ze^{(\tau+s)z}(K(\tau)-zI)^{-1}(f^*(s)-f^*(0))dzds \\
= \; & (g_1) + (g_2) + (g_3).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|(g_1)\|_X \leqslant C|x-\tau| \|f^*\|_{C^\beta(X)}, \|(g_2)\|_X \leqslant C(x-\tau)^\beta \|f^*\|_{C^\beta(X)},$$

$$\|(g_3)\|_X \leqslant C|x-\tau| \|f^*\|_{C^\beta(X)}.$$

Les termes $\triangle_{11}(x)$, $\triangle_{12}(x)$ et $\triangle_{13}(x)$ se traitent de manière similaire.

Remarque 3.2.1 *L'höldérianité du terme $\triangle_5(x)+\triangle_8(x)+\triangle_{20}(x)$ se traite par un raisonnement analogue à ce qui précède et on obtient la condition de compatibilité en 1.*

D'autre part, regardons le terme $B(x)u'(x)$. On a

$$B(x)u'(x) = B(x)d_0'(x) + B(x)d_1'(x) + B(x)m'(x) + B(x)v'(x).$$

Il suffit de traiter l'höldérianité de $B(x)v'(x)$. On rappelle que (voir (2.70))

$$\begin{aligned}
& B(x)v'(x,f^*) \\
= \; & \frac{B(x)}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}f^*(s)\,ds - \frac{B(x)}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}f^*(s)\,ds \\
& -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
= \; & c_1(x)+c_2(x)+c_3(x)+c_4(x).
\end{aligned}$$

Pour le terme $c_1(x)$, on a

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}e^{(x-s)z}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&= -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}e^{(x-s)z}(K(x)-zI)^{-1}(f^*(s)-f^*(x))\,dzds \\
&\quad -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}e^{(x-s)z}(K(x)-zI)^{-1}f^*(x)\,dzds \\
&= c_{11}(x)+c_{12}(x).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& c_{11}(x) - c_{11}(\tau) \\
= & -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x \int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(f^*(s)-f^*(x)\right)dzds \\
& +\frac{B(\tau)}{4i\pi}\int_0^\tau \int_{\Gamma_1} e^{(\tau-s)z}\left(K(\tau)-zI\right)^{-1}\left(f^*(s)-f^*(\tau)\right)dzds \\
= & -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^\tau \int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(f^*(x)-f^*(\tau)\right)dzds \\
& -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^\tau \int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(\left(K(x)-zI\right)^{-1}-\left(K(\tau)-zI\right)^{-1}\right)\left(f^*(s)-f^*(\tau)\right)dzds \\
& -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^\tau \int_{\Gamma_1} \left(\int_{(\tau-s)}^{(x-s)} ze^{rz}dr\right)\left(K(\tau)-zI\right)^{-1}\left(f^*(s)-f^*(\tau)\right)dzds \\
& -\frac{\left(B(x)-B(\tau)\right)}{4i\pi}\int_0^\tau \int_{\Gamma_1} e^{(\tau-s)z}\left(K(\tau)-zI\right)^{-1}\left(f^*(s)-f^*(\tau)\right)dzds \\
& -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_\tau^x \int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(f^*(s)-f^*(x)\right)dzds \\
= & (\mu_1)+(\mu_2)+(\mu_3)+(\mu_4)+(\mu_5).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left\|(\mu_1)\right\|_X & \leqslant C\int_0^\tau \left\|\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(f^*(x)-f^*(\tau)\right)dz\right\|ds \\
& \leqslant C.\tau.(x-\tau)^\beta \left\|f^*\right\|_{C^\beta(X)}
\end{aligned}$$

$$\left\|(\mu_2)\right\|_X \leqslant C(x-\tau)^{\nu+\beta}\left\|f^*\right\|_{C^\beta(X)},$$

$$\begin{aligned}
\left\|(\mu_3)\right\|_X & \leqslant C\int_0^\tau \left\|\int_{\Gamma_1}\int_{(\tau-s)}^{(x-s)} \frac{\sigma}{r}.e^\sigma.\frac{r}{\sigma}.\frac{dr}{r}d\sigma\right\|(\tau-s)^\beta\left\|f^*\right\|_{C^\beta(X)}ds \\
& \leqslant C\int_0^\tau \left\|\int_{\Gamma_1}\int_{(\tau-s)}^{(x-s)} \frac{\sigma}{r}.e^\sigma.\frac{r}{\sigma}.r^\beta.\frac{dr}{r}d\sigma\right\|\left\|f^*\right\|_{C^\beta(X)}ds \\
& \leqslant C.\tau.(x-\tau)^\beta\left\|f^*\right\|_{C^\beta(X)},
\end{aligned}$$

$$\|(\mu_4)\|_X \leqslant C\,|x-\tau|\,\|f^*\|_{C^\beta(X)}\,, \|(\mu_5)\|_X \leqslant C\,|x-\tau|^\beta\,\|f^*\|_{C^\beta(X)}\,.$$

Pour $c_{12}(x)$, on a

$$\begin{aligned}
c_{12}(x) &= -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\,(K(x)-zI)^{-1}\,f^*(x)\,dzds \\
&= \frac{B(x)}{2}\left(\int_0^x e^{(x-s)K(x)}f^*(x)\,ds\right) \\
&= \frac{B(x)}{2}e^{(x-s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,f^*(x) - \frac{B(x)}{2}\,(K(x))^{-1}\,f^*(x) \\
&= e_1(x)+e_2(x)\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
e_1(x)-e_1(\tau) &= \frac{B(x)}{2}e^{(x-s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,(f^*(x)-f^*(\tau)) \\
&\quad+\frac{B(x)}{2}e^{(x-s)K(x)}\left((K(x))^{-1}-(K(\tau))^{-1}\right)f^*(\tau) \\
&\quad+\frac{B(x)}{2}\left(e^{(x-s)K(x)}-e^{(\tau-s)K(\tau)}\right)(K(\tau))^{-1}\,f^*(\tau) \\
&\quad+\frac{B(x)-B(\tau)}{2}e^{(\tau-s)K(\tau)}\,(K(\tau))^{-1}\,f^*(\tau) \\
&= (e_{11})+(e_{12})+(e_{13})+(e_{14})\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|(e_{11})\|_X \leqslant C\,(x-\tau)^\beta\,\|f^*\|_{C^\beta(X)}\,,\ \ \|(e_{12})\|_X \leqslant C\,(x-\tau)\,\|f^*\|_{C(X)}\,.$$

$$\|(e_{14})\|_X \leqslant C\,(x-\tau)\,\|f^*\|_{C^\beta(X)}\,.$$

Le terme (e_{13}) se traite comme J_{41}. On fait de même pour $c_2(x)$. Concernant le terme $c_3(x)$, on écrit

$$\begin{aligned}
&c_3(x)-c_3(\tau) \\
&= -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\,(K(x)-zI)^{-1}\,f^*(s)\,dzds \\
&\quad+\frac{B(\tau)}{4i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(\tau-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial \tau}\,(K(\tau)-zI)^{-1}\,f^*(s)\,dzds \\
&= -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,(K(x)-zI)^{-1}-\frac{\partial}{\partial \tau}\,(K(\tau)-zI)^{-1}\right)f^*(s)\,dzds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1}\left(\frac{e^{(x-s)z}-e^{(\tau-s)z}}{z}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(K(\tau)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds\\
&-\frac{(B(x)-B(\tau))}{4i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(\tau-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(K(\tau)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds\\
&-\frac{B(x)}{4i\pi}\int_\tau^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds\\
={}&(\delta_1)+(\delta_2)+(\delta_3)+(\delta_4).
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que

$$\|(\delta_1)\|_X\leqslant C\,(x-\tau)^\eta\,\|f^*\|_{C(X)}.$$

On fait de même pour les termes (δ_2), (δ_3) et aussi pour le terme $c_4(x)$. Regardons aussi l'höldérianité du terme $G_{\lambda 3}(x)\varphi$ écrit dans $B(x)\,d_0'(x)$ (voir (2.44)), on a

$$
\begin{aligned}
G_{\lambda 3}(x)\varphi &= B(x)\,U_0(x)Y(x)\frac{d}{dx}e^{xK(x)}\varphi\\
&= -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}ze^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz\\
&\quad-\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz\\
&= \alpha_1(x)+\alpha_2(x).
\end{aligned}
$$

Puisque $\varphi\in D((K(0))^2)$, alors de l'identité de la résolvante, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(x) &= -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}ze^{xz}\left((K(x)-zI)^{-1}-(K(0)-zI)^{-1}\right)\varphi dz\\
&\quad-\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}ze^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1}\varphi dz\\
&= -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}ze^{xz}\left(\int_0^x\frac{\partial}{\partial r}\left(K(r)-zI\right)^{-1}dr\right)\varphi dz\\
&\quad-\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{xz}}{z}\left(K(0)-zI\right)^{-1}(K(0))^2\varphi dz\\
&= \alpha_{11}(x)+\alpha_{12}(x).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{12}(x)-\alpha_{12}(\tau) \\
= \quad & -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{(e^{xz}-e^{\tau z})}{z}(K(0)-zI)^{-1}(K(0))^2\varphi dz \\
& -\frac{B(x)\,U_0(x)\,(Y(x)-Y(\tau))}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{\tau z}}{z}(K(0)-zI)^{-1}(K(0))^2\varphi dz \\
& -\frac{B(x)\,(U_0(x)-U_0(\tau))\,Y(\tau)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{\tau z}}{z}(K(0)-zI)^{-1}(K(0))^2\varphi dz \\
& -\frac{(B(x)-B(\tau))\,U_0(\tau)\,(Y(\tau))}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{\tau z}}{z}(K(0)-zI)^{-1}(K(0))^2\varphi dz \\
= \quad & (b_1)+(b_2)+(b_3)+(b_4)\,.
\end{aligned}
$$

Il en résulte

$$
\|(b_1)\|_X \leqslant C\,|x-\tau|\,\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \ ,\ \ \|(b_2)\|_X \leqslant C\,|x-\tau|\,\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X ,
$$

$$
\|(b_4)\|_X \leqslant C\,|x-\tau|\,\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X .
$$

Pour (b_3), on le traite comme J_{41}(déjà vu), ceci en majorant la norme

$$
\|(U_0(x)-U_0(\tau))\| = \left\|(e^{2(1-x)K(x)}-e^{2(1-\tau)K(\tau)})\right\|
$$

comme en (3.3). De la même manière et puisque $\varphi = \left(I-e^{xK(0)}\right)\varphi + e^{xK(0)}\varphi$, le lemme 2.4.4 permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}(x) \quad = \quad & -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(\int_0^x \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}dr\right)\left(I-e^{xK(0)}\right)\varphi dz \\
& -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(\int_0^x \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}dr\right)e^{xK(0)}\varphi dz \\
= \quad & a_1(x)+a_2(x)\,.
\end{aligned}
$$

D'où, pour $a_1(x)$ (on fait de même pour $a_2(x)$ car $\left\|e^{xK(0)}\varphi\right\|_X \leqslant Cx^2\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X$), on a

$$
\begin{aligned}
& a_1(x)-a_1(\tau) \\
= \quad & \frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}dr\right)\left(e^{xK(0)}-e^{\tau K(0)}\right)\varphi dz \\
& -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z\left(e^{xz}-e^{\tau z}\right)\left(\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}dr\right)\left(I-e^{\tau K(0)}\right)\varphi dz
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{B(x)\,U_0(x)\,(Y(x)-Y(\tau))}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{\tau z}\left(\int_0^{\tau}\frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right)\left(I-e^{\tau K(0)}\right)\varphi dz\\
&-\frac{B(x)\,(U_0(x)-U_0(\tau))\,Y(\tau)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{\tau z}\left(\int_0^{\tau}\frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right)\left(I-e^{\tau K(0)}\right)\varphi dz\\
&-\frac{(B(x)-B(\tau))\,U_0(\tau)Y(\tau)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{\tau z}\left(\int_0^{\tau}\frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right)\left(I-e^{\tau K(0)}\right)\varphi dz\\
&-\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(\int_{\tau}^{x}\frac{\partial}{\partial r}(K(r)-zI)^{-1}\,dr\right)\left(I-e^{xK(0)}\right)\varphi dz\\
=\;&(a_{11})+(a_{12})+(a_{13})+(a_{14})+(a_{15})+(a_{16})\,.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\left\|\left(e^{\tau K(0)}-e^{xK(0)}\right)\varphi\right\| &= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\left(e^{xz}-e^{\tau z}\right)(K(0)-zI)^{-1}\varphi dz\right\|\\
&= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\left(e^{xz}-e^{\tau z}\right)\frac{K(0)\,(K(0)-zI)^{-1}}{z}\varphi dz\right\|\\
&= \left\|\int_{\tau}^{x}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{rz}\,(K(0)-zI)^{-1}K(0)\varphi dz\right)dr\right\|\\
&\leqslant C(x-\tau)\,\|K(0)\varphi\|_X\,,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|(a_{11})\|_X &\leqslant C(x-\tau)^{\nu}\,\|K(0)\varphi\|_X\,, \|(a_{12})\|_X \leqslant C(x-\tau)^{\nu}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X,\\
\|(a_{13})\|_X &\leqslant C(x-\tau)\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X, \|(a_{15})\|_X \leqslant C(x-\tau)\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X,\\
\|(a_{16})\|_X &\leqslant C(x-\tau)\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X.
\end{aligned}$$

Pour (a_{14}), il se traite comme comme J_{41} aussi. Maintenant, il reste à voir l'höldérianité de $\alpha_2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_2(x) &= -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\left(I-e^{xK(0)}\right)\varphi dz\\
&\quad -\frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}e^{xK(0)}\varphi dz\\
&= \alpha_{21}(x)+\alpha_{22}(x)\,.
\end{aligned}$$

Pour $\alpha_{21}(x)$ (on fait de même pour $\alpha_{22}(x)$), on a

$$\begin{aligned}
& \alpha_{21}(x) - \alpha_{21}(\tau) \\
= \ & \frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{xz} \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} \left(e^{xK(0)} - e^{\tau K(0)}\right) \varphi dz \\
& - \frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{xz} \left(\frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} - \frac{\partial}{\partial \tau} (K(\tau) - zI)^{-1} \right) \\
& \cdot \left(I - e^{\tau K(0)}\right) \varphi dz \\
& - \frac{B(x)\,U_0(x)Y(x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \left(e^{xz} - e^{\tau z}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} (K(\tau) - zI)^{-1} \left(I - e^{\tau K(0)}\right) \varphi dz \\
& - \frac{B(x)\,U_0(x)\,(Y(x) - Y(\tau))}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\tau z} \frac{\partial}{\partial \tau} (K(\tau) - zI)^{-1} \left(I - e^{\tau K(0)}\right) \varphi dz \\
& - \frac{B(x)\,(U_0(x) - U_0(\tau))\,Y(\tau)}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\tau z} \frac{\partial}{\partial \tau} (K(\tau) - zI)^{-1} \left(I - e^{\tau K(0)}\right) \varphi dz \\
& - \frac{(B(x) - B(\tau))\,U_0(\tau)Y(\tau)}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\tau z} \frac{\partial}{\partial \tau} (K(\tau) - zI)^{-1} \left(I - e^{\tau K(0)}\right) \varphi dz \\
= \ & (\delta_1) + (\delta_2) + (\delta_3) + (\delta_4) + (\delta_5) + (\delta_6).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|(\delta_1)\|_X \leqslant C(x-\tau)^{\nu} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X, \|(\delta_3)\|_X \leqslant C(x-\tau)^{\nu} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X,$$

$$\|(\delta_2)\|_X \leqslant C(x-\tau)^{\eta} \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X .$$

D'une manière similaire, on traite l'höldérianité des termes (δ_4), (δ_5) et (δ_6) qui restent et aussi celle des termes $B(x)\,d_1'(x)$ et $B(x)\,m'(x)$. D'autre part, regardons l'höldérianité, par exemple, du terme $V_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{4} V_{\lambda i}(x)$, figurant dans l'expression de $v''(x) + Q(x)\,v(x)$, voir (2.74). Concernant le terme $V_{\lambda 1}(x)$ (on fait de même pour $V_{\lambda 2}(x)$), on a

$$\begin{aligned}
& V_{\lambda 1}(x) - V_{\lambda 1}(\tau) \\
= \ & -\frac{1}{2i\pi} \int_0^x \int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z} \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dz ds \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_0^\tau \int_{\Gamma_1} e^{(\tau-s)z} \frac{\partial}{\partial \tau} (K(\tau) - zI)^{-1} f^*(s)\, dz ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}-\frac{\partial}{\partial\tau}(K(\tau)-zI)^{-1}\right)\\
&\quad\cdot f^*(s)\,dzds\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1}\left(\int_{(\tau-s)}^{(x-s)} ze^{rz}dr\right)\frac{\partial}{\partial\tau}(K(\tau)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\tau^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\\
&= (a_1)+(a_2)+(a_3)\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|(a_1)\|_X &\leqslant C\int_0^\tau\left\|\int_{\Gamma_1} e^{\sigma}.(x-\tau)^{\eta}.\frac{(x-s)^{\nu}}{\sigma^{\nu}}.\frac{d\sigma}{(x-s)}\right\|_X \|f^*\|_{C(X)}\,ds\\
&\leqslant C(x-\tau)^{\eta}\left[x^{\nu}-(x-\tau)^{\nu}\right]\|f^*\|_{C(X)}\\
&\leqslant C(x-\tau)^{\eta+\nu-1}\|f^*\|_{C(X)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(a_2)\|_X &\leqslant C\int_0^\tau\left\|\int_{\Gamma_1}\int_{(\tau-s)}^{(x-s)}\frac{\sigma}{r}.e^{\sigma}.\frac{r^{\nu}}{\sigma^{\nu}}.\frac{dr}{r}d\sigma\right\|_X\|f^*\|_{C(X)}\,ds\\
&\leqslant C(x-\tau)^{\nu}\|f^*\|_{C(X)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(a_3)\|_X &\leqslant C\int_\tau^x\left\|\int_{\Gamma_1} e^{\sigma}.\frac{(x-s)^{\nu}}{\sigma^{\nu}}.\frac{d\sigma}{(x-s)}\right\|_X\|f^*\|_{C(X)}\,ds\\
&\leqslant C(x-\tau)^{\nu}\|f^*\|_{C(X)}\,.
\end{aligned}$$

Pour le terme $V_{\lambda 3}(x)$, on a

$$\begin{aligned}
&V_{\lambda 3}(x)-V_{\lambda 3}(\tau)\\
&= -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\\
&\quad +\frac{1}{4i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(\tau-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(K(\tau)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\\
&= -\frac{1}{4i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(K(\tau)-zI)^{-1}\right)\\
&\qquad\cdot\ f^*(s)\,dzds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{4i\pi}\int_0^\tau\int_{\Gamma_1}\left(\int_{\tau-s}^{x-s} e^{rz}dr\right)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(K(\tau)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4i\pi}\int_\tau^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
= \ & (\beta_1)+(\beta_2)+(\beta_3).
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.21), on obtient

$$
\begin{aligned}
& \|(\beta_1)\|_X \\
\leqslant \ & C\int_0^\tau\left\|\int_{\Gamma_1}e^\sigma\frac{(x-s)}{\sigma}.(x-\tau)^\eta.\frac{d\sigma}{(x-s)}\right\|_X\|f^*\|_{C(X)}\,ds \\
& +C\int_0^\tau\left\|\int_{\Gamma_1}e^\sigma\frac{(x-s)}{\sigma}.(x-\tau).\frac{\sigma^{1-\nu}}{(x-s)^{1-\nu}}.\frac{d\sigma}{(x-s)}\right\|_X\|f^*\|_{C(X)}\,ds \\
& C\int_0^\tau\left\|\int_{\Gamma_1}e^\sigma\frac{(x-s)}{\sigma}.(x-\tau)^\eta.\frac{\sigma^{1-\nu}}{(x-s)^{1-\nu}}\frac{d\sigma}{(x-s)}\right\|_X\|f^*\|_{C(X)}\,ds \\
& +C\int_0^\tau\left\|\int_{\Gamma_1}e^\sigma\frac{(x-s)}{\sigma}.(x-\tau).\frac{\sigma^{2-2\nu}}{(x-s)^{2-2\nu}}\frac{d\sigma}{(x-s)}\right\|_X\|f^*\|_{C(X)}\,ds.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
& \|(\beta_1)\|_X \\
\leqslant \ & C.\left[\tau.(x-\tau)^\eta+(x-\tau)^\nu+(x-\tau)^{\eta+\nu-1}+(x-\tau)^{2\nu-1}\right]\|f^*\|_{C(X)},
\end{aligned}
$$

$$
\|(\beta_2)\|_X\leqslant C(x-\tau)^\nu\|f^*\|_{C(X)},\quad \|(\beta_3)\|_X\leqslant C(x-\tau)^\nu\|f^*\|_{C(X)}.
$$

On fait de même pour $V_{\lambda 4}(x)$.

Les mêmes arguments utilisés ici s'appliquent pour l'höldérianité des autres termes figurant dans l'expression de $u''(x)+B(x)u'(x)+Q(x)u(x)=f(x)$. Donc

$$
u''(.),\ B(.)u'(.),\ Q(.)u(.)\in C^\beta([0,1];X),
$$

où

$$
\beta=\min(\theta,\nu,\eta,\eta+\nu-1)=\min(\theta,\eta+\nu-1).
$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. ■