2

Étude d'existence et d'unicité de la solution

Sommaire

2.1 Position du problème et hypothèses

2.1.1 Position du problème

Ce travail est consacré à la résolution de l'équation différentielle abstraite complète du second ordre, de type elliptique et à coefficients opérateurs variables

$$u''(x) + B(x)\,u'(x) + A(x)\,u(x) - \lambda u(x) = f(x)\,,\ \ x \in (0,1) \tag{2.1}$$

avec les conditions de Dirichlet non homogènes

$$\begin{cases} u(0) = \varphi, \\ u(1) = \psi, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in C^\theta([0,1]\,;X)$, $0 < \theta < 1$, φ et ψ sont deux éléments donnés dans un espace de Banach complexe X, $(B(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés et $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés dans X, à domaines $D(A(x))$ non nécessairement denses dans X.

2.1.2 Hypothèses

Posons

$$Q(x) = A(x) - \lambda I, \qquad \lambda > 0,$$

et considérons le Problème (2.1)-(2.2) dans le cas elliptique : La famille d'opérateurs linéaires fermés $(Q(x))_{x\in[0,1]}$ à domaines $D(Q(x))$ vérifie la condition d'ellipticité uniforme suivante

$$\begin{cases} \exists C > 0, \forall x \in [0,1]\,, \forall z \geqslant 0,\ \exists\,(Q(x) - zI)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \left\|(Q(x) - zI\ )^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+z}, \end{cases} \tag{2.3}$$

qui reste vraie dans le secteur (où θ_0 et r_0 sont des petits nombres réels positifs)

$$\Pi_{\theta_0,r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_0\}\,.$$

On suppose que les opérateurs $B(x)$ vérifient

$$\exists C > 0 : \forall x \in [0,1]\,, \|B(x)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C. \tag{2.4}$$

Le terme $B(x)\,u'(x)$ dans ce travail est considéré comme une "perturbation". En vertu de l'hypothèse (2.3), on définit les puissances fractionnaires des opérateurs $(-Q(x))$. En particulier, pour chaque $x \in [0,1]$ et $\lambda > 0$, les racines carrées $-(-Q(x))^{1/2}$ sont bien définies et génèrent des semi-groupes analytiques

$$\left(e^{-(-Q(x))^{1/2}y}\right)_{y>0} = \left(e^{\left(-(-A(x)+\lambda)^{1/2}\right)y}\right)_{y>0}$$

non nécessairement fortement continus en 0 (voir A. V. Balakrishnan [3] dans le cas des domaines denses et Martinez-Sanz [31] dans le cas des domaines non denses).

De plus, il existe un autre secteur

$$\Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_1 + \pi/2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_1\}$$

où $\theta_1 > 0$ petit et $r_1 > 0$ tels que pour chaque $x \in [0,1]$,

$$\rho\left(-(-Q(x))^{1/2}\right) \supset \Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}.$$

Posons

$$\Gamma_0 = \left\{z = \rho e^{\pm i\theta_0} : \rho \geqslant r_0\right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_0 \text{ et } |\arg(z)| \geqslant \theta_0\}$$

la courbe orientée de $\infty e^{-i\theta_0}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ et

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \left\{z = \rho e^{\pm i(\theta_1+\pi/2)} : \rho \geqslant r_1\right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1,\ |\arg(z)| \geqslant \theta_1 + \pi/2\},\\
\Gamma_2 &= \left\{z = \rho e^{\pm i(\theta_1+\pi/2)} : \rho \geqslant r_1\right\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1,\ |\arg(z)| \leqslant \theta_1 + \pi/2\}
\end{aligned}$$

les courbes orientées de $\infty e^{-i(\theta_1+\pi/2)}$ à $\infty e^{i(\theta_1+\pi/2)}$ respectivement.

Donc, pour tout $x \in [0,1]$, $y > 0$ et tout entier positif k, on a

$$\begin{cases}
e^{-(-Q(x))^{1/2}y} = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_1} e^{zy}\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} dz,\\
\left[-(-Q(x))^{1/2}\right]^k e^{-(-Q(x))^{1/2}y} = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_1} z^k e^{zy}\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} dz,
\end{cases} \tag{2.5}$$

et pour tout $z \geqslant 0$, $x \in [0,1]$ (voir H. Tanabe [36], p. 36, Formule (2.29))

$$\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_0} \frac{(Q(x) - sI)^{-1}}{(-s)^{1/2} + z} ds, \tag{2.6}$$

et cette égalité a un prolongement analytique (en z) dans le secteur $\Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}$. La formule suivante est aussi vraie

$$\left(-(-Q(x))^{1/2} - zI\right)^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}\,(Q(x) - sI)^{-1}}{s + z^2} ds, \tag{2.7}$$

(voir [36], p. 37, formule (2.32)).

Remarque 2.1.1 *On a aussi la représentation du semi-groupe $e^{-(-Q(x))^{1/2}y}$ sur la courbe Γ_2*

$$e^{-(-Q(x))^{1/2}y} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_2} e^{zy}\left(-\left(-Q\left(x\right)\right)^{1/2} - zI\right)^{-1} dz, \tag{2.8}$$

et tout les calculs faits sur ce semi-groupe sont valables Γ_1 où Γ_2.

Posons

$$K(x) = -\left(-Q\left(x\right)\right)^{1/2}. \tag{2.9}$$

En plus des hypothèses (2.3) et (2.4), on va supposer que :

Pour tout $z \in \Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}$, l'application $x \mapsto (K(x) - zI)^{-1}$, définie sur $[0,1]$, est dans $C^2([0,1], \mathcal{L}(X))$. De plus, il existe $C > 0$, $\nu \in \left]1/2, 1\right]$ et $\eta \in \left]0,1\right[$ telles que $\forall z \in \Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}, \forall x, s \in [0,1]$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}(K(x) - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|z|^{\nu}}, \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \left\|\dfrac{\partial}{\partial x}(K(x) - zI)^{-1} - \dfrac{\partial}{\partial s}(K(s) - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C\left|x-s\right|^{\eta}}{|z|^{\nu}}, \\ \text{avec } \eta + \nu - 1 > 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x) - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C\left|z\right|^{1-\nu}, \tag{2.12}$$

$$\left\|\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1} - \frac{d^2}{ds^2}(K(s))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C\left|x-s\right|^{\eta}, \tag{2.13}$$

$$B(0)(X) \subset \overline{D(K(0))}, \qquad B(1)(X) \subset \overline{D(K(1))}, \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}\left(D(K(0))\right) \in \overline{D(K(0))}, \\ \\ \dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=1}\left(D(K(1))\right) \in \overline{D(K(1))}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Remarque 2.1.2 *Les constantes C, ν et η sont indépendantes de x et on a toujours $\eta + \nu - 1 < \nu$ et $\eta + \nu - 1 < \eta$. Par ailleurs, on peut remplacer z par $\sqrt{\lambda} + z$ dans les hypothèses (2.10), (2.11) et (2.12).*

Conséquences des hypothèses

1) On peut aussi résoudre notre problème en utilisant l'hypothèse suivante de A.Yagi (voir [39])

$$\left\| K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|z|^{\nu}}. \tag{2.16}$$

L'hypothèse (2.10) est plus faible que (2.16). En effet, (2.16) conduit à (2.10) en utilisant la formule

$$\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1} = K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(x)(K(x)-zI)^{-1}. \tag{2.17}$$

Preuve de la formule (2.17). On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1} = \lim_{s\rightarrow x}\left[\frac{\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}-\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}}{s-x}\right].$$

En utilisant l'identité de la résolvante suivante, pour ϕ quelconque de X, $x>0$ et $z>0$

$$\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\phi = \left(\frac{K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}}{z}-\frac{I}{z}\right)\phi,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}-\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1} \\
= & \frac{1}{z}\left[K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}-K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\right] \\
= & \frac{1}{z}K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\left(I-\left(K\left(s\right)-zI\right)K\left(s\right)^{-1}K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\right) \\
= & \frac{1}{z}K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\left(\left(K\left(x\right)-zI\right)K\left(x\right)^{-1}-\left(K\left(s\right)-zI\right)\ K\left(s\right)^{-1}\right) \\
& \qquad \cdot K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1} \\
= & \frac{1}{z}K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\left[-zK\left(x\right)^{-1}+zK\left(s\right)^{-1}\right]K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1} \\
= & K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\left[-K\left(x\right)^{-1}+K\left(s\right)^{-1}\right]K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1} \\
= & \lim_{s\rightarrow x}\frac{\left(\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}-\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\right)}{s-x} \\
= & \lim_{s\rightarrow x}K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\left[\frac{-K\left(x\right)^{-1}+K\left(s\right)^{-1}}{s-x}\right]K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1} \\
= & K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\left[\frac{d}{dx}K\left(x\right)^{-1}\right]K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient (2.10).

2) L'inégalité

$$\begin{aligned}
&\left\|K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leqslant\ &\frac{C\left|x-s\right|^{\eta}}{\left|z\right|^{\nu}}
\end{aligned}$$

implique (2.11) et

$$\left\|\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}-\frac{d}{ds}(K(s))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant C\left|x-s\right|^{\eta}. \tag{2.18}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}-\frac{d}{ds}\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\\
=\ &\Big[K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}K\left(x\right)^{-1}K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\\
&-K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\frac{d}{ds}K\left(s\right)^{-1}K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\Big]\\
&+\Big[K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\frac{d}{ds}K\left(s\right)^{-1}K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\\
&-K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\frac{d}{ds}K\left(s\right)^{-1}K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\Big]\\
=\ &\left(\alpha_1-\alpha_2\right)+\left(\alpha_3-\alpha_4\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leqslant\ &\left\|K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}K\left(x\right)^{-1}-K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\frac{d}{ds}K\left(s\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
&\cdot\left\|K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leqslant\ &\frac{C\left|x-s\right|^{\eta}}{\left|z\right|^{\nu}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, le fait que

$$\begin{aligned}
&K\left(x\right)\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}-K\left(s\right)\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\\
=\ &z\left(\left(K\left(x\right)-zI\right)^{-1}-\left(K\left(s\right)-zI\right)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
&\left\|(\alpha_3-\alpha_4)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leqslant\ & \left\|K(s)\left(K(s)-zI\right)^{-1}\frac{d}{ds}K(s)^{-1}\right\|\\
&\cdot\left\|K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}-K(s)\left(K(s)-zI\right)^{-1}\right\|\\
\leqslant\ & |z|\left\|K(s)\left(K(s)-zI\right)^{-1}\frac{d}{ds}K(s)^{-1}\right\|\left\|\left(K(x)-zI\right)^{-1}-\left(K(s)-zI\right)^{-1}\right\|\\
\leqslant\ & |z|\left\|K(s)\left(K(s)-zI\right)^{-1}\frac{d}{ds}K(s)^{-1}\right\|\left\|\int_s^x\frac{\partial}{\partial r}\left(K(r)-zI\ \right)^{-1}dr\right\|\\
\leqslant\ & C|z|\left(\frac{1}{|z|^{\nu}}\right)\left(\frac{|x-s|}{|z|^{\nu}}\right)\leqslant\frac{C|x-s|}{|z|^{2\nu-1}}.
\end{aligned}$$

D'où (2.11). Pour montrer (2.18), on a

$$\begin{aligned}
&K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\\
=\ &K(x)(K(x)-zI)^{-1}\left(\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\right)\\
&+\left(K(x)(K(x)-zI)^{-1}-K(s)(K(s)-zI)^{-1}\right)\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\\
=\ &K(x)(K(x)-zI)^{-1}\left(\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\right)\\
&+z\left(\int_s^x\frac{\partial}{\partial r}\left(K(r)-zI\right)^{-1}dr\right)\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\\
=\ &(K(x)-zI)(K(x))^{-1}\\
&\cdot\left(K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-K(s)(K(s)-zI)^{-1}\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\right)\\
&-z(K(x)-zI)(K(x))^{-1}\left(\int_s^x\frac{\partial}{\partial r}\left(K(r)-zI\right)^{-1}dr\right)\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Pour $z=1$, il résulte

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\\
=\ &(K(x)-I)(K(x))^{-1}\\
&\cdot\left(K(x)(K(x)-I)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-K(s)(K(s)-I)^{-1}\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1}\right)\\
&-(K(x)-I)(K(x))^{-1}\left(\int_s^x e^{xz}\frac{\partial}{\partial r}\left(K(r)-I\right)^{-1}dr\right)\frac{d}{ds}\left(K(s)\right)^{-1},
\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\left\| \frac{d}{dx}(K(x))^{-1} - \frac{d}{ds}(K(s))^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant C\left(|x-s|^{\eta} + |x-s|\right) \leqslant C\,|x-s|^{\eta}.$$

3) Pour la comparaison des termes $\dfrac{\partial}{\partial x}(Q(x)-zI)^{-1}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}$, on peut écrire pour tout $t>0$

$$\begin{aligned}
& (Q(x)-tI)^{-1} \\
= \; & -\left(-Q(x)+tI\right)^{-1} \\
= \; & -\left(-(-Q(x))^{1/2}+i\sqrt{t}I\right)^{-1}\left(-(-Q(x))^{1/2}-i\sqrt{t}I\right)^{-1} \\
= \; & -\left(K(x)+i\sqrt{t}I\right)^{-1}\left(K(x)-i\sqrt{t}I\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(Q(x)-tI)^{-1} = \; & -\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)+i\sqrt{t}I\right)^{-1}\left(K(x)-i\sqrt{t}I\right)^{-1} \\
& -\left(K(x)+i\sqrt{t}I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-i\sqrt{t}I\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc, l'hypothèse (2.10) et la première estimation déduite de (8), (9) faites dans [10], p. 92, sont équivalentes puisque

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(Q(x)-tI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} = O\left(\frac{1}{\left(\sqrt{t}\right)^{\nu}.\sqrt{t}}\right) = O\left(\frac{1}{t^{\nu/2+1/2}}\right).$$

4) On a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Q(x)-tI)^{-1} = \; & -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)+i\sqrt{t}I\right)^{-1}\left(K(x)-i\sqrt{t}I\right)^{-1} \\
& -2\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)+i\sqrt{t}I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-i\sqrt{t}I\right)^{-1} \\
& -\left(K(x)+i\sqrt{t}I\right)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-i\sqrt{t}I\right)^{-1},
\end{aligned}$$

et comme

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C\,|z|^{1-\nu},$$

alors

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Q(x)-tI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} = O\left(\frac{1}{t^{\nu/2}}\right),$$

pour $\nu > 1/2$.

5) En vertu de (2.17), on obtient la formule

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1} \qquad (2.19)\\
= \quad & K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\\
&+2zK(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\left(\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\right)^2.
\end{aligned}
$$

En effet, de l'identité de la résovante, on écrit (2.17) sous la forme

$$
\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1} = \left(I+z(K(x)-zI)^{-1}\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\left(I+z(K(x)-zI)^{-1}\right). \tag{2.20}
$$

En la dérivant, il vient

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}\\
= \quad & z\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\left(I+z(K(x)-zI)^{-1}\right)\\
&+\left(I+z(K(x)-zI)^{-1}\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}\left(I+z(K(x)-zI)^{-1}\right)\\
&+\left(I+z(K(x)-zI)^{-1}\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}.z.\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Or

$$
I+z(K(x)-zI)^{-1} = K(x)(K(x)-zI)^{-1},
$$

alors

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}\\
= \quad & z\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}(K(x)(K(x)-zI)^{-1}\\
&+(K(x)(K(x)-zI)^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}(K(x)(K(x)-zI)^{-1}\\
&+\left(I+z(K(x)-zI)^{-1}\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}.z.\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}.
\end{aligned}
$$

En utilisant encore la formule (2.17), on obtient (2.19).

6) Remarquons que pour $|z|$ suffisamment grand, la formule (2.19) conduit à

$$
\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} = O\left(1\right)+O\left(|z|^{1-\nu}\right) = O\left(|z|^{1-\nu}\right),
$$

et donne (2.19) aussi.

7) De (2.13), on en déduit (voir [24], p.113-115)

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{d^2}{dx^2}(K(x)-z)^{-1} - \frac{d^2}{ds^2}(K(s)-z)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
\leqslant\ & C\left[|x-s|^\eta + \left(|x-s| + |x-s|^\eta\right)|z|^{1-\nu} + |x-s|\,|z|^{2-2\nu}\right].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.2 Construction de la solution

2.2.1 Formule de représentation de la solution

D'abord, on rappelle brièvement le cas constant où $B(x) \equiv 0$ et $Q(x) = Q$ satisfait l'hypothèse d'ellipticité (2.3) (on pose $K = -(-Q)^{1/2}$). Dans ce cas, la représentation de la solution u est donnée par la formule (voir S. G. Krein [22], Favini et al. [13] ou [15])

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{xK}\xi_0 + e^{(1-x)K}\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K}K^{-1}f(s)\,ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K}K^{-1}f(s)\,ds,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= (I-Z)^{-1}\left(\varphi - e^K\psi\right) - \frac{(I-Z)^{-1}}{2}\int_0^1 e^{sK}K^{-1}f(s)\,ds \\
&\quad + \frac{(I-Z)^{-1}}{2}\int_0^1 e^{(2-s)K}K^{-1}f(s)\,ds, \\
\xi_1 &= (I-Z)^{-1}\left(\psi - e^K\varphi\right) - \frac{(I-Z)^{-1}}{2}\int_0^1 e^{(1-s)K}K^{-1}f(s)\,ds \\
&\quad + \frac{(I-Z)^{-1}}{2}\int_0^1 e^{(1+s)K}K^{-1}f(s)\,ds,
\end{aligned}$$

avec

$$Z = e^{2K}, \quad (I-Z)^{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{2z}}{1-e^{2z}}(K-zI)^{-1}\,dz + I,$$

(voir A. Lunardi [30], p. 60 pour l'inversibilité de $I - Z$).

Dans notre situation, on va chercher une solution de problème (2.1)-(2.2) sous la forme

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xK(x)}\xi_0^*(x) + e^{(1-x)K(x)}\xi_1^*(x) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.22}$$

où

$$\begin{aligned} \xi_0^*(x) &= (I-Z(x))^{-1}\left(\varphi^* - e^{K(x)}\psi^*\right) \\ &-\frac{(I-Z(x))^{-1}}{2}\int_0^1 e^{sK(x)}\left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\,ds \\ &+\frac{(I-Z(x))^{-1}}{2}\int_0^1 e^{(2-s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\,ds, \\ \xi_1^*(x) &= (I-Z(x))^{-1}\left(\psi^* - e^{K(x)}\varphi^*\right) \\ &-\frac{(I-Z(x))^{-1}}{2}\int_0^1 e^{(1-s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\,ds \\ &+\frac{(I-Z(x))^{-1}}{2}\int_0^1 e^{(1+s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\,ds, \end{aligned}$$

φ^*, ψ^* et f^* sont des fonctions inconnues à déterminer dans un espace adéquat ($f^* \in C^\beta([0,1]\,;X),\ (0<\beta<1)$), afin d'obtenir une solution stricte u du problème (2.1)-(2.2). Ici, la solution stricte est une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in C^2([0,1],X),\ u(x) \in D(Q(x)) \text{ pour chaque } x \in [0,1], \\ x \mapsto Q(x)u(x) \in C([0,1],X), \end{cases}$$

et u satisfait le problème (2.1)-(2.2). L'opérateur $Z(x)$ est défini par

$$Z(x) = e^{2K(x)}, \quad (I-Z(x))^{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{2z}}{1-e^{2z}}\left(K(x)-zI\right)^{-1} dz + I.$$

Lemme 2.2.1 *Il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, l'opérateur $I - Z(x) = I - e^{2K(x)}$ est inversible et son inverse $(I-Z(x))^{-1}$ est borné.*

Preuve. Voir A. Lunardi [30], p. 59. On peut aussi le montrer autrement en vérifiant que

$$\left\|e^{2K(x)}\right\|_{L(X)} < 1.$$

D'après le calcul fonctionnel de Dunford, en vertu de la remarque 2.4.1 et en utilisant les propriétés suivantes (voir Labbas-Terreni [26])

$$\left\{\begin{array}{l} \exists C > 0 : \forall\lambda > 0, \quad \forall z \in \Gamma_1 \\ \left|z + \sqrt{\lambda}\right| \geqslant C\,|z| \;\; ; \quad \left|z + \sqrt{\lambda}\right| \geqslant C\sqrt{\lambda}, \end{array}\right. \tag{2.23}$$

on peut écrire, pour $\phi \in X$

$$\begin{aligned} \left\|e^{2K(x)}\phi\right\|_X &\leqslant C \int_{\Gamma_1} \frac{\left|e^{2z}\right|}{\left|z + \sqrt{\lambda}\right|} \,|dz|\, \|\phi\|_X \\ &\leqslant C \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mathrm{Re}(2z)}}{\left|z + \sqrt{\lambda}\right|^{1/2} |z|^{1/2}} \,|dz|\, \|\phi\|_X \\ &\leqslant C \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\lambda^{1/4}} \frac{e^{\mathrm{Re}(2z)}}{|z|^{1/2}} \,|dz|\, \|\phi\|_X \\ &\leqslant \frac{C}{\lambda^{1/4}} \|\phi\|_X\,, \end{aligned}$$

d'où il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, $\left\|e^{2K(x)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Ainsi l'opérateur $(I - Z(x))^{-1}$ existe et il est borné. ■

D'autre part, par un calcul formel, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} u(0) = \varphi^* = \varphi, \\ u(1) = \psi^* = \psi. \end{array}\right.$$

Donc, il suffit de chercher f^* dans un espace approprié tel que la représentation suivante (où $Y\,(x) = (I - Z(x))^{-1}$)

$$\begin{aligned} u\,(x) \;=\; & Y\,(x)\left(e^{xK(x)} - e^{(2-x)K(x)}\right)\varphi \\ & + Y\,(x)\left(e^{(1-x)K(x)} - e^{(1+x)K(x)}\right)\psi \\ & - \frac{Y\,(x)}{2} \int_0^1 e^{(x+s)K(x)}\,(K(x))^{-1} f^*\,(s)\,ds \\ & + \frac{Y\,(x)}{2} \int_0^1 e^{(2+x-s)K(x)}\,(K(x))^{-1} f^*\,(s)\,ds \\ & - \frac{Y\,(x)}{2} \int_0^1 e^{(2-x-s)K(x)}\,(K(x))^{-1} f^*\,(s)\,ds \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x+s)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
& +\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
= \;& d_0(x)\varphi + d_1(x)\psi + m(x,f^*) + v(x,f^*),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
v(x,f^*) \;=\; & \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\
& +\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

nous donne une solution stricte du problème (2.1)-(2.2). C'est ce qu'on verra ultérieurement.

2.3 Conditions nécessaires

Ici, on donne les conditions nécessaires sur les données φ, ψ et f pour l'existence de la solution stricte.

Proposition 2.3.1 *Soit $\varphi,\ \psi \in X$ et $f \in C([0,1],X)$. Supposons que l'application $x \mapsto (Q(x))^{-1}$ définie sur $[0,1]$ est différentiable en 0 et 1. Alors, si u est une solution stricte du Problème (2.1)-(2.2), on a*

1. $\varphi \in D(Q(0))$, $\psi \in D(Q(1))$,
2. $u'(0) - \dfrac{d\,(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=0} Q(0)\varphi \in \overline{D(Q(0))}$,
3. $u'(1) - \dfrac{d\,(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=1} Q(1)\psi \in \overline{D(Q(1))}$.

Preuve. Le premier point est clair. On a, pour $h > 0$

$$
\frac{u(h)-\varphi}{h} = \frac{(Q(h))^{-1}-(Q(0))^{-1}}{h}Q(h)u(h) + Q(0)^{-1}\frac{Q(h)u(h)-Q(0)\varphi}{h},
$$

ce qui implique

$$\frac{u(h)-\varphi}{h}-\frac{(Q(h))^{-1}-(Q(0))^{-1}}{h}Q(h)u(h)\in D(Q(0)).$$

En considérant la limite, quand $h\to 0$, il vient

$$u'(0)-\frac{d\,(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=0}Q(0)\varphi\in\overline{D(Q(0))}.$$

D'une manière analogue, on montre le troisième point. ■

Supposons, en plus, que

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\,(Q(x))^{-1}_{|x=0}\,(X)\subset\overline{D(Q(0))},\\[2ex]\dfrac{d}{dx}\,(Q(x))^{-1}_{|x=1}\,(X)\subset\overline{D(Q(1))}\end{cases}\tag{2.25}$$

et

$$\begin{cases}B(0)\left(\overline{D(Q(0))}\right)\subset\overline{D(Q(0))},\\[2ex]B(1)\left(\overline{D(Q(1))}\right)\subset\overline{D(Q(1))}.\end{cases}\tag{2.26}$$

Proposition 2.3.2 *Soit φ, $\psi\in X$ et $f\in C([0,1],X)$. Supposons que l'application $x\mapsto(Q(x))^{-1}$ définie sur $[0,1]$ est deux fois différentiable en 0 et 1 et que les inclusions (2.25) (2.26) sont vérifiées. Alors, si u est une solution stricte du Problème (2.1)-(2.2), on a*

1. $\varphi\in D(Q(0))$, $\psi\in D(Q(1))$,
2. $f(0)-Q(0)\varphi-\dfrac{d^2\,(Q(x))^{-1}}{dx^2}_{|x=0}Q(0)\varphi\in\overline{D(Q(0))}$,
3. $f(1)-Q(1)\psi-\dfrac{d^2\,(Q(x))^{-1}}{dx^2}_{|x=1}Q(1)\psi\in\overline{D(Q(1))}$.

Preuve. Le premier point est clair. Remarquons que, grâce à l'hypothèse (2.26), on a

$$u'(0)\in\overline{D(Q(0))},\quad u'(1)\in\overline{D(Q(1))}.$$

Maintenant, on peut écrire

$$\begin{aligned}&u''(0)=f(0)-Q(0)\varphi-B(0)u'(0)\\=\;&\lim_{h\to 0}\frac{u(2h)-2u(h)+u(0)}{h^2}\\=\;&\lim_{h\to 0}\frac{(Q(2h))^{-1}Q(2h)u(2h)-2\,(Q(h))^{-1}Q(h)u(h)+(Q(0))^{-1}Q(0)u(0)}{h^2}.\end{aligned}$$

Posons

$$v(h) = Q(h)u(h),$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \frac{(Q(2h))^{-1}Q(2h)u(2h) - 2(Q(h))^{-1}Q(h)u(h) + (Q(0))^{-1}Q(0)u(0)}{h^2} \\
= & \frac{(Q(2h))^{-1}v(2h) - 2(Q(h))^{-1}v(h) + (Q(0))^{-1}v(0)}{h^2} \\
= & \frac{Q\left((2h)\right)^{-1} - 2(Q(h))^{-1} + (Q(0))^{-1}}{h^2}v(0) \\
& + (Q(2h))^{-1}\frac{v(2h) - 2v(h) + v(0)}{h^2} \\
& -2\frac{(Q(2h))^{-1} - (Q(h))^{-1}}{h^2}(v(0) - v(h)) \\
= & a_1(h) + a_2(h) + a_3(h).
\end{aligned}$$

pour $a_1(h)$, on a

$$\lim_{h\to 0} a_1(h) = \frac{d^2(Q(x))^{-1}}{dx^2}_{|x=0} Q(0)\varphi.$$

En écrivant

$$\begin{aligned}
& a_2(h) + a_3(h) \\
= & \frac{1}{h^2}\left((Q(2h))^{-1} - 2h\frac{d(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=0} - (Q(0))^{-1}\right)(v(2h) - 2v(h) + v(0)) \\
& +2\frac{d(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=0}\left(\frac{v(2h) - v(h)}{h}\right) + (Q(0))^{-1}\frac{v(2h) - 2v(h) + v(0)}{h^2} \\
& +\left(\frac{2}{h}\frac{d(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=0} - 2\frac{(Q(2h))^{-1} - (Q(h))^{-1}}{h^2}\right)(v(0) - v(h)),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{(Q(2h))^{-1}Q(2h)u(2h) - 2(Q(h))^{-1}Q(h)u(h) + (Q(0))^{-1}Q(0)u(0)}{h^2} \\
& -\frac{(Q(2h))^{-1} - 2(Q(h))^{-1} + (Q(0))^{-1}}{h^2}v(0) \\
& -\frac{1}{h^2}\left((Q(2h))^{-1} - 2h\frac{d(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=0} - (Q(0))^{-1}\right)(v(2h) - 2v(h) + v(0)) \\
& -\left(\frac{2}{h}\frac{d(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=0} - 2\frac{(Q(2h))^{-1} - (Q(h))^{-1}}{h^2}\right)(v(0) - v(h)) \\
= & (Q(0))^{-1}\frac{v(2h) - 2v(h) + v(0)}{h^2} - 2\frac{d(Q(x))^{-1}}{dx}_{|x=0}\left(\frac{v(2h) - v(h)}{h}\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique, en vertu de (2.25), que le terme écrit à droite de cette égalité appartient à $\overline{D(Q(0))}$. En considérant la limite quand $h \to 0$, on obtient

$$f(0) - Q(0)\varphi - B(0)u'(0) - \frac{d^2 \left(Q(x)\right)^{-1}}{dx^2}_{|x=0} Q(0)\varphi \in \overline{D(Q(0))},$$

et en utilisant (2.26), on en déduit que

$$f(0) - Q(0)\varphi - \frac{d^2 \left(Q(x)\right)^{-1}}{dx^2}_{|x=0} Q(0)\varphi \in \overline{D(Q(0))},$$

ce qui prouve l'assertion 2. De la même manière, on obtient l'assertion 3. ∎

2.4 Résultats de base

On commence par donner les deux importants lemmes suivantes:

Lemme 2.4.1 *Soud l'hypothèse (2.3), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $z \in \Pi_{\theta_1 + \pi/2, r_1}$*

$$\left\| \left(K(x) - zI\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|z|}. \tag{2.27}$$

Preuve. D'après la formule suivante, pour tout $\varkappa > 0$ et $z > 0$

$$\int_0^\infty \frac{s^{-\varkappa}}{(s+1)} ds = \frac{\pi}{\sin(\varkappa\pi)}, \tag{2.28}$$

on obtient, pour tout $z > 0$

$$\begin{aligned} \left\| \left(K(x) - zI\right)^{-1} \right\|_{L(X)} &\leqslant C \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{(\omega + s)\left(s + z^2\right)} ds \\ &\leqslant C \int_0^\infty \frac{s^{-1/2}}{\left(s + z^2\right)} ds = \frac{C}{z} \int_0^\infty \frac{s^{-1/2}}{(s+1)} ds \\ &\leqslant \frac{C}{z}. \end{aligned}$$

∎

Remarque 2.4.1 *Dans l'estimation (2.27), on peut remplacer z par $z + \sqrt{\lambda}$.*

Lemme 2.4.2 *Sous l'hypothèse (2.3), il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left\| (K(x) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \tag{2.29}$$

pour tout $\lambda > 0$, $z \in \Pi_{\theta_1+\pi/2, r_1}$, $x \in [0,1]$ et

$$\left\| (-A(x) + \lambda)^{\kappa} e^{y\left(-(-A(x)+\lambda)^{1/2}\right)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{-\omega y \lambda^{1/2}}, \tag{2.30}$$

pour $\omega > 0$ et pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $\lambda > 0$.

Preuve. Pour la première estimation, en vertu de (2.7) et en utilisant le changement de variable $s \leftrightarrow \lambda s$ et la formule (2.28), il vient pour $z > 0$ (par exemple)

$$\begin{aligned} \left\| (K(x) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant C \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s}}{(\lambda + s)(s + z^2)} ds \\ &\leqslant C \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s}}{(\lambda + s) s} ds \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième estimation, voir la preuve complète dans [11], p. 103, (lemme 2.6, point b). ∎

L'estimation suivante sera très utile par la suite.

Lemme 2.4.3 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\xi \in X$, $x \in [0,1]$ et $y > 0$:*

$$\left\| e^{yK(x)} \xi \right\|_X \leqslant C \left\| \xi \right\|_X. \tag{2.31}$$

Preuve. La preuve est basée sur le lemme 2.4.1 et les mêmes techniques utilisées dans Tanabe (voir [36], p. 66, Formule (3.26)). ∎

Remarque 2.4.2 *Du fait que la représentation de la solution, s'écrit en fonction des semi-groupes et puisque on aura besoin de traiter la régularité de la solution, alors on doit traiter d'abord, la régularité de ces semi-groupes et leurs dérivées et on passera ensuite à celle de la solution.*

Soit $\xi > 0$ et $x \in [0,1]$. Grâce à la représentation

$$e^{\xi K(x)} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\xi z} (K(x) - z)^{-1} dz$$

les opérateurs

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} e^{\xi K(x)} &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\xi z} \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} \, dz, \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\xi K(x)} &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\xi z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - z)^{-1} \, dz
\end{aligned}$$

sont bien définis. De plus, on a les estimations importantes suivantes :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} e^{\xi K(x)} \right\| \leqslant \frac{C}{\xi^{1-\nu}}, \tag{2.32}$$

et

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\xi K(x)} \right\| \leqslant \frac{C}{\xi^{2-\nu}}. \tag{2.33}$$

On a, aussi, l'estimation suivante par rapport au paramètre λ

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} e^{\xi K(x)} \right\| \leqslant \frac{C}{\lambda^{(1-\eta)/2} \xi^{1-(\eta+\nu-1)}}. \tag{2.34}$$

En effet, pour (2.32) en posant $\xi z = \sigma$, il vient

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x} e^{\xi K(x)} \right\| &\leqslant C \int_{\Gamma_1} e^{\mathrm{Re}(\sigma)} \frac{\xi^\nu}{|\sigma|^\nu} \frac{d\,|\sigma|}{\xi} \\
&\leqslant \frac{C}{\xi^{1-\nu}} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mathrm{Re}(\sigma)}}{|\sigma|^\nu} d\,|\sigma| \leqslant \frac{C}{\xi^{1-\nu}}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\xi K(x)} \right\| \leqslant \frac{C}{\xi^{2-\nu}} \int_{\Gamma_1} e^{\mathrm{Re}(\sigma)} . \, |\sigma|^{1-\nu} \, d\,|\sigma| \leqslant \frac{C}{\xi^{2-\nu}}.$$

d'où (2.33). Pour l'estimation (2.34), de la remarque 2.1.2 on peut remplacer z par $z + \sqrt{\lambda}$ et en utilisant (2.23), on écrit

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x} e^{\xi K(x)} \right\| &\leq C \int_{\Gamma_1} \left| e^{\xi z} \right| \frac{|dz|}{\left| z + \sqrt{\lambda} \right|^\nu} \\
&\leq C \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mathrm{Re}(\sigma)} d\,|\sigma|}{\left| \frac{\sigma}{\xi} + \sqrt{\lambda} \right|^{(1-\eta)} \left| \frac{\sigma}{\xi} + \sqrt{\lambda} \right|^{\nu+\eta-1} \xi} \\
&\leq C \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mathrm{Re}(\sigma)} d\,|\sigma|}{\lambda^{(1-\eta)/2} \left(\frac{|\sigma|}{\xi} \right)^{\nu+\eta-1} \xi} \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda^{(1-\eta)/2} \xi^{1-(\eta+\nu-1)}}.
\end{aligned}$$

Dans la suite, on aura besoin de la formule suivante (voir [10], p. 126). Pour tout $\varphi \in D\left(K\left(0\right)\right)$, on a

$$\begin{aligned}
& \left(K(x)-z\right)^{-1}\varphi \qquad (2.35)\\
= & \frac{K(x)\left(K(x)-z\right)^{-1}\varphi}{z}-\frac{\varphi}{z}\\
= & \frac{1}{z}\left(K(0)^{-1}-K(x)^{-1}+x\frac{d}{dx}K(x)^{-1}\right)K(0)\varphi-\frac{\varphi}{z}\\
& +\left(K(x)-z\right)^{-1}\left(K(0)^{-1}-K(x)^{-1}+x\frac{d}{dx}K(x)^{-1}\right)K(0)\varphi\\
& +\frac{\left(K(x)-z\right)^{-1}}{z}K(0)\varphi-\frac{x}{z}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}K(0)\varphi\\
& -x\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}K(0)\varphi.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\varphi \qquad (2.36)\\
= & \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\left(K(0)^{-1}-K(x)^{-1}+x\frac{d}{dx}K(x)^{-1}\right)K(0)\varphi\\
& -\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}K(0)\varphi+\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi\\
& -\frac{1}{z}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}K(0)\varphi-x\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}K(0)\varphi,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-z\right)^{-1}\varphi \qquad (2.37)\\
= & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-z\right)^{-1}\left(K(0)^{-1}-K(x)^{-1}+x\frac{d}{dx}K(x)^{-1}\right)K(0)\varphi\\
& -\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d^2}{dx^2}K(x)^{-1}K(0)\varphi\\
& -2\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}K(0)\varphi\\
& +\frac{1}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi\\
& -x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}K(0)\varphi.
\end{aligned}$$

2.4.1 Analyse des opérateurs $e^{xK(x)}\varphi$

Voici un résultat technique.

Lemme 2.4.4 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

1. $\forall\ x > 0,\ \varphi \in D(K(0)),\ \left\|\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right\|_X \leqslant Cx\,\|K(0)\varphi\|_X\,,$

2. $\forall\ x > 0,\ \varphi \in D\left((K(0))^2\right),\ \left\|\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right\|_X \leqslant Cx^2\,\|(K(0))^2\varphi\|_X\,.$

Preuve. Soit $x > 0$ et $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < x$. On a

$$e^{\varepsilon K(0)}\varphi - e^{xK(0)}\varphi = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}(-e^{\varepsilon z} + e^{xz})\frac{K(0)\left(K(0) - zI\right)^{-1}}{z}\varphi dz.$$

1. Si $\varphi \in D(K(0))$, alors

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon K(0)}\varphi - e^{xK(0)}\varphi &= \int_{\varepsilon}^{x}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{\xi z}\left(K(0) - zI\right)^{-1}K(0)\varphi dz\right)d\xi \\ &= -\int_{\varepsilon}^{x} e^{\xi K(0)}K(0)\varphi d\xi \end{aligned}$$

   et

$$\left\|e^{\varepsilon K(0)}\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right\|_X \leqslant C(x-\varepsilon)\,\|K(0)\varphi\|_X\,.$$

2. Si $\varphi \in D\left((K(0))^2\right)$, alors

$$\left\|e^{\varepsilon K(0)}\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right\|_X \leqslant C(x^2 - \varepsilon^2)\left\|\left(K(0)\right)^2\varphi\right\|_X\,.$$

   On obtient les deux estimations en faisant tendre ε vers 0.

■

On en déduit aussi le résultat suivant :

Corollaire 2.4.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

1. $\forall\ 0 \leqslant x < 1,\ \psi \in D(K(1))$

$$\left\|\psi - e^{(1-x)K(1)}\psi\right\|_X \leqslant C\left(1-x\right)\|K(1)\psi\|_X\,.$$

2. $\forall\ 0 \leqslant x < 1,\ \psi \in D\left((K(1))^2\right)$

$$\left\|\psi - e^{(1-x)K(1)}\psi\right\|_X \leqslant C\left(1-x\right)^2\left\|(K(1))^2\psi\right\|_X\,.$$

Lemme 2.4.5 *Supposons que les hypothèses (2.3), (2.4), (2.10) et (2.11) sont vérifiées. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

1. *Pour tout* $\varphi \in X$, $x > 0$, $\left\| e^{xK(x)}\varphi \right\|_X \leqslant C \left\| \varphi \right\|_X$.

2. *Pour tout* $\varphi \in X$, $x > 0$, $s \geqslant 0$, $\left\| K(s)\, e^{xK(s)}\varphi \right\|_X \leqslant (C/x) \left\| \varphi \right\|_X$.

3. *En particulier, si* $\varphi \in D(K(0))$, $x > 0$, $s \in [0, x]$, *alors*

$$\left\| K(s)\, e^{xK(s)}\varphi \right\|_X \leqslant C \left\| K(0)\, \varphi \right\|_X .$$

4. *L'application* $x \mapsto e^{xK(x)}\varphi$ *appartient à l'espace* $C([0,1]; X)$ *si et seulement si*

$$\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}, \text{ dans ce cas } \lim_{x \to 0} e^{xK(x)}\varphi = \varphi.$$

5. *L'application* $x \mapsto e^{xK(0)}\varphi$ *appartient à l'espace* $C^\theta([0,1]; X)$ *si et seulement si*

$$\varphi \in D_{K(0)}(\theta; +\infty) = D_{Q(0)}(\theta/2; +\infty).$$

Notons que l'espace réel d'interpolation

$$D_{K(0)}(\theta; +\infty) = \left\{ \phi \in X \;/\; \sup_{r>0} \left\| r^\theta K(0) (K(0) - rI)^{-1} \phi \right\|_X < +\infty \right\}$$

voir par exemple, Grisvard [19] et selon les notations de Lions et Peetre [29], l'espace $D_{K(0)}(\theta; +\infty)$ est identique à l'espace d'interpolation $D_{Q(0)}(\theta/2; +\infty) = D_{A(0)}(\theta/2; +\infty)$.

Preuve. Les deux premières estimations sont bien connues.

Soit $\varphi \in D(K(0))$, $x > 0$, $s \in [0, x]$, alors

$$\begin{aligned}
& K(s)\, e^{xK(s)}\varphi \\
= \; & K(s)\, e^{xK(s)} \left((K(0))^{-1} - (K(s))^{-1} \right) K(0)\, \varphi + e^{xK(s)} K(0)\, \varphi \\
= \; & K(s)\, e^{xK(s)} \left((K(0))^{-1} - (K(s))^{-1} + s \frac{d}{ds} (K(s))^{-1}_{|s=0} \right) K(0)\, \varphi \\
& - sK(s)\, e^{xK(s)} \left(\frac{d}{ds} (K(s))^{-1}_{|s=0} - \frac{d}{ds} (K(s))^{-1} \right) K(0)\, \varphi \\
& - sK(s)\, e^{xK(s)} \frac{d}{ds} (K(s))^{-1} K(0)\, \varphi + e^{xK(s)} K(0)\, \varphi \\
= \; & a_1 + a_2 + a_3 + a_4.
\end{aligned}$$

En écrivant le premier terme sous la forme

$$a_1 = -K(s)\, e^{xK(s)} \int_0^s \left(\frac{d}{d\xi} (K(\xi))^{-1} - \frac{d}{ds} (K(s))^{-1}_{|s=0} \right) d\xi K(0)\, \varphi$$

et en utilisant le fait que

$$\left\| \int_0^s \left(\frac{d}{d\xi} (K(\xi))^{-1} - \frac{d}{ds} (K(s))^{-1}_{|s=0} \right) d\xi \right\|$$
$$\leqslant \int_0^s \xi \sup_{0<\theta<1} \left\| \frac{d^2}{d\xi^2} (K(\xi))^{-1}_{|\xi=\theta s} \right\|_{L(X)} d\xi \leqslant Cs^2 \leqslant Cx^2,$$

il vient

$$\|a_1\|_X \leqslant Cx \|K(0)\varphi\|_X .$$

Pour le second terme a_2, on a

$$\|a_2\|_X = \left\| sK(s) e^{xK(s)} \left(\int_0^s \frac{d^2}{d\xi^2} (K(\xi))^{-1} d\xi \right) K(0)\varphi \right\|_X \leqslant Cx \|K(0)\varphi\|_X .$$

Concernant les deux derniers termes, il est facile de voir que

$$\begin{cases} \left\| sK(s) e^{xK(s)} \dfrac{d}{ds} (K(s))^{-1} K(0)\varphi \right\|_X \leqslant C\dfrac{s}{x} \|K(0)\varphi\|_X , \\ \left\| e^{xK(s)} K(0)\varphi \right\|_X \leqslant C \|K(0)\varphi\|_X . \end{cases}$$

On traite la quatrième propriété comme suit : On écrit

$$e^{xK(x)}\varphi = e^{xK(0)}\varphi + \left(e^{xK(x)} - e^{xK(0)} \right) \varphi.$$

Grâce à Sinestrari [33], Proposition 1.2, i), p. 20, on a

$$x \mapsto e^{xK(0)}\varphi \in C([0,1];X) \text{ si et seulement si } \varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}.$$

Cette dernière égalité est dû à Haase [21]. De plus, on a (de la Formule (2.32))

$$\left\| \left(e^{xK(x)} - e^{xK(0)} \right) \varphi \right\|_X = \left\| \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} e^{xK(\xi)} \varphi d\xi \right\|_X \leqslant Cx^\nu \|\varphi\|_X .$$

Pour la dernière assertion, le raisonnement est similaire à celui du Théorème 3.1, b) et f), p. 39, dans Sinestrari [33], voir aussi [1], Proposition 3.4, iii), p. 26. ∎

Corollaire 2.4.2 *Sous les hypothèses (2.3), (2.4), (2.10) et (2.11), il existe une constante $C > 0$ telle que*

1. *Pour tout $\psi \in X$, $0 \leqslant x < 1$, $\left\| e^{(1-x)K(x)}\psi \right\|_X \leqslant C \|\psi\|_X$.*

2. *Pour tout* $\psi \in X$, $0 \leqslant x < 1$, $s \geqslant 0$,

$$\left\| K(s)\, e^{(1-x)K(s)}\psi \right\|_X \leqslant (C/(1-x)) \left\| \psi \right\|_X .$$

3. *En particulier, si* $\psi \in D(K(1))$, $0 \leqslant x < 1$, $s \in [x,1]$, *alors*

$$\left\| K(s)\, e^{(1-x)K(s)}\psi \right\|_X \leqslant C \left\| K(1)\, \psi \right\|_X .$$

4. *L'application* $x \mapsto e^{(1-x)K(x)}\psi$ *appartient à l'espace* $C([0,1];X)$ *si et seulement si* $\psi \in \overline{D(K(1))} = \overline{D(Q(1))}$, *dans ce cas* $\lim\limits_{x\to 1} e^{(1-x)K(x)}\psi = \psi$.

5. *L'application* $x \mapsto e^{(1-x)K(1)}\psi$ *appartient à l'espace* $C^{\theta}([0,1];X\ )$ *si et seulement si*

$$\psi \in D_{K(0)}(\theta;+\infty) = D_{Q(1)}(\theta/2;+\infty).$$

2.4.2 Analyse des opérateurs $\dfrac{d}{dx}\left(e^{xK(x)}\varphi\right)$

Ici, on s'intéresse à l'étude du comportement des opérateurs $\dfrac{d}{dx}\left(e^{xK(x)}\varphi\right)$ au voisinage de 0, sachant qu'on peut obtenir, au voisinage de 1, des résultats similaires pour les opérateurs $\dfrac{d}{dx}\left(e^{(1-x)K(x)}\psi\right)$ où $\psi \in D((K(1))^2$. Pour tout $x \in]0,1]$, $\varphi \in X$, on a

$$\begin{aligned} e^{xK(x)}\varphi &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz, \\ \frac{d}{dx}\left(e^{xK(x)}\varphi\right) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Lemme 2.4.6 *Soit* $\varphi \in D((K(0))^2)$. *Sous les hypothèses (2.3), (2.4), (2.10) et (2.11), l'application* $x \mapsto \dfrac{d}{dx}\left(e^{xK(x)}\varphi\right)$ *appartient à l'espace* $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$ *et*

$$\frac{d}{dx}\left(e^{xK(x)}\varphi\right) \to K(0)\varphi, \quad \textit{quand } x \to 0.$$

Preuve. Il suffit de prouver le résultat au voisinage de 0. Soit $x > 0$, $\varphi \in D((K(0))^2)$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(e^{xK(x)}\right)\varphi \\ = &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\ = &-U(x)\varphi - V(x)\varphi, \end{aligned}$$

et en vertu de la remarque 2.1.1, on peut écrire

$$U(x)\varphi = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz.$$

On utilise la décomposition suivante (voir [1], p. 25)

$$\begin{aligned} U(x)\varphi &= U(x)\left[\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right] + U(x)\left((K(0))^{-1}-(K(x))^{-1}\right)K(0)e^{xK(0)}\varphi \\ &+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}(K(x))^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz. \end{aligned}$$

En calculant

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}(K(x))^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\ &-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{e^{xz}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}(K(x))^{-1}-\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ =\; & K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ &-\frac{1}{z}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ =\; & \frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ &+z\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ &-\frac{1}{z}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ &-\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ =\; & \frac{d}{dx}(K(x))^{-1}\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ &-\frac{1}{z}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\ &-\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} \\ =\; & -\frac{1}{z}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}-\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}(K(x))^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{e^{xz}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{e^{xz}}{z}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}e^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{e^{xz}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
&\quad -\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi + e^{xK(x)}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
U(x)\varphi &= U(x)\left(\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right) \\
&\quad +U(x)\left((K(0))^{-1}-(K(x))^{-1}\right)K(0)e^{xK(0)}\varphi \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{e^{xz}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
&\quad +(e^{xK(x)}-I)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi \\
&= U_1(x)\varphi + U_2(x)\varphi + U_3(x)\varphi + U_4(x)\varphi.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\|U_1(x)\varphi\right\|_X \leqslant Cx^{\nu+1}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X, \left\|U_2(x)\varphi\right\|_X \leqslant Cx^{\nu+1}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X,$$

$$\left\|U_3(x)\varphi\right\|_X \leqslant Cx^{\nu+1}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X.$$

Pour montrer que

$$U_4(x)\varphi \to 0, \quad \text{quand} \;\; x \to 0,$$

on écrit, pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
U_4(x)\varphi &= (e^{xK(x)}-I)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}e^{xK(0)}K(0)\varphi \\
&= (e^{xK(x)}-I)\left[\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}-\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}\right]e^{xK(0)}K(0)\varphi \\
&\quad +(e^{xK(x)}-I)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}\left[e^{xK(0)}K(0)\varphi - K(0)\varphi\right] \\
&\quad +(e^{xK(x)}-I)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)\varphi \\
&= U_{41}(x)\varphi + U_{42}(x)\varphi + U_{43}(x)\varphi,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|U_{41}(x)\varphi\|_X \leqslant Cx^\eta \|K(0)\varphi\|_X \quad \to 0, \text{ quand } \ x \to 0,$$

$$\|U_{42}(x)\varphi\|_X \leqslant C \left\| \left[e^{xK(0)}K(0)\varphi - K(0)\varphi\right] \right\|_X \to 0, \quad \text{quand } \ x \to 0,$$

puisque $K(0)\varphi \in D(K(0)) \subset \overline{D(K(0))}$. Finalement

$$U_{43}(x)\varphi \to 0, \quad \text{quand } \ x \to 0$$

si et seulement si

$$\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))}$$

en vertu du lemme 2.4.5, assertion 4. De l'hypothèse (2.15) cette dernière propriété est vraie car $K(0)\varphi \in D(K(0))$. Ainsi $U(x)\varphi \to 0$, quand $x \to 0$. Pour $V(x)\varphi$, on écrit

$$\begin{aligned}
V(x)\varphi &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left((K(x)-zI)^{-1} - (K(0)-zI)^{-1}\right)\varphi dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left((K(x)-zI)^{-1} - (K(0)-zI)^{-1}\right)\varphi dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{(K(0)-zI)^{-1}}{z}\left(K(0)\right)^2\varphi dz \\
&= V_1(x)\varphi + V_2(x)\varphi.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$V_2(x)\varphi \to -K(0)\varphi, \quad \text{quand } x \to 0.$$

Concernant $V_1(x)\varphi$, on a

$$\begin{aligned}
V_1(x)\varphi &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(\int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(K(\sigma)-zI\right)^{-1} - \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(K(\sigma)-zI\right)^{-1}_{|\sigma=0} d\sigma\right)\varphi dz \\
&\quad + \frac{x}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(K(\sigma)-zI\right)^{-1}_{|\sigma=0}\varphi dz \\
&= (b_1) + (b_2).
\end{aligned}$$

Comme $\varphi = \left(I - e^{xK(0)}\right)\varphi + e^{xK(0)}\varphi$ le lemme 2.4.4 donne

$$\|(b_1)\|_X \leqslant Cx^{\eta+\nu}\left\|\left(K(0)\right)^2\varphi\right\|_X, \quad \|(b_2)\|_X \leqslant Cx^{\nu+1}\left\|\left(K(0)\right)^2\varphi\right\|_X.$$

D'où $V_2(x)\varphi \to 0$, quand $x \to 0$. ■

Corollaire 2.4.3 *Soit $\psi \in D((K(1))^2)$. Sous les hypothèses (2.3), (2.4), (2.10) et (2.11), l'application* $x \mapsto \dfrac{d}{dx}\left(e^{(1-x)K(x)}\psi\right)$ *appartient à l'espace* $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$. *De plus*

$$\frac{d}{dx}\left(e^{(1-x)K(x)}\psi\right) \to K(1)\psi, \quad \textit{quand } x \to 1.$$

2.4.3 Analyse des opérateurs $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{xK(x)}\varphi\right)$

L'analyse des opérateurs $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{xK(x)}\varphi\right)$ (où $\varphi \in D((K(0))^2)$ en 0 et des opérateurs $\dfrac{d^2}{dx^2}e^{(1-x)K(x)}\psi$ (où $\psi \in D((K(1))^2)$ en 1 se fait de la même manière. C'est pourquoi nous nous restreignons au point 0. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{xK(x)}\varphi\right) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\
&\quad -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz,
\end{aligned}$$

on peut l'écrire aussi sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{xK(x)}\varphi\right) &= (K(x))^2 e^{xK(x)}\varphi \\
&\quad -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{\xi K(x)}\varphi\right)_{|\xi=x} \\
&= S_1(x)\varphi + S_2(x)\varphi + S_3(x)\varphi.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

On s'intéresse à l'étude des opérateurs S_1, S_2 et S_3.

Étude de l'opérateur S_1

Lemme 2.4.7 *Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$. Sous les hypothèses (2.3), (2.4), (2.10) et (2.11). On a pour tout $x \in \,]0,1]$*

$$S_1(x)\varphi = e^{xK(0)}\left(K(0)\right)^2\varphi + \mathcal{F}_1(x)\varphi,$$

où l'application $x \mapsto \mathcal{F}_1(x)\varphi$ appartient à l'espace $C^\nu([0,1];X)$. De plus

$$S_1(x)\varphi \to \left(K(0)\right)^2\varphi, \quad \textit{quand } x \to 0,$$

si et seulement si $\left(K(0)\right)^2\varphi \in \overline{D(K(0))}$.

Preuve. Il suffit d'étudier le comportement de S_1 au voisinage de 0. Posons

$$\begin{aligned} S_1(x) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left((K(x)-zI)^{-1}-(K(0)-zI)^{-1}\right)dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2 e^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1}dz \\ &= S_{11}(x)+S_{12}(x). \end{aligned}$$

pour $x>0$, nous avons

$$\|S_{11}(x)\| \leqslant Cx^{\nu-2}.$$

Maintenant, écrivons $S_{11}(x)\varphi$ sous la forme

$$S_{11}(x)\varphi = S_{11}(x)\left(\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right) + S_{11}(x)e^{xK(0)}\varphi.$$

Grâce au lemme 2.4.4, on obtient

$$\left\|S_{11}(x)\left(\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right)\right\|_X \leqslant Cx^{\nu}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X,$$

ce qui implique que $S_{11}(x)\left(\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right) \to 0,$ quand $x\to 0.$

De l'estimation

$$\left\|e^{xK(0)}\varphi\right\|_X \leqslant Cx^2\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X,$$

il vient $S_{11}(x)e^{xK(0)}\varphi \to 0$, quand $x\to 0$. Pour le terme $S_{12}(x)\varphi$, on écrit

$$\begin{aligned} S_{12}(x)\varphi &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1}(K(0))^2\varphi dz \\ &= e^{xK(0)}(K(0))^2\varphi, \end{aligned}$$

et on sait que

$$e^{xK(0)}(K(0))^2\varphi \to (K(0))^2\varphi, \text{ quand } x\to 0$$

si et seulement si $(K(0))^2\varphi \in \overline{D(K(0))}$. ■

Étude de l'opérateur S_2

Montrons le résultat suivant:

Lemme 2.4.8 *Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$. Supposons que les hypothèses (2.3), (2.4), (2.10) et (2.11) sont vérifiées. Alors, l'application*

$$x \mapsto S_2(x)\varphi = -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\varphi dz$$

appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$ et $S_2(x)\varphi \to 0$, quand $x\to 0$.

Preuve. Il suffit de montrer l'höldérianité au voisinage de 0. pour $x > 0$ et $\phi \in X$, posons

$$S_2(x)\phi = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1}\phi dz.$$

Il est facile de voir que

$$\left\|S_2(x)\phi\right\|_X \leqslant Cx^{\nu-2}\left\|\phi\right\|_X.$$

Écrivons $S_2(x)\varphi$ sous la forme

$$\begin{aligned}
S_2(x)\varphi &= S_2(x)\left(\varphi - e^{xK(0)}\varphi\right) \\
&\quad + S_2(x)\left((K(0))^{-1} - (K(x))^{-1}\right)K(0)e^{xK(0)}\varphi \\
&\quad - \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
&\quad + \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(x) - zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
&= S_{21}(x)\varphi + S_{22}(x)\varphi + S_{23}(x)\varphi + S_{24}(x)\varphi.
\end{aligned}$$

En effet, il suffit de prouver que

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1}K(x)^{-1}dz \\
&+\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1}dz \\
&-\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(x) - zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&-z\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1}\left(K(x)\right)^{-1} + \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1} \\
&-z\left(K(x) - zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1} \\
= \; &-zK(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\left(K(x) - zI\right)^{-1} \\
&+K(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1} \\
&-z\left(K(x) - zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1} \\
= \; &K(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1} \\
&+zK(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\left(K(x) - zI\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -z\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1} \\
= \quad & \frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

et en intégrant à gauche de Γ_1, on obtient $\frac{1}{i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}dz = 0$. Maintenant, en vertu du lemme 2.4.4, pour tout $\varphi \in \left(D\left(K\left(0\right)\right)\right)^2$

$$
\begin{aligned}
\left\|S_{21}(x)\varphi\right\|_X &\leqslant Cx^{\nu}\left\|\left(K(0)\right)^2\varphi\right\|_X, \left\|S_{22}(x)\varphi\right\|_X \leqslant Cx^{\nu}\left\|\left(K(0)\right)^2\varphi\right\|_X, \\
\left\|S_{23}(x)\varphi\right\|_X &\leqslant Cx^{\nu}\left\|\left(K(0)\right)^2\varphi\right\|_X.
\end{aligned}
$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
& S_{24}(x)\varphi \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(\left(K(x)-zI\right)^{-1}-\left(K(0)-zI\right)^{-1}\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1}\left(\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}-\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}_{|x=0}\right)K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(0)-zI\right)^{-1}\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}_{|x=0}K(0)e^{xK(0)}\varphi dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(\int\limits_0^x\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(K(\sigma)-zI\right)^{-1}d\sigma\right)\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}e^{xK(0)}K(0)\varphi dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} e^{xz}K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}\left(\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}-\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}_{|x=0}\right)e^{xK(0)}K(0)\varphi dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} e^{xz}K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}_{|x=0}e^{xK(0)}K(0)\varphi dz \\
= \; & (a)+(b)+(c).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\left\|(a)\right\|_X \leqslant Cx^{\nu}\left\|\left(K(0)\right)^2\varphi\right\|_X, \quad \left\|(b)\right\|_X \leqslant Cx^{\eta}\left\|\left(K(0)\right)^2\varphi\right\|_X.
$$

Pour le terme (c), on écrit

$$
\begin{aligned}
(c) \quad = \quad & \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} e^{xz}K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}_{|x=0} \\
& \cdot K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}\left(K(0)-zI\right)e^{xK(0)}\varphi dz
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(0)-zI\right)^{-1}_{|x=0} e^{xK(0)}K(0)\varphi dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(0)-zI\right)^{-1}_{|x=0} e^{xK(0)}\varphi dz \\
&= (c_1)+(c_2),
\end{aligned}$$

D'où

$$\|(c_1)\|_X \leqslant Cx^{\nu}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X, \quad \|(c_2)\|_X \leqslant Cx^{\nu}\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X.$$

En rassemblant les calculs, il résulte $S_2(x)\varphi \to 0$, quand $x \to 0$. ∎

Étude de l'opérateur S_3

De la formule (2.37), on écrit

$$\begin{aligned}
S_3(x)\varphi &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-z\right)^{-1} \\
&\quad \cdot\left(K(0)^{-1}-K(x)^{-1}+x\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\right)K(0)\varphi dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
&\quad +\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{xz}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}.x.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
&= S_{31}(x)\varphi+S_{32}(x)\varphi+S_{33}(x)\varphi+S_{34}(x)\varphi+S_{35}(x)\varphi.
\end{aligned}$$

Traitons maintenant le comportement des opérateurs $S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34}$ et S_{35} au voisinage de 0. Pour cela, on utilise les deux formules importantes suivantes

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(I-e^{xK(0)}\right)K(0)\varphi\right\|_X \qquad (2.40)\\
&= C\left\|\int_{\Gamma_1}(-1+e^{xz})\frac{\left(K(0)-zI\right)^{-1}}{z}\left(K(0)\right)^2\varphi dz\right\| \\
&\leqslant C\int_0^x\left(\int_{\Gamma_1} e^{\xi z}\left(K(0)-zI\right)^{-1}\left(K(0)\right)^2\varphi dz\right)d\xi \\
&\leqslant Cx\left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X,
\end{aligned}$$

et

$$\left\| \left(I - e^{xK(0)}\right) \varphi \right\|_X \leqslant Cx^2 \left\| (K(0))^2 \varphi \right\|_X . \tag{2.41}$$

Lemme 2.4.9 *Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$. Sous les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.13), on a, pour tout $x \in]0,1]$*

$$S_3(x)\varphi = e^{xK(0)} \left(-\frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} (K(0)\varphi) \right) + \mathcal{F}_3(x)\varphi,$$

où l'application $x \mapsto \mathcal{F}_3(x)\varphi$ appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$. De plus

$$S_3(x)\varphi \to -\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0} (K(0))\, \varphi, \quad \textit{quand } x \to 0$$

si et seulement si

$$-\frac{d^2}{dx^2}K(x)^{-1}_{|x=0} (K(0))\, \varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}.$$

Preuve. Pour le premier terme $S_{31}(x)\varphi$, on écrit

$$K(0)\varphi = \left(K(0)\varphi - e^{xK(0)}K(0)\varphi\right) + e^{xK(0)}K(0)\varphi.$$

En utilisant (2.40), on obtient

$$\|S_{31}(x)\varphi\|_X \leqslant Cx^{\eta+\nu} \left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \to 0, \ \text{ quand } x \to 0.$$

Concernant le terme $S_{32}(x)\varphi$, nous avons

$$\begin{aligned}
& S_{32}(x)\varphi \\
= \ & \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz} (K(x)-z)^{-1} \left(\frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1} - \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} \right) K(0)\varphi dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz} \left((K(x)-z)^{-1} - (K(0)-z)^{-1} \right) \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz} (K(0)-z)^{-1} \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi dz \\
= \ & (a_1) + (a_2) + (a_3)\,,
\end{aligned}$$

et quand $x \to 0$, il vient

$$\|(a_1)\|_X \leqslant Cx^\eta \|K(0)\varphi\|_X \to 0, \quad \|(a_2)\|_X \leqslant Cx^\nu \|K(0)\varphi\|_X \to 0,$$

et

$$(a_3) = e^{xK(0)} \left(-\frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi \right)$$

tend vers

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)\varphi = -\frac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)^{-1}(K(0))^2\varphi$$

si et seulement si

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}.$$

Pour le terme $S_{33}(x)\varphi$, on a

$$\begin{aligned}
& S_{33}(x)\varphi \\
= \;& \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
= \;& \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\left(K(x)-z\right)\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
= \;& \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(x)\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
& -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
= \;& \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(x)\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(x)\left(K(x)-z\right)^{-1}\right) \\
& \quad\cdot\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(x)\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
& -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\left(K(x)\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}K(x)\left(K(x)-z\right)^{-1}\right) \\
& \quad\cdot\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
= \;& \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{xz}\left(K(x)\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
& \quad -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{xz}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-z\right)^{-1}\frac{d}{dx}K(x)^{-1}\left(K(x)-z\right)^{-1}K(0)\varphi dz \\
= \;& (b_1)+(b_2).
\end{aligned}$$

Pour les termes (b_1) et (b_2), en écrivant

$$K(0)\varphi = \left(K(0)\varphi - e^{xK(0)}K(0)\varphi\right) + e^{xK(0)}K(0)\varphi, \tag{2.42}$$

il résulte que, quand $x \to 0$

$$\|(b_1)\|_X \leqslant Cx^\nu \left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \to 0 \;\text{ et }\; \|(b_2)\|_X \leqslant Cx^\nu \left\|(K(0))^2\varphi\right\|_X \to 0.$$

De manière similaire, grâce aux formules (2.42) et (2.40), on obtient, quand $x \to 0$,

$$\|S_{34}(x)\varphi\|_X \leqslant Cx^\nu \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X \to 0, \|S_{35}(x)\varphi\|_X \leqslant Cx^\nu \left\|(K(0))^2 \varphi\right\|_X \to 0.$$

■

En vertu des lemmes 2.4.7, 2.4.8 et 2.4.9, on peut montrer le résultat suivant:

Proposition 2.4.1 *Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$. Supposons que les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.13) sont vérifiées. Alors, pour tout $x \in]0,1]$, on a*

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{xK(x)}\varphi\right)\\ = \;& e^{xK(0)}\left[(K(0))^2\varphi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0}(K(0))^{-1}(K(0))^2\varphi\right] + \mathcal{F}(x)\varphi\end{aligned}$$

où la fonction

$$x \mapsto \mathcal{F}(x)\varphi = \mathcal{F}_1(x)\varphi + S_2(x)\varphi + \mathcal{F}_3(x)\varphi$$

appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$. De plus

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{xK(x)}\varphi\right) \to (K(0))^2\varphi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0}(K(0))^{-1}(K(0))^2\varphi,$$

quand $x \to 0$, si et seulement si

$$(K(0))^2\varphi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0}(K(0))^{-1}(K(0))^2\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}.$$

Corollaire 2.4.4 *Soit $\psi \in D((K(1))^2)$. Supposons que les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.13) sont vérifiées. Alors, pour tout $x \in [0,1[$, on a*

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{(1-x)K(x)}\psi\right)\\ = \;& e^{(1-x)K(1)}\left[(K(1))^2\psi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=1}K(1)^{-1}(K(1))^2\psi\right] + \mathcal{G}(x)\psi\end{aligned}$$

où la fonction $x \mapsto \mathcal{G}(x)\psi$ appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$. De plus

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{(1-x)K(x)}\psi\right) \to (K(1))^2\psi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=1}(K(1))^{-1}(K(1))^2\psi,$$

quand $x \to 1$, si et seulement si

$$(K(1))^2\psi - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=1}(K(1))^{-1}(K(1))^2\psi \in \overline{D(K(1))} = \overline{D(Q(1))}.$$

Remarque 2.4.3 *La proposition 2.4.1 et les corollaires 2.4.3 et 2.4.4 seront très utiles par la suite, notamment dans la preuve du résultat principal sur l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.2).*

2.5 Régularité de la solution

On va étudier la régularité de la solution u représentée par (2.24). Pour simplifier les calculs, on va calculer le terme

$$Op(u)(x) = u''(x) + B(x)\,u'(x) + Q(x)\,u(x), \tag{2.43}$$

pour tout $x \in]0,1[$ et on va analyser sa régularité au voisinage de 0 et 1.

2.5.1 Régularité des opérateurs $Op(d_0)$ et $Op(d_1)$

Rappelons que

$$x \mapsto Y(x) = (I - Z(x))^{-1} = \left(I - e^{2K(x)}\right)^{-1} \in C^2([0,1], L(X)).$$

Soit

$$d_0(x)\,\varphi = (I - e^{(2-2x)K(x)})Y(x)\,e^{xK(x)}\varphi \; : \; = U_0(x)Y(x)\,e^{xK(x)}\varphi.$$

D'où, le résultat important suivant:

Proposition 2.5.1 *Soit $\varphi \in D((K(0))^2)$. Sous les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)$\sim$(2.15), la fonction $x \mapsto Op(d_0(.)\,\varphi)(x)$ appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$.*

Preuve. On a, pour tout $x \in]0,1]$

$$Q(x)d_0(x)\,\varphi = -(K(x))^2 U_0(x)Y(x)\,e^{xK(x)}\varphi,$$

et

$$\begin{aligned} d_0'(x)\,\varphi &= [U_0(x)Y'(x) + U_0'(x)Y(x)]\,e^{xK(x)}\varphi \\ &\quad + U_0(x)Y(x)\,\frac{d}{dx}e^{xK(x)}\varphi. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} B(x)\,d_0'(x)\,\varphi &= B(x)\,[U_0(x)Y'(x) + U_0'(x)Y(x)]\,e^{xK(x)}\varphi \\ &\quad + B(x)\,U_0(x)Y(x)\,\frac{d}{dx}e^{xK(x)}\varphi \\ : &= G_\lambda(x)\,\varphi = \sum_{i=1}^{3} G_{\lambda i}(x)\,\varphi. \end{aligned} \tag{2.44}$$

et

$$
\begin{aligned}
d_0''(x)\,\varphi &= \left[U_0(x)Y''(x) + 2U_0'(x)Y'(x) + U_0''(x)Y(x)\right] e^{xK(x)}\varphi \\
&\quad + \left[2U_0(x)Y'(x) + 2U_0'(x)Y(x)\right] \frac{d}{dx} e^{xK(x)}\varphi \\
&\quad + U_0(x)Y(x)\, \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{xK(x)}\varphi\right) \\
&= \left[U_0(x)Y''(x) + 2U_0'(x)Y'(x) + U_0''(x)Y(x)\right] e^{xK(x)}\varphi \\
&\quad + \left[2U_0(x)Y'(x) + 2U_0'(x)Y(x)\right] \frac{d}{dx} e^{xK(x)}\varphi \\
&\quad + U_0(x)Y(x)\left[S_1(x)\varphi + S_2(x)\varphi + S_3(x)\varphi\right],
\end{aligned}
$$

(pour les opérateurs $S_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, voir (2.39)). Du fait que

$$
Q(x)\, d_0(x)\,\varphi + S_1(x)\varphi = 0,
$$

alors

$$
\begin{aligned}
Op(d_0(.)\,\varphi)(x) &= \left(d_0''(x)\,\varphi + Q(x)\, d_0(x)\,\varphi\right) + B(x)\, d_0'(x)\,\varphi \\
&= F_\lambda(x)\varphi + G_\lambda(x)\,\varphi,
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

où

$$
\begin{aligned}
F_\lambda(x)\varphi = \ & \left[U_0(x)Y''(x) + 2U_0'(x)Y'(x) + U_0''(x)Y(x)\right] e^{xK(x)}\varphi \\
& + \left[2U_0(x)Y'(x) + 2U_0'(x)Y(x)\right] \frac{d}{dx} e^{xK(x)}\varphi \\
& + U_0(x)Y(x)\left[S_2(x)\varphi + S_3(x)\varphi\right] \\
& := \sum_{i=1}^{3} F_{\lambda i}(x)\,\varphi.
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Puisque

$$
\begin{aligned}
U_0'(x) &= -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z e^{(2-2x)z}\left(K(x) - zI\right)^{-1} dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{(2-2x)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1} dz,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
U_0''(x) &= \frac{2}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2 e^{(2-2x)z}\left(K(x) - zI\right)^{-1} dz \\
&\quad - \frac{2}{i\pi}\int_{\Gamma_1} z e^{(2-2x)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1} dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{(2-2x)z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x) - zI\right)^{-1} dz,
\end{aligned}
$$

il est facile de voir que

$$[0,1[\ni x\mapsto U_0'(x)\in C([0,1[;L(X))\ ;\quad [0,1[\ni x\mapsto U_0''(x)\in C([0,1[;L(X)).$$

D'autre part, calculons la limite du terme suivant quand $x\to 0$,

$$\left[U_0(x)Y''(x)+2U_0'(x)Y'(x)+U_0''(x)Y(x)\right]e^{xK(x)}\varphi.$$

Cela nous sera très utile par la suite. D'après le lemme 2.4.5, on a $\left(e^{xK(x)}\varphi\right)_{x=0}=\varphi$. D'autre part, pour tout $x\in[0,1]$

$$\begin{aligned}Y'(x) &= \left(I-e^{2K(x)}\right)^{-1}\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)\left(I-e^{2K(x)}\right)^{-1}\\ &= Y(x)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)Y(x),\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}Y''(x) &= 2Y(x)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)Y(x)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)Y(x)\\ &\quad+Y(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{2K(x)}\right)Y(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y''(0) &= 2Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0}Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0}Y(0)\\ &\quad+Y(0)\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{2K(x)}\right)_{|x=0}Y(0).\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}U_0'(0) &= -\frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_1}ze^{2z}\left(K(0)-zI\right)^{-1}dz\\ &\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}e^{2z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}_{|x=0}dz\\ &= 2K(0)e^{2K(0)}-\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_0''(0) &= \frac{2}{i\pi}\int_{\Gamma_1}z^2e^{2z}\left(K(0)-zI\right)^{-1}dz\\ &\quad-\frac{2}{i\pi}\int_{\Gamma_1}ze^{2z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}_{|x=0}dz\\ &\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}e^{2z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}_{|x=0}dz.\end{aligned}$$

D'où (en tenant compte de l'égalité $U_0(0)Y(0) = I$), il vient

$$\begin{aligned}
& U_0(0)Y''(0) \qquad (2.47)\\
= \; & 2U_0(0)Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\\
& +U_0(0)Y(0)\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\\
= \; & 2\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\\
& +\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2U_0'(0)Y'(0) \qquad (2.48)\\
= \; & 2\left(2K(0)e^{2K(0)} - \left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0}\right) Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\\
= \; & 4K(0)e^{2K(0)}Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\\
& -2\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_0''(0)Y(0) \; = \; & -4\left(K(0)\right)^2 e^{2K(0)}Y(0)\\
& -\frac{2}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1}_{|x=0} Y(0)\,dz\\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{2z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x) - zI\right)^{-1}_{|x=0} Y(0)dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_0''(0)Y(0) \; = \; & -4\left(K(0)\right)^2 e^{2K(0)}Y(0) \qquad (2.49)\\
& -\frac{2}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1}_{|x=0} Y(0)\,dz\\
& -\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{2K(x)}\right)_{x=0} Y(0).
\end{aligned}$$

De (2.47), (2.48) et (2.49), on obtient

$$\begin{aligned}
& \left[U_0(0)Y''(0) + 2U_0'(0)Y'(0) + U_0''(0)Y(0)\right]\varphi\\
= \; & 4\left(K(0)\right)e^{2K(0)}Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\,\varphi\\
& -4e^{2K(0)}Y(0)\left(K(0)\right)^2\varphi\\
& -\frac{2}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) - zI\right)^{-1}_{|x=0} Y(0)\,\varphi dz.
\end{aligned}$$

En vertu du lemme 2.4.6, il vient

$$\begin{aligned}
& \left[2U_0(0)Y'(0) + 2U_0'(0)Y(0)\right]\left(\frac{d}{dx}e^{xK(x)}\varphi\right)_{|x=0} \\
= \; & 2\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\,K(0)\varphi \\
& +2\left(2\left(K(0)\right)e^{2K(0)} - \left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0}\right)Y(0)\,K(0)\varphi \\
= \; & 4e^{2K(0)}Y(0)\left(K(0)\right)^2\varphi.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \left[U_0(0)Y''(0) + 2U_0'(0)Y'(0) + U_0''(0)Y(0)\right]\varphi \\
& +\left[2U_0(0)Y'(0) + 2U_0'(0)Y(0)\right]\left(\frac{d}{dx}e^{xK(x)}\varphi\right)_{|x=0} \\
= \; & 4K(0)e^{2K(0)}Y(0)\left(\frac{d}{dx}e^{2K(x)}\right)_{|x=0} Y(0)\,\varphi \\
& -\frac{4}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}_{|x=0} Y(0)\,\varphi dz \\
= \; & 4\left((a)+(b)\right).
\end{aligned}$$

Il est clair que le terme (a) est dans $D((K(0))^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Regardons le terme (b), on a

$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}_{|x=0} Y(0)\,\varphi dz \\
= \; & \frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}Y(0)\,\varphi dz \\
= \; & \frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}Y(0)\,\varphi dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^2e^{2z}\left(K(0)-zI\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}Y(0)\,\varphi dz \\
= \; & (b_1)+(b_2),
\end{aligned}$$

où $(b_2) \in D(K(0))$. Maintenant

$$\begin{aligned}
(b_1) \; = \; & \frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}\left(\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}K(0)\left(K(0)-zI\right)^{-1}Y(0)\,\varphi dz\right) \\
= \; & \frac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}\left(\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{2z}\left(K(0)-zI\right)^{-1}Y(0)\,K(0)\varphi dz\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dx}\,(K(x))^{-1}_{|x=0}\,(K(0)e^{2K(0)}Y\,(0)\,K(0)\varphi),$$

où $K(0)e^{2K(0)}Y\,(0)\,K(0)\varphi \in D(K(0))$. Grâce à l'hypothèse (2.15), on obtient $(b_1) \in \overline{D(K(0))}$. D'autre part, en vertu des lemmes 2.4.8 et 2.4.9 et puisque $U_0(0)Y\,(0) = I$, on aura

$$\begin{array}{ll} & U_0(x)Y\,(x)\,(S_2(x)\varphi + S_3(x)\varphi) \\ \to & -\dfrac{d^2}{dx^2}\,(K(x))^{-1}_{|x=0}\,K(0)\varphi = -\dfrac{d^2}{dx^2}\,(K(x))^{-1}_{|x=0}\,(K(0))^{-1}\,(K(0))^2\varphi \end{array}$$

si et seulement si

$$-\frac{d^2}{dx^2}\,(K(x))^{-1}_{|x=0}\,(K(0))^{-1}\,(K(0))^2\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}.$$

Donc

$$F_\lambda(0)\varphi = \Psi_0(\varphi) - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0}K(0)\varphi \tag{2.50}$$

où $\Psi_0(\varphi) \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}$. Grâce à (2.44)), on écrit

$$\begin{aligned} G_\lambda\,(0)\,\varphi &= B\,(0)\left(2e^{2K(0)}Y(0)K(0)\varphi + (K(0))\,\varphi\right) \\ &= \Psi_0^*(\varphi), \end{aligned} \tag{2.51}$$

avec $\Psi_0^*(\varphi) \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}$. (d'après (2.14). Ainsi de (2.50) et (2.51), il résulte

$$\begin{aligned} & F_\lambda(0)\varphi + G_\lambda\,(0)\,\varphi \\ = \;& \Phi_0^*(\varphi) - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0}\,(K(0))^{-1}\,(K(0))^2\varphi \end{aligned} \tag{2.52}$$

où $\Phi_0^*(\varphi) = \Psi_0(\varphi) + \Psi_0^*(\varphi) \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}$.

Concernant l'opérateur d_1, on écrit, pour tout $x \in [0,1[$

$$\begin{aligned} d_1\,(x)\,\psi &= (I - e^{2xK(x)})Y\,(x)\,e^{(1-x)K(x)}\psi \\ : &= U_1(x)Y\,(x)\,e^{(1-x)K(x)}\psi. \end{aligned}$$

Soit $\psi \in D\left((K\,(1))^2\right)$. On va traiter la régularité de d_1 au voisinage de 1. En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans l'étude de la régularité de d_0, il vient

$$Q(x)d_1\,(x)\,\psi = -(K(x))^2U_1(x)Y\,(x)\,e^{(1-x)K(x)}\psi,$$

et

$$\begin{aligned} d_1'\,(x)\,\psi &= [U_1(x)Y'\,(x) + U_1'(x)Y\,(x)]\,e^{(1-x)K(x)}\psi \\ &\quad + U_1(x)Y\,(x)\,\frac{d}{dx}e^{(1-x)K(x)}\psi. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} B(x)\,d_1'(x)\,\psi &= B(x)\left[U_1(x)Y'(x)+U_1'(x)Y(x)\right]e^{(1-x)K(x)}\psi \\ &\quad +B(x)\,U_1(x)Y(x)\,\frac{d}{dx}e^{(1-x)K(x)}\psi \\ : &= T_\lambda(x)\,\psi, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_1''(x)\,\psi &= \left[U_1(x)Y''(x)+2U_1'(x)Y'(x)+U_1''(x)Y(x)\right]e^{(1-x)K(x)}\psi \\ &\quad +\left[2U_1(x)Y'(x)+2U_1'(x)Y(x)\right]\frac{d}{dx}e^{(1-x)K(x)}\psi \\ &\quad +U_1(x)Y(x)\,\frac{d^2}{dx^2}e^{(1-x)K(x)}\psi. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Op(d_1(.)\,\psi)(x) &= \left(d_1''(x)\,\psi+Q(x)d_1(x)\,\psi\right)+B(x)d_1'(x)\,\psi \\ &= S_\lambda(x)\psi+T_\lambda(x)\,\psi. \end{aligned} \tag{2.53}$$

où

$$\begin{aligned} S_\lambda(x)\psi &= \left[U_1(x)Y''(x)+2U_1'(x)Y'(x)+U_1''(x)Y(x)\right]e^{(1-x)K(x)}\psi \\ &\quad +\left[2U_1(x)Y'(x)+2U_1'(x)Y(x)\right]\frac{d}{dx}e^{(1-x)K(x)}\psi \\ &\quad +\frac{U_1(x)Y(x)}{i\pi}\int_{\Gamma_1} ze^{(1-x)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\psi dz \\ &\quad -\frac{U_1(x)Y(x)}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{(1-x)z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\psi dz \\ : &= \sum_{i=1}^{3} S_{\lambda i}(x)\,\varphi. \end{aligned}$$

D'après les corollaires 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.4, on obtient

$$S_\lambda(1)\psi :\ = \Psi_1(\psi)-\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=1}K(1)\psi \tag{2.54}$$

où $\Psi_1(\psi)\in\overline{D(K(1))}=\overline{D(Q(1))}$. Aussi

$$T_\lambda(1)\,\psi=\Psi_1^*(\psi), \tag{2.55}$$

avec $\Psi_1^*(\psi)\in D(K(1))\subset\overline{D(K(1))}=\overline{D(Q(1))}$ (d'après (2.14)). De (2.54) et (2.55), on obtient

$$S_\lambda(1)\,\psi+T_\lambda(1)\,\psi=\Phi_1^*(\psi)-Q(1)\psi-\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=1}K(1)\psi \tag{2.56}$$

où $\Phi_1^*(\psi) = \Psi_1(\psi) + \Psi_1^*(\psi) \in \overline{D(K(1))} = \overline{D(Q(1))}$. ■

Alors, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.5.2 *Soit $\psi \in D((K(1))^2)$. Sous les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)$\sim$(2.15), la fonction $x \mapsto Op(d_1\,(.)\,\psi)(x)$ appartient à l'espace $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1];X)$.*

2.5.2 Régularité de l'opérateur $Op(m)$

Rappelons que, pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
m\,(x,f^*) &= -\frac{Y\,(x)}{2}\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,f^*\,(s)\,ds \\
&\quad +\frac{Y\,(x)}{2}\int_0^1 e^{(2+x-s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,f^*\,(s)\,ds \\
&\quad -\frac{Y\,(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x-s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,f^*\,(s)\,ds \\
&\quad +\frac{Y\,(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x+s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,f^*\,(s)\,ds \\
: &= \sum_{i=1}^{4} m_i\,(x,f^*)\,.
\end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$\begin{aligned}
m\,(x,f^*) &= (m_1\,(x,f^*) + m_4\,(x,f^*)) + (m_2\,(x,f^*) + m_3\,(x,f^*)) \\
&= -\frac{Y\,(x)}{2}\int_0^1 \left(e^{(x+s)K(x)} - e^{(2-x+s)K(x)}\right)(K(x))^{-1}\,f^*\,(s)\,ds \\
&\quad +\frac{Y\,(x)}{2}\int_0^1 \left(e^{(2+x-s)K(x)} - e^{(2-x-s)K(x)}\right)(K(x))^{-1}\,f^*\,(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Remarquons que, pour $x, s \in]0,1[$

$$\begin{aligned}
e^{(x+s)K(x)} - e^{(2-x+s)K(x)} &= \left(e^{xK(x)} - e^{(2-x)K(x)}\right)e^{sK(x)} \\
&= \left(I - e^{(2-2x)K(x)}\right)e^{(x+s)K(x)} \\
&= U_0\,(x)\,e^{(x+s)K(x)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{(2-x-s)K(x)} - e^{(2+x-s)K(x)} &= \left(e^{(1-x)K(x)} - e^{(1+x)K(x)}\right) e^{(1-s)K(x)} \\ &= \left(I - e^{2xK(x)}\right) e^{(1-x)K(x)} e^{(1-s)K(x)} \\ &= U_1(x)\, e^{(2-(x+s))K(x)}, \end{aligned}$$

d'où

$$m_1(x, f^*) + m_4(x, f^*) = -\frac{U_0(x)\, Y(x)}{2} \int_0^1 e^{(x+s)K(x)} \left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\, ds,$$

et

$$m_2(x, f^*) + m_3(x, f^*) = -\frac{U_1(x)\, Y(x)}{2} \int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)} \left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\, ds.$$

Proposition 2.5.3 *Supposons que (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.15) sont satisfaites. Alors, la fonction* $x \mapsto Op(m(., f^*))(x)$ *appartient à l'espace* $C^{\min(\eta,\nu)}([0,1]; X)$.

Preuve. En utilisant le calcul fonctionnel de Dunford et la formule

$$(K(x) - z)^{-1} K(x)^{-1} = \frac{1}{z}\left[(K(x) - z)^{-1} - K(x)^{-1}\right], \tag{2.57}$$

il vient, pour tout $x \in]0,1[$ et $f^* \in C^{\beta}([0,1]; X)$,

$$\begin{aligned} & m'(x, f^*) \\ = \; & \left(m_1'(x, f^*) + m_4'(x, f^*)\right) + \left(m_2'(x, f^*) + m_3'(x, f^*)\right) \\ = \; & -\frac{1}{2}\left[U_0'(x)\, Y(x) + U_0(x)\, Y'(x)\right] \int_0^1 e^{(x+s)K(x)} \left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\, ds \\ & -\frac{U_0(x)\, Y(x)}{2} \int_0^1 e^{(x+s)K(x)} f^*(s)\, ds \\ & +\frac{U_0(x)\, Y(x)}{4i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(x+s)z}}{z} \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) - zI\right)^{-1} f^*(s)\, dz ds \\ & -\frac{1}{2}\left[U_1'(x)\, Y(x) + U_1(x)\, Y'(x)\right] \int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)} \left(K(x)\right)^{-1} f^*(s)\, ds \\ & +\frac{U_1(x)\, Y(x)}{2} \int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)} f^*(s)\, ds \\ & +\frac{U_1(x)\, Y(x)}{4i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(2-(x+s))z}}{z} \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) - zI\right)^{-1} f^*(s)\, dz ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& B(x)\, m'(x, f^*) && (2.58)\\
= & -\frac{B(x)}{2}\left[U_0'(x)\, Y(x) + U_0(x)\, Y'(x)\right] \int_0^1 e^{(x+s)K(x)} (K(x))^{-1} f^*(s)\, ds \\
& -\frac{B(x)\, U_0(x)\, Y(x)}{2} \int_0^1 e^{(x+s)K(x)} f^*(s)\, ds \\
& +\frac{B(x)\, U_0(x)\, Y(x)}{4i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(x+s)z}}{z} \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dz ds \\
& -\frac{B(x)}{2}\left[U_1'(x)\, Y(x) + U_1(x)\, Y'(x)\right] \int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)} (K(x))^{-1} f^*(s)\, ds \\
& +\frac{B(x)\, U_1(x)\, Y(x)}{2} \int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)} f^*(s)\, ds \\
& +\frac{B(x)\, U_1(x)\, Y(x)}{4i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(2-(x+s))z}}{z} \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dz ds \\
: & = N_\lambda(f^*)(x) = \sum_{i=1}^{6} N_{\lambda i}(f^*)(x).
\end{aligned}$$

Grâce à (2.31) et aux hypothèses (2.4) et (2.10), toutes les intégrales précédentes sont absolument convergentes. Par exemple, concernant le terme $N_{\lambda 1}(f^*)(x)$ (on fait de même pour $N_{\lambda 2}(f^*)(x)$), on peut écrire d'après (2.5), (2.31) et (2.57)

$$\begin{aligned}
\|N_{\lambda 1}(f^*)(x)\|_X & \leqslant C \left\| \left(e^{xK(x)} (K(x))^{-1}\right) \right\| \left\| \int_0^1 e^{sK(x)} ds \right\|_X \|f^*\|_{C(X)} \\
& \leqslant C \left\| \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{xz} (K(x) - z)^{-1} (K(x))^{-1} dz \right\|_X \|f^*\|_{C(X)} \\
& \leqslant C \left\| \int_{\Gamma_1} e^{xz} \frac{(K(x) - z)^{-1}}{z} dz \right\|_X \|f^*\|_{C(X)} \\
& \leqslant Cx \|f^*\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

Pour $N_{\lambda 3}(f^*)(x)$) (de même pour $N_{\lambda 4}(f^*)(x)$), on obtient

$$\|N_{\lambda 3}(f^*)(x)\|_X \leqslant Cx^{\nu+1} \|f^*\|_{C(X)}.$$

Les autres termes sont réguliers en 0. D'autre part, en 1, regardons à titre d'exemple, le terme $N_{\lambda 4}(f^*)(x)$:

$$\begin{aligned}\left\|N_{\lambda 4}(f^*)(x)\right\|_X &\leqslant C\left\|\left(e^{(1-x)K(x)}(K(x))^{-1}\right)\int_0^1 e^{(1-s)K(x)}f^*(s)\,ds\right\|_X \\ &\leqslant C\left\|e^{(1-x)K(x)}(K(x))^{-1}\right\|_X \|f^*\|_{C(X)} \\ &\leqslant C(1-x)\|f^*\|_{C(X)}.\end{aligned}$$

De même

$$\left\|N_{\lambda 6}(f^*)(x)\right\|_X \leqslant C(1-x)^{\nu+1}\|f^*\|_{C(X)}.$$

Maintenant, calculons le terme $m''(x,f^*)+Q(x)\,m(x,f^*)$. Concernant le terme $Q(x)\,m(x,f^*)$, pour $x\in\,]0,1[$, on obtient

$$\begin{aligned}&Q(x)\,m(x,f^*) \qquad (2.59)\\ =\;& Q(x)\left(m_1(x,f^*)+m_4(x,f^*)\right)+Q(x)\left(m_2(x,f^*)+m_3(x,f^*)\right)\\ =\;& -(K(x))^2\left(m_1(x,f^*)+m_4(x,f^*)\right)-(K(x))^2\left(m_2(x,f^*)+m_3(x,f^*)\right)\\ =\;& (K(x))^2\left(\frac{U_0(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds\right)\\ &+(K(x))^2\left(\frac{U_1(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds\right).\end{aligned}$$

En vertu de (2.31), des propriétés des semi-groupes analytiques et de l'höldérianité de f^*, ces deux intégrales sont absolument convergentes. D'autre part, pour $x\in\,]0,1]$, on écrit

$$m''(x,f^*)=\left(m_1''(x,f^*)+m_4''(x,f^*)\right)+\left(m_2''(x,f^*)+m_3''(x,f^*)\right),$$

où

$$\begin{aligned}&m_1''(x,f^*)+m_4''(x,f^*) \qquad (2.60)\\ =\;& -\frac{1}{2}\left[U_0(x)\,Y''(x)+2U_0'(x)\,Y'(x)+U_0''(x)\,Y(x)\right]\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds\\ &-\frac{1}{2}\left[2U_0'(x)\,Y(x)+2U_0(x)\,Y'(x)\right]\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{(x+s)K(x)}(K(x))^{-1}\right\}f^*(s)\,ds\\ &-\frac{U_0(x)\,Y(x)}{2}\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{e^{(x+s)K(x)}(K(x))^{-1}\right\}f^*(s)\,ds,\end{aligned}$$

et pour $x \in [0,1[$, on a

$$
\begin{aligned}
& m_2''(x,f^*) + m_3''(x,f^*) \qquad (2.61)\\
= \; & -\frac{1}{2}\left[U_1(x)Y''(x) + 2U_1'(x)Y'(x) + U_1''(x)Y(x)\right]\int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}\left[2U_1'(x)Y(x) + 2U_1(x)Y'(x)\right]\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{(2-(x+s))K(x)}(K(x))^{-1}\right\}f^*(s)\,ds \\
& -\frac{U_1(x)Y(x)}{2}\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{e^{(2-(x+s))K(x)}(K(x))^{-1}\right\}f^*(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

On va traiter la régularité de $m''(x,f^*)$ en 0 et en 1. En 0, il suffit d'étudier la régularité de $m_1''(x,f^*) + m_4''(x,f^*)$ car $m_2''(x,f^*) + m_3''(x,f^*)$ est continu en 0. De manière similaire, on traite la régularité de $m_2''(x,f^*) + m_3''(x,f^*)$ en 1. Étudions en 0, la régularité des termes suivants (voir (2.60))

$$
\begin{aligned}
M_1(x,f^*) &= \int_0^1 e^{(x+s)K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds, \\
M_2(x,f^*) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{(x+s)K(x)}(K(x))^{-1}\right\}f^*(s)\,ds, \\
M_3(x,f^*) &= \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{e^{(x+s)K(x)}(K(x))^{-1}\right\}f^*(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Le terme $M_1(x,f^*)$ se traite d'une manière similaire à celle de $N_{\lambda 1}(f^*)(x)$ et le terme $M_2(x,f^*)$ se traite comme $(N_{\lambda i}(f^*)(x))_{i=2,3}$. Pour $M_3(x,f^*)$, on a

$$
\begin{aligned}
& M_3(x,f^*) \\
= \; & -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(x+s)z}(K(x)-zI)^{-1}(K(x))^{-1}\right)\right\}f^*(s)\,dzds \\
= \; & -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{(x+s)z}}{z}(K(x)-zI)^{-1}\right)\right\}f^*(s)\,dzds \\
= \; & -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{(x+s)z}(K(x)-zI)^{-1}\right\}f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{(x+s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\right\}f^*(s)\,dzds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} ze^{(x+s)z}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{1}{i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} \frac{e^{(x+s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
: &= \sum_{i=1}^{3} M_{3i}(x).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&-\frac{U_0(x)\,Y(x)}{2}M_3(x,f^*)+Q(x)\left(m_1(x,f^*)+m_4(x,f^*)\right) \\
&= -\frac{U_0(x)\,Y(x)}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{U_0(x)\,Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} \frac{e^{(x+s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds.
\end{aligned}
$$

Ces deux intégrales sont absolument convergentes grâce aux hypothèses (2.10) et (2.12). En utilisant la formule (2.19), il vient

$$
\begin{aligned}
&-\frac{U_0(x)\,Y(x)}{2}M_3(x)+Q(x)\left(m_1(x,f^*)+m_4(x,f^*)\right) \\
&= -\frac{U_0(x)\,Y(x)}{i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{U_0(x)\,Y(x)}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z}\frac{K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}}{z}\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2} \\
&\qquad\qquad \cdot K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{U_0(x)\,Y(x)}{i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\
&\qquad\qquad \cdot\left(\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\right)^2 f^*(s)\,dzds \\
&= -\frac{U_0(x)\,Y(x)}{i\pi}\left[I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)\right].
\end{aligned}
$$

Concernant le terme $I_1(x)$ ($I_3(x)$ se traite de la même manière), on a

$$
I_1(x)=\int_0^1\int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K\left(x\right) - zI\right)^{-1} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K\left(x\right) - zI\right)^{-1}_{|x=0} \right] f^*\left(s\right) dzds \\
&\quad + \int_0^1 \int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z} \frac{\partial}{\partial x} \left(K\left(x\right) - zI\right)^{-1}_{|x=0} f^*\left(s\right) dzds \\
&= \left(I_{11}\right) + \left(I_{12}\right).
\end{aligned}$$

D'où, quand $x \to 0$,

$$\left\|\left(I_{11}\right)\right\|_X \leqslant Cx^{\eta} \left\|f^*\right\|_{C(X)} \to 0, \left\|\left(I_{12}\right)\right\|_X \leqslant Cx^{\nu} \left\|f^*\right\|_{C(X)} \to 0.$$

Le terme $I_2\left(x\right)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
I_2\left(x\right) &= \int_0^1 \int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z} \frac{K(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1}}{z} \frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2} \\
&\quad \cdot \left[K(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1} - K(0)\left(K(0) - zI\right)^{-1}\right] f^*\left(s\right) dzds \\
&\quad + \int_0^1 \int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z} \frac{K(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1}}{z} \left[\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2} - \frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2}_{|x=0} \right] \\
&\quad \cdot K(0)\left(K(0) - zI\right)^{-1} f^*\left(s\right) dzds \\
&\quad + \int_0^1 \int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z} \frac{\left[K(x)\left(K(x) - zI\right)^{-1} - K(0)\left(K(0) - zI\right)^{-1}\right]}{z} \\
&\quad \cdot \frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2}_{|x=0} K(0)\left(K(0) - zI\right)^{-1} f^*\left(s\right) dzds \\
&= \left(I_{21}\right) + \left(I_{22}\right) + \left(I_{23}\right),
\end{aligned}$$

et quand $x \to 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I_{21}\right)\right\|_X &\leqslant Cx \left\|f^*\right\|_{C(X)} \to 0, \left\|\left(I_{22}\right)\right\|_X \leqslant Cx^{\eta} \left\|f^*\right\|_{C(X)} \to 0, \\
\left\|\left(I_{23}\right)\right\|_X &\leqslant Cx \left\|f^*\right\|_{C(X)} \to 0.
\end{aligned}$$

Finalement, il résulte

$$\begin{aligned}
& m_1''\left(x, f^*\right) + m_4''\left(x, f^*\right) + Q\left(x\right)\left(m_1\left(x, f^*\right) + m_4\left(x, f^*\right)\right) \qquad (2.62) \\
&= \frac{1}{2}\left[U_0\left(x\right) Y''\left(x\right) + 2U_0'\left(x\right) Y'\left(x\right) + U_0''\left(x\right) Y\left(x\right)\right] \int_0^1 e^{(x+s)K(x)} \left(K(x)\right)^{-1} f^*\left(s\right) ds \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[2U_0'\left(x\right) Y\left(x\right) + 2U_0\left(x\right) Y'\left(x\right)\right] \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left\{e^{(x+s)K(x)} \left(K(x)\right)^{-1}\right\} f^*\left(s\right) ds \\
&\quad + \frac{U_0\left(x\right) Y\left(x\right)}{2i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} e^{(x+s)z} \frac{\partial}{\partial x} \left(K\left(x\right) - zI\right)^{-1} f^*\left(s\right) dzds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{U_0(x)\,Y(x)}{4i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x+s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
: & = P_\lambda(f^*)(x)=\sum_{i=1}^{4}P_{\lambda i}(f^*)(x).
\end{aligned}
$$

De la même manière, on traite le terme $m_2''(x,f^*)+m_3''(x,f^*)$ en 1 (voir (2.61)) . Pour cela, il suffit de regarder les termes suivants:

$$
\begin{aligned}
L_1(x,f^*) &= \int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds, \\
L_2(x,f^*) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{(2-(x+s))K(x)}(K(x))^{-1}\right\}f^*(s)\,ds, \\
L_3(x,f^*) &= \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{e^{(2-(x+s))K(x)}(K(x))^{-1}\right\}f^*(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Pour $L_1(x,f^*)$ et $L_2(x,f^*)$, voir l'étude de $N_{\lambda i}(f^*)(x)$, $i=4,5,6$. Concernant le terme $L_3(x,f^*)$, comme ce qu'on a fait pour $M_3(x,f^*)$, on écrit

$$
\begin{aligned}
& L_3(x,f^*) \\
= & -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(2-(x+s))z}\left[(K(x)-zI)^{-1}(K(x))^{-1}\right]\right)\right\}f^*(s)\,dzds \\
= & -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{(2-(x+s))z}}{z}(K(x)-zI)^{-1}\right)\right\}f^*(s)\,dzds \\
= & \frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{(2-(x+s))z}(K(x)-zI)^{-1}\right\}f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{(2-(x+s))z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\right\}f^*(s)\,dzds \\
= & -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}ze^{(2-(x+s))z}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
& +\frac{1}{i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}e^{(2-(x+s))z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(2-(x+s))z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds
\end{aligned}
$$

$$:= \sum_{i=1}^{3} L_{3i}(x).$$

D'où

$$\begin{aligned}
& -\frac{U_1(x)Y(x)}{2} L_3(x, f^*) + Q(x)(m_2(x, f^*) + m_3(x, f^*)) \\
= \quad & -\frac{U_1(x)Y(x)}{2i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} e^{(2-(x+s))z} \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dzds \\
& +\frac{U_1(x)Y(x)}{4i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(2-(x+s))z}}{z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dzds.
\end{aligned}$$

Finalement, il résulte

$$\begin{aligned}
& m_2''(x, f^*) + m_3''(x, f^*) + Q(x)(m_2(x, f^*) + m_3(x, f^*)) \qquad (2.63) \\
= \quad & -\frac{1}{2}[U_1(x)Y''(x) + 2U_1'(x)Y'(x) + U_1''(x)Y(x)] \int_0^1 e^{(2-(x+s))K(x)} (K(x))^{-1} f^*(s)\, ds \\
& -\frac{1}{2}[2U_1'(x)Y(x) + 2U_1(x)Y'(x)] \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ e^{(2-(x+s))K(x)} (K(x))^{-1} \right\} f^*(s)\, ds \\
& -\frac{U_1(x)Y(x)}{2i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} e^{(2-(x+s))z} \frac{\partial}{\partial x} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dzds \\
& +\frac{U_1(x)Y(x)}{4i\pi} \int_0^1 \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(2-(x+s))z}}{z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x) - zI)^{-1} f^*(s)\, dzds \\
: \quad & = Q_\lambda(f^*)(x) = \sum_{i=1}^{4} Q_{\lambda i}(f^*)(x).
\end{aligned}$$

Toutes ces intégrales sont bien définies grâce aux propriétés des semi-groupes et aux hypothèses (2.10) et (2.12). Donc

$$Op(m(., f^*))(x) = M_\lambda(f^*)(x) + N_\lambda(f^*)(x), \qquad (2.64)$$

où

$$M_\lambda(f^*)(x) = P_\lambda(f^*)(x) + Q_\lambda(f^*)(x). \qquad (2.65)$$

(voir (2.62) et (2.63)). ■

2.5.3 Régularité de l'opérateur $Op(v)$

Proposition 2.5.4 *Supposons que les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.15) sont vérifiées. Alors, la fonction $x \mapsto Op(v(.,f^*))(x)$ appartient à l'espace $C^{\min(\beta,\eta+\nu-1)}([0,1];X)$.*

Preuve. On rappelle que, pour $x \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} v(x,f^*) &= \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds, \end{aligned}$$

où $f^* \in C^\beta([0,1];X)$ (β est à déterminer, $0<\beta<1$). On a

$$\begin{aligned} Q(x)\,v(x,f^*) &= -\frac{1}{2}\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))\,ds \\ &-\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)e^{(s-x)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))\,ds \\ &+f^*(x)-\frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(x)-\frac{1}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(x). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Grâce aux propriétés des semi-groupes analytiques et l'höldérianité de f^*, les deux premières intégrales sont absolument convergentes. Par exemple, on a

$$\left\| -\frac{1}{2}\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))\,ds \right\|_X \leqslant Cx^\beta \|f^*\|_{C^\beta(X)}.$$

D'autre part, pour dériver $v(x,f^*)$, on utilise la formule (1.5) et on obtient

$$\begin{aligned} v'(x,f^*) &= \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}f^*(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}f^*(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(x-s)}(K(x))^{-1}f^*(s)\,ds \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(s-x)} (K(x))^{-1} f^*(s)\,ds$$
$$: \;=\sum_{i=1}^{6} w_i(x,f^*).$$

Tous ces termes sont bien définis grâce aux propriétés des semi-groupes et à l'hypothèse (2.10). D'autre part, calculons le terme $v''(x,f^*)+Q(x)\,v(x,f^*)$.

Remarque 2.5.1 *Il est important de signaler ici que le calcul du terme $v''(x,f^*)$ n'est pas facile à justifier. Pour cela, On aura besoin de :*

1. *Simplifier les termes $w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*)$ et $w_4(x,f^*)+w_6(x,f^*)$ afin de pouvoir justifier leurs dérivées.*

2. *Introduire une nouvelle fonction $v'_\varepsilon(x)$ et justifier le calcul de sa dérivée $v''_\varepsilon(x)$.*

1. Pour simplifier les termes $w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*)$ et $w_4(x,f^*)+w_6(x,f^*)$, on utilise le calcul fonctionnel de Dunford. On a

$$\begin{aligned}
& w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*)\\
= \;& \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} f^*(s)\,ds\\
& +\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(x-s)} (K(x))^{-1} f^*(s)\,ds\\
= \;& -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1} f^*(s)\,dzds\\
& -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}(K(x))^{-1}\right) f^*(s)\,dzds\\
= \;& \beta_1(x)+\beta_2(x).
\end{aligned}$$

De la formule (voir la preuve du lemme 2.4.6)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}(K(x))^{-1}-\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\\
= \;& -\frac{1}{z}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}-(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1},
\end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\beta_2(x) &= \frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad +\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}e^{(x-s)z}(K(x)-zI)^{-1}\frac{d}{dx}(K(x))^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&= \beta_{21}(x)+\beta_{22}(x)+\beta_{23}(x).
\end{aligned}$$

D'où $\beta_1(x)+\beta_{23}(x)=0$ et par intégration à gauche de la courbe Γ_1, it résulte $\beta_2(x)=0$. Alors

$$\begin{aligned}
&w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*) \\
&= -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds.
\end{aligned}\tag{2.68}$$

Cette intégrale est absolument convergente, car

$$\left\|-\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds\right\|_X\leqslant Cx^{\nu+1}\|f^*\|_{C(X)}.$$

D'une manière similaire, on obtient

$$\begin{aligned}
&w_4(x,f^*)+w_6(x,f^*) \\
&= -\frac{1}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds.
\end{aligned}\tag{2.69}$$

Ainsi, en vertu de (2.68) et (2.69), il vient

$$\begin{aligned}
&w_3(x,f^*)+w_4(x,f^*)+w_5(x,f^*)+w_6(x,f^*) \\
&= -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{1}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} v'(x,f^*) &= w_1(x,f^*)+w_2(x,f^*) \\ &\quad -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\ &\quad -\frac{1}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds. \end{aligned}$$

Tous ces termes sont bien définis grâce aux propriétés des semi-groupes et à l'hypothèse (2.10) et on a de même pour $B(x)\,v'(x,f^*)$, où

$$\begin{aligned} & B(x)\,v'(x,f^*) \\ =\; & B(x)\,w_1(x,f^*)+B(x)\,w_2(x,f^*) \\ & -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\ & -\frac{B(x)}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\ :\; & = W_\lambda(f^*)(x)=\sum_{i=1}^{4}W_{\lambda i}(f^*)(x)\,, \end{aligned} \tag{2.70}$$

d'où

$$B(0)\,v'(0,f^*)\in\overline{D(K(0))}=\overline{D(Q(0))}.$$

Le calcul du terme $w_3'(x,f^*)+w_4'(x,f^*)+w_5'(x,f^*)+w_6'(x,f^*)$, nous donne

$$\begin{aligned} & w_3'(x,f^*)+w_4'(x,f^*)+w_5'(x,f^*)+w_6'(x,f^*) \\ =\; & -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}e^{(x-s)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\ & -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\ & +\frac{1}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}e^{(s-x)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds \\ & -\frac{1}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds. \end{aligned}$$

En d'autres termes

$$\begin{aligned}
& w_3'(x,f^*) + w_4'(x,f^*) + w_5'(x,f^*) + w_6'(x,f^*) \\
= \; & \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(x-s)} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(s-x)} f^*(s)\,ds \\
& -\frac{1}{4i\pi}\int_x^1 \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\,dzds.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Toutes ces intégrales sont absolument convergentes (voir les hypothèses (2.10) et (2.12)). Par exemple pour le deuxième terme, on a

$$\left\| -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\,dzds \right\| \leqslant Cx^{\nu}\left\|f^*\right\|_{C(X)}.$$

2. D'abord, si on dérive directement le terme $w_1(x,f^*) + w_2(x,f^*)$ qui figure dans le calcul du terme $v'(x,f^*)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& w_1'(x,f^*) + w_2'(x,f^*) \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{(x-s)K(x)} f^*(s)\,ds - \int_x^1 e^{(s-x)K(x)} f^*(s)\,ds\right)' \\
= \; & -\frac{1}{4\pi i}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\,dzds\right) \\
& +\frac{1}{4\pi i}\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 \int_{\Gamma_1} e^{(s-x)z}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\,dzds\right) \\
= \; & -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (K(x)-zI)^{-1} f^*(x)\,dz \\
& -\frac{1}{4\pi i}\int_0^x \int_{\Gamma_1} z e^{(x-s)z}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4\pi i}\int_0^x \int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1} f^*(s)\,dzds
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_x^1\int_{\Gamma_1} ze^{(s-x)z}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds$$
$$+\frac{1}{4\pi i}\int_x^1\int_{\Gamma_1} e^{(s-x)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(s)\,dzds,$$

l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\left(K(x)-zI\right)^{-1}f^*(x)\,dz$ n'a pas de sens. En effet, Il suffit d'utiliser l'identité de la résolvante

$$\left(K(x)-zI\right)^{-1}=\frac{K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}}{z}-\frac{I}{z}.$$

Ensuite, par un calcul simple, on déduit que l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f^*(x)}{z}dz$ est divergente. D'où le résultat. Pour cela, on utilise la méthode présentée, par exemple, dans H. Tanabe [36], théorème 3.3.4, p. 70. On considère $0<\varepsilon\leqslant x<1$ et on introduit la fonction $v_\varepsilon'(x)$ définie par

$$\begin{aligned} v_\varepsilon'(x) &= w_1^\varepsilon(x,f^*)+w_2^\varepsilon(x,f^*)\\ &\quad +w_3(x,f^*)+w_5(x,f^*)+w_4(x,f^*)+w_6(x,f^*)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} & w_1^\varepsilon(x,f^*)+w_2^\varepsilon(x,f^*)\\ =\ & \frac{1}{2}\int_0^{x-\varepsilon} e^{(x-s)K(x)}f^*(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_{x+\varepsilon}^1 e^{(s-x)K(x)}f^*(s)\,ds.\end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} v_\varepsilon''(x) &= (w_1^\varepsilon)'(x,f^*)+(w_2^\varepsilon)'(x,f^*)\\ &\quad +w_3'(x,f^*)+w_4'(x,f^*)+w_5'(x,f^*)+w_6'(x,f^*),\end{aligned}$$

avec

$$v_\varepsilon''(x)\to v''(x),\quad \text{quand}\ \ \varepsilon\to 0.$$

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned}
& \left(w_1^{\varepsilon}\right)'(x,f^*)+\left(w_2^{\varepsilon}\right)'(x,f^*) \\
= \ & \frac{1}{2}e^{\varepsilon K(x)}(f^*(x-\varepsilon)+f^*(x+\varepsilon))-e^{\varepsilon K(x)}f^*(x)+\frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(x) \\
& +\frac{1}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(x)+\frac{1}{2}\int_0^{x-\varepsilon}K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds \\
& +\frac{1}{2}\int_{x+\varepsilon}^{1}K(x)e^{(s-x)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^{x-\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(x-s)}f^*(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}\int_{x+\varepsilon}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(s-x)}f^*(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Quand $\varepsilon\to 0$, on aura

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(w_1^{\varepsilon}\right)'(x,f^*)+\left(w_2^{\varepsilon}\right)'(x,f^*)\right] \\
= \ & \frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(x)+\frac{1}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(x) \\
& +\frac{1}{2}\int_0^{x}K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds \\
& +\frac{1}{2}\int_x^{1}K(x)e^{(s-x)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds \\
& +\frac{1}{2}\int_0^{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(x-s)}f^*(s)\,ds \\
& -\frac{1}{2}\int_x^{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(s-x)}f^*(s)\,ds.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Tous ces termes sont bien définis grâce aux propriétés des semi-groupes, l'höldérianité de f^* et l'hypothèse (2.10). Donc, de (2.72) et (2.71), on déduit

$$\begin{aligned}
v''(x) = \ & \frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(x)+\frac{1}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(x) \\
& +\frac{1}{2}\int_0^{x}K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{1} K(x)e^{(s-x)K(x)}(f^{*}(s)-f^{*}(x))ds \\
&+\int\limits_{0}^{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(x-s)} f^{*}(s)\,ds \\
&-\int\limits_{x}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(s-x)} f^{*}(s)\,ds \\
&-\frac{1}{4i\pi}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^{*}(s)\,dzds \\
&-\frac{1}{4i\pi}\int\limits_{x}^{1}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^{*}(s)\,dzds.
\end{aligned}
$$

Toutes ces intégrales sont absolument convergentes grâce aux propriétés des semi-groupes, l'höldérianité de f^* et aux hypothèses (2.10) et (2.12). Par conséquent, (2.73) et (2.66) impliquent

$$v''(x,f^{*})+Q(x)\,v(x,f^{*})=f^{*}(x)+V_{\lambda}(f^{*})(x),$$

où

$$
\begin{aligned}
V_{\lambda}(f^{*})(x) &= \int\limits_{0}^{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(x-s)} f^{*}(s)\,ds \\
&\quad -\int\limits_{x}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\eta K(x)}\right)_{|\eta=(s-x)} f^{*}(s)\,ds \\
&\quad -\frac{1}{4i\pi}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^{*}(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{1}{4i\pi}\int\limits_{x}^{1}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^{*}(s)\,dzds \\
: &= \sum_{i=1}^{4} V_{\lambda i}(f^{*})(x).
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

En utilisant (2.15), on obtient

$$V_{\lambda}(f^{*})(0)\in\overline{D(K(0))}=\overline{D(Q(0))},\quad V_{\lambda}(f^{*})(1)\in\overline{D(K(1))}=\overline{D(Q(1))}.$$

Les calculs précédents conduisent à

$$Op(v(.,f^*))(x) = f^*(x) + V_\lambda(f^*)(x) + W_\lambda(f^*)(x). \tag{2.75}$$

Du fait que $V_\lambda(f^*) + W_\lambda(f^*) \in C^{\eta+\nu-1}([0,1]\,;X)$ et $f^* \in C^\beta([0,1]\,;X)$, on conclut que la fonction $x \mapsto Op(v(.,f^*))(x)$ appartient à l'espace $C^{\min(\beta,\eta+\nu-1)}([0,1]\,;X)$.

■

Remarque 2.5.2 *Notons que l'étude de l'appartenance à la classe C^α (où $0 < \alpha < 1$) faite précédemment s'est restreinte aux voisinages des points 0 et 1. On en déduit la même propriété dans $[0,1]$. Voir le chapitre 3 (sur la régularité maximale de la solution).*

2.6 L'équation vérifiée par la solution et sa résolution

En vertu de tous les calculs précédents, on déduit que la représentation figurant dans (2.24) satisfait l'équation abstraite suivante :

$$\begin{aligned} & u''(x) + B(x)\,u'(x) + Q(x)\,u(x) \qquad (2.76)\\ = \;& Op(u)(x) \\ = \;& Op(d_0(x)\,\varphi) + Op(d_1(x)\,\psi) + Op(m(x,f^*) + Op(v(x,f^*) \\ = \;& (F_\lambda(x)\varphi + G_\lambda(x)\varphi) + (S_\lambda(x)\psi + T_\lambda(x)\psi) + (M_\lambda(f^*)(x) + N_\lambda(f^*)(x)) \\ & + (V_\lambda(f^*)(x) + W_\lambda(f^*)(x) + f^*(x)) \\ = \;& f(x), \quad \text{pour} \quad x \in \,]0,1[\,, \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} Op(d_0(x)\,\varphi) = F_\lambda(x)\varphi + G_\lambda(x)\,\varphi, \\ Op(d_1(x)\,\psi) = S_\lambda(x)\psi + T_\lambda(x)\psi \\ Op(m(x,f^*) = M_\lambda(f^*)(x) + N_\lambda(f^*)(x) \\ Op(v(x,f^*) = V_\lambda(f^*)(x) + W_\lambda(f^*)(x) + f^*(x)\,. \end{cases}$$

Pour déterminer la fonction inconnue f^*, on doit résoudre l'équation abstraite

$$(I + R_\lambda)(f^*)(.) = f(.) - F_\lambda(.)\,\varphi - G_\lambda(.)\varphi - S_\lambda(.)\,\psi - T_\lambda(.)\psi, \tag{2.77}$$

sachant que

$$R_\lambda(f^*)(x) = M_\lambda(f^*)(x) + N_\lambda(f^*)(x) + V_\lambda(f^*)(x) + W_\lambda(f^*)(x). \tag{2.78}$$

pour cela, on aura besoin d'inverser l'opérateur $I + R_\lambda$ dans un espace approprié.

Résolution de l'équation vérifiée par la solution

Proposition 2.6.1 *Soit* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$, $\varphi \in D(Q(0))$ *et* $\psi \in D(Q(1))$. *Supposons que u donnée dans (2.24) est une solution stricte de problème (2.1)-(2.2). Alors, la fonction* f^* *vérifie dans l'espace* $C([0,1];X)$, *l'équation (2.77). De plus, il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda^*$, *l'opérateur* $I + R_\lambda$ *est inversible dans l'espace* $C([0,1];X)$ *et*

$$(f^*)(x) = (I + R_\lambda)^{-1}[f(x) - F_\lambda(x)\varphi - G_\lambda(x)\varphi - S_\lambda(x)\psi - T_\lambda(x)\psi]. \tag{2.79}$$

Preuve. Pour résoudre l'équation (2.77) dans l'espace $C([0,1];X)$, on doit estimer $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(C([0,1];X))}$ (voir (2.78)), (pour $\lambda > 0$, assez grand). Par exemple, on estime les termes écrits dans $V_\lambda(f^*)(x)$ où

$$\begin{aligned}
V_\lambda(f^*)(x) &= \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\xi K(x)}\right)_{|\xi=(x-s)} f^*(s)\,ds - \int_x^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\xi K(x)}\right)_{|\xi=(s-x)} f^*(s)\,ds \\
&\quad -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
&\quad -\frac{1}{4i\pi}\int_x^1\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(s-x)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds \\
:&= \sum_{i=1}^{4} V_{\lambda i}(f^*)(x).
\end{aligned}$$

En vertu de la remarque 2.1.2 et l'estimation (2.34), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|V_{\lambda 1}(f^*)(x) + V_{\lambda 2}(f^*)(x)\|_X \\
\leqslant\ & \frac{C_1}{\lambda^{(1-\eta)/2}}\|f^*\|_{C(X)}\int_0^x (x-s)^{(\eta+\nu-1)-1}ds \\
&+\frac{C_2}{\lambda^{(1-\eta)/2}}\|f^*\|_{C(X)}\int_x^1 (s-x)^{(\eta+\nu-1)-1}ds \\
\leqslant\ & \frac{C}{\lambda^{(1-\eta)/2}}\|f^*\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

Pour le terme $V_{\lambda 3}(f^*)(x)$ (on traite d'une manière analogue $V_{\lambda 4}(f^*)(x)$), en utilisant la formule (2.19), on écrit

$$V_{\lambda 3}(f^*)(x) = -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1}\frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}f^*(s)\,dzds$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\frac{K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}}{z}\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2} \\
& \cdot K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} \\
& \cdot \left(\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}\right)^2 f^*(s)\,dzds,
\end{aligned}
$$

et de l'identité de la résolvante

$$
\frac{K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}}{z} = \left(K(x)-zI\right)^{-1} + \frac{I}{z},
$$

il vient

$$
\begin{aligned}
& V_{\lambda 3}(f^*)(x) \\
= \quad & -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2}\frac{K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1}}{z} f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx} \\
& \cdot K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
= \quad & -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2}K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2}\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{4i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} \frac{e^{(x-s)z}}{z}\frac{d^2\left(K(x)\right)^{-1}}{dx^2} f^*(s)\,dzds \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_0^x\int_{\Gamma_1} e^{(x-s)z}\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)-zI\right)^{-1}\frac{d\left(K(x)\right)^{-1}}{dx} \\
& \cdot K(x)\left(K(x)-zI\right)^{-1} f^*(s)\,dzds \\
= \quad & (R_1)+(R_2)+(R_3)+(R_4).
\end{aligned}
$$

On remarque que $(R_3) = 0$. Pour le terme (R_1)(on fait de même pour (R_2)), en utilisant les propriétés

$$\begin{cases} \exists C > 0 : \forall \lambda > 0, \quad \forall z \in \Gamma_1 \\ \left| z + \sqrt{\lambda} \right| \geqslant C \left| z \right| \ ; \quad \left| z + \sqrt{\lambda} \right| \geqslant C\sqrt{\lambda}, \end{cases}$$

(voir [26]) et en vertu de la remarque 2.4.1, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left\| (R_1) \right\|_X &\leqslant C \left\| f^* \right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{\left| e^{(x-s)z} \right|}{\left| z + \sqrt{\lambda} \right|} \left| dz \right| ds \\
&\leqslant C \left\| f^* \right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{\left| e^{(x-s)z} \right|}{\left| z + \sqrt{\lambda} \right|^{1/2} \left| z \right|^{1/2}} \left| dz \right| ds \\
&\leqslant C \left\| f^* \right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\lambda^{1/4}} \frac{e^{\mathrm{Re}(\sigma)} d \left| \sigma \right|}{\left(\frac{\left| \sigma \right|}{(x-s)} \right)^{1/2} (x-s)} ds \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda^{1/4}} \left\| f^* \right\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

Pour le terme (R_4), on a

$$\begin{aligned}
\left\| (R_4) \right\|_X &\leqslant C \left\| f^* \right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{\left| e^{(x-s)z} \right|}{\left| z + \sqrt{\lambda} \right|^{\nu}} \left| dz \right| ds \\
&\leqslant C \left\| f^* \right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{\left| e^{(x-s)z} \right| \left| dz \right| ds}{\left| z + \sqrt{\lambda} \right|^{\nu+\eta-1} \left| z + \sqrt{\lambda} \right|^{1-\eta}} \\
&\leqslant C \left\| f^* \right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\lambda^{(\nu+\eta-1)/2}} \frac{e^{\mathrm{Re}(\sigma)} d \left| \sigma \right|}{\left(\frac{\left| \sigma \right|}{(x-s)} \right)^{1-\eta} (x-s)} ds \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda^{(\nu+\eta-1)/2}} \left\| f^* \right\|_{C(X)} \int_0^x (x-s)^{-\eta} \, ds \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda^{(\nu+\eta-1)/2}} \left\| f^* \right\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

Concernant le terme $W_\lambda(f^*)(x)$, voir (2.70). Pour $W_{\lambda 1}(f^*)(x)$, puisque l'opérateur B est borné et grâce au lemme 2.4.2, pour $\omega > 0$, on a

$$\left\| W_{\lambda 1}(f^*)(x) \right\|_X = \left\| \frac{B(x)}{2} \int_0^x e^{(x-s)K(x)} f^*(s) \, ds \right\|_X$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\left\|f^*\right\|_{C(X)} \int_0^x e^{-\omega(x-s)\sqrt{\lambda}} ds \\
&\leqslant C\left\|f^*\right\|_{C(X)} \left[\frac{e^{-\omega(x-s)\sqrt{\lambda}}}{\omega\sqrt{\lambda}}\right]_0^x \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda^{1/2}}\left\|f^*\right\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

On fait de même pour $W_{\lambda 2}(f^*)(x)$. Pour $W_{\lambda 3}(f^*)(x)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|W_{\lambda 3}(f^*)(x)\right\|_X \\
&\leqslant C\left\|f^*\right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{\left|e^{(x-s)z}\right|}{|z|\left|z+\sqrt{\lambda}\right|^{\nu}} |dz|\, ds \\
&\leqslant C\left\|f^*\right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mathrm{Re}(\sigma)} d|\sigma|}{\left(\frac{|\sigma|}{(x-s)}\right)\left|\frac{\sigma}{(x-s)}+\sqrt{\lambda}\right|^{\nu}(x-s)} ds \\
&\leqslant C\left\|f^*\right\|_{C(X)} \int_0^x \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mathrm{Re}(\sigma)} d|\sigma|}{\left(\frac{|\sigma|}{(x-s)}\right)\left(\sqrt{\lambda}\right)^{\nu}(x-s)} ds \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda^{\nu/2}}\left\|f^*\right\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

On fait de même pour $W_{\lambda 4}(f^*)(x)$. D'une manière analogue, on traite les opérateurs $N_\lambda(f^*)(x)$ (voir (2.58)) et $M_\lambda(f^*)(x)$ (voir (2.65)). En conclusion, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|R_\lambda(f^*)(x)\right\|_X \\
&\leqslant C\left(\frac{1}{\lambda^{(\nu+\eta-1)/2}}+\frac{1}{\lambda^{\nu/2}}+\frac{1}{\lambda^{(1-\eta)/2}}+\frac{1}{\lambda^{1/2}}+\frac{1}{\lambda^{1/4}}\right)\left\|f^*\right\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$R_\lambda \in \mathcal{L}\left(C\left([0,1];X\right)\right),$$

ceci implique

$$\left\|R_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(C([0,1];X))} \leqslant C\left(\frac{1}{\lambda^{(\nu+\eta-1)/2}}+\frac{1}{\lambda^{\nu/2}}+\frac{1}{\lambda^{(1-\eta)/2}}+\frac{1}{\lambda^{1/2}}+\frac{1}{\lambda^{1/4}}\right).$$

Ainsi, il existe $\lambda^* > 0$ tel que

$$\forall \lambda \geqslant \lambda^*,\ \left\|R_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(C([0,1];X))} < 1.$$

■

Par conséquent, l'opérateur $I + R_\lambda$ est inversible et $(I + R_\lambda)^{-1}$ existe. On en déduit que l'équation intégrale (2.77) admet une solution unique donnée par la formule (2.79).

Dans ce qui suit, on aura besoin du résultat suivant concernant $f^*(0)$ et $f^*(1)$.

Proposition 2.6.2 *Soit $\varphi \in D(Q(0))$, $\psi \in D(Q(1))$ et $f \in C^\theta([0,1];X)$. Supposons que u donnée dans (2.24) est une solution stricte du problème (2.1)-(2.2), alors*

$$f^*(0) = f(0) + \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi + \Phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi), \tag{2.80}$$

où

$$\Phi_0^*(\varphi) \in \overline{D(K(0))} \quad et \quad r_0(f^*, \psi) \in \overline{D(K(0))},$$

et

$$f^*(1) = f(1) + \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=1} K(1)\psi + \Phi_1^*(\psi) + r_1(f^*, \varphi), \tag{2.81}$$

où

$$\Phi_1^*(\psi) \in \overline{D(K(1))} \quad et \quad r_1(f^*, \varphi) \in \overline{D(K(1))}.$$

De plus

$$f^* \in C^\beta([0,1];X), \ \text{où} \quad \beta = \min(\theta, \ \eta + \nu - 1).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} f^*(0) &= f(0) - F_\lambda(0)\varphi - G_\lambda(0)\varphi - S_\lambda(0)\psi - T_\lambda(0)\psi \\ &\quad - M_\lambda(f^*)(0) - N_\lambda(f^*)(0) - V_\lambda(f^*)(0) - W_\lambda(f^*)(0). \end{aligned}$$

Le terme

$$\begin{aligned} &-S_\lambda(0)\psi - T_\lambda(0)\psi - M_\lambda(f^*)(0) - N_\lambda(f^*)(0) \\ &-V_\lambda(f^*)(0) - W_\lambda(f^*)(0) := r_0(f^*, \psi) \end{aligned}$$

est dans $\overline{D(K(0))}$ et le terme

$$\begin{aligned} &-F_\lambda(1)\varphi - G_\lambda(1)\varphi - M_\lambda(f^*)(1) - N_\lambda(f^*)(1) \\ &-V_\lambda(f^*)(1) - W_\lambda(f^*)(1) := r_1(f^*, \varphi) \end{aligned}$$

est dans $\overline{D(K(1))}$. Grâce à (2.52), on a vu que

$$F_\lambda(0)\varphi + G_\lambda(0)\varphi = \Phi_0^*(\varphi) - \frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi$$

où $\Phi_0^*(\varphi) \in \overline{D(K(0))}$. Donc

$$f^*(0) = f(0) + \frac{d^2}{dx^2} \left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi + \Phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi),$$

où $\Phi_0^*(\varphi) \in \overline{D(K(0))}$ et $r_0(f^*, \psi) \in \overline{D(K(0))}$.

De même, (2.56) implique

$$f^*(1) = f(1) + \frac{d^2}{dx^2} \left(K(x)\right)^{-1}_{|x=1} K(1)\psi + \Phi_1^*(\psi) + r_1(f^*, \varphi),$$

où $\Phi_1^*(\psi) \in \overline{D(K(1))}$ et $r_1(f^*, \varphi) \in \overline{D(K(1))}$. On sait que, sous nos hypothèses et du fait que $\varphi \in D\left((K(0))^2\right)$ et $\psi \in D\left((K(1))^2\right)$ la fonction

$$\begin{aligned} x \quad \mapsto \quad & F_\lambda(x)\varphi + G_\lambda(x)\varphi + S_\lambda(x)\psi + T_\lambda(x)\psi + M_\lambda\left(f^*\right)(x) \\ & + N_\lambda\left(f^*\right)(x) + V_\lambda(f^*)(x) + W_\lambda(f^*)(x) \end{aligned}$$

appartient à l'espace $C^{\eta+\nu-1}([0,1];X)$. On en déduit que si f^* existe, elle appartient nécessairement à l'espace $C^{\min(\eta+\nu-1,\theta)}([0,1];X)$. Donc $\beta = \min\left(\theta,\ \eta+\nu-1\right)$. ■

2.7 Résultat essentiel d'existence et d'unicité de la solution

Voici le résultat essentiel d'existence et d'unicité de la solution stricte du problème (2.1)-(2.2) qu'on va montrer ici.

Théorème 2.7.1 *Soit $\varphi \in D\left((K(0))^2\right)$, $\psi \in D\left((K(1))^2\right)$ et $f \in C^\theta\left([0,1];X\right)$, $0 < \theta < 1$. Supposons que les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.15) sont vérifiées. Alors, il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, la fonction u donnée dans la représentation (2.22) est la solution stricte unique du problème (2.1)-(2.2) si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) + (K(0))^2\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}, \\ \\ f(1) + \left(K(1)\right)^2\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=1} K(1)\psi \in \overline{D(K(1))} = \overline{D(Q(1))}. \end{array} \right. \tag{2.82}$$

Ce résultat peut s'écrire aussi sous la forme suivante:

Théorème 2.7.2 *Soit $\varphi \in D\left(A(0)\right)$, $\psi \in D\left(A(1)\right)$ et $f \in C^\theta\left([0,1];X\right)$, $0 < \theta < 1$. Supposons que les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.10)∼(2.15) sont vérifiées. Alors, il existe*

$\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, la fonction u donnée dans la représentation (2.22) est la solution stricte unique du problème (2.1)-(2.2) si et seulement si

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\lambda - A(x)\right)^{-1/2}_{|x=0}\left(\lambda - A(0)\right)^{1/2}\varphi \in \overline{D(A(0))}, \\ \\ f(1) - A(1)\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\lambda - A(x)\right)^{-1/2}_{|x=1}\left(\lambda - A(1)\right)^{1/2}\psi \in \overline{D(A(1))}. \end{cases}$$

Preuve. On doit vérifier que la représentation suivante

$$\begin{aligned} u(x) &= Y(x)\left(I - e^{(2-2x)K(x)}\right)e^{xK(x)}\varphi + Y(x)\left(I - e^{2xK(x)}\right)e^{(1-x)K(x)}\psi \\ &\quad - \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds \\ &\quad + \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(2+x-s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds \\ &\quad - \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x-s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds \\ &\quad + \frac{Y(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x+s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)K(x)}\left(K(x)\right)^{-1}f^*(s)\,ds, \end{aligned}$$

nous donne une solution stricte. Il suffit de considérer le cas $\psi = 0$ et montrer que

$$x \mapsto Q(x)u(x) = -(K(x))^2u(x) \in C([0,1];X)$$

si et seulement si

$$f(0) + (K(0))^2\varphi + \frac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}.$$

On a

$$\begin{aligned} &(K(x))^2u(x) \\ &= Y(x)\left(I - e^{(2-2x)K(x)}\right)(K(x))^2e^{xK(x)}\varphi + (K(x))^2m(x,f^*) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}f^*(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)e^{(s-x)K(x)}f^*(s)\,ds\\
=\;& Y(x)\left(I-e^{(2-2x)K(x)}\right)(K(x))^2e^{xK(x)}\varphi+(K(x))^2m(x,f^*)\\
&+\frac{1}{2}\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds\\
&+\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)e^{(s-x)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}f^*(x)\,ds+\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)e^{(s-x)K(x)}f^*(x)\,ds,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
(K(x))^2u(x) =\;& Y(x)\left(I-e^{(2-2x)K(x)}\right)(K(x))^2e^{xK(x)}\varphi+(K(x))^2m(x,f^*)\\
&+\frac{1}{2}\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds\\
&+\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)e^{(s-x)K(x)}(f^*(s)-f^*(x))ds\\
&+\frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(x)+\frac{1}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(x)-f^*(x)\,.
\end{aligned}
$$

D'autre part, pour $m(x,f^*)$, on va considérer seulement le premier terme (qui peut avoir une singularité en 0, les autres termes sont réguliers quand on leur applique $(K(x))^2$). On a

$$
\begin{aligned}
(K(x))^2m(x,f^*) =\;& -\frac{Y(x)\,K(x)}{2}\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}f^*(s)\,ds+R_m(x,f^*)\\
=\;& -\frac{Y(x)\,K(x)}{2}\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}(f^*(s)-f^*(0))ds\\
& -\frac{Y(x)\,K(x)}{2}\left(\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}ds\right)f^*(0)+R_m(x,f^*)\\
=\;& -\frac{Y(x)\,K(x)}{2}\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}(f^*(s)-f^*(0))ds\\
& -\frac{Y(x)}{2}\left(e^{K(x)}-I\right)e^{xK(x)}f^*(0)+R_m(x,f^*),
\end{aligned}
$$

avec

$$\begin{aligned}
R_m(x, f^*) &= \frac{Y(x)\,K(x)}{2}\int_0^1 e^{(2+x-s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,f^*(s)\,ds \\
&\quad -\frac{Y(x)\,K(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x-s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,f^*(s)\,ds \\
&\quad +\frac{Y(x)\,K(x)}{2}\int_0^1 e^{(2-x+s)K(x)}\,(K(x))^{-1}\,f^*(s)\,ds
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
(K(x))^2 u(x) &= Y(x)\left(I - e^{(2-2x)K(x)}\right)(K(x))^2 e^{xK(x)}\varphi \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(x) - \frac{Y(x)}{2}\left(e^{K(x)} - I\right)e^{xK(x)}f^*(0) \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(x) - f^*(x) \\
&\quad -\frac{Y(x)\,K(x)}{2}\int_0^1 e^{(x+s)K(x)}(f^*(s) - f^*(0))ds + R_m(x, f^*) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^x K(x)e^{(x-s)K(x)}(f^*(s) - f^*(x))ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_x^1 K(x)e^{(s-x)K(x)}(f^*(s) - f^*(x))ds.
\end{aligned}$$

Les quatre derniers termes sont continus sur $[0,1]$. Le terme $\frac{1}{2}e^{(1-x)K(x)}f^*(x)$ est facile à traiter. Regardons maintenant, les trois premiers termes

$$\begin{aligned}
&Y(x)\left(I - e^{(2-2x)K(x)}\right)(K(x))^2 e^{xK(x)}\varphi + \frac{1}{2}e^{xK(x)}f^*(x) \\
&-\frac{Y(x)}{2}\left(e^{K(x)} - I\right)e^{xK(x)}f^*(0) \\
= {}&\left[Y(x)\left(I - e^{(2-2x)K(x)}\right) - I\right](K(x))^2 e^{xK(x)}\varphi + (K(x))^2 e^{xK(x)}\varphi \\
&-\frac{[Y(x) - I]}{2}\left(e^{K(x)} - I\right)e^{xK(x)}f^*(0) - \frac{1}{2}e^{(1+x)K(x)}f^*(0) \\
&+\frac{1}{2}e^{xK(x)}(f^*(x) - f^*(0)) + e^{xK(x)}f^*(0).
\end{aligned}$$

Il reste à étudier le terme

$$(K(x))^2 e^{xK(x)}\varphi + e^{xK(x)}f^*(0).$$

Écrivons

$$\begin{aligned}
& (K(x))^2 e^{xK(x)}\varphi + e^{xK(x)} f^*(0) \\
= \;& \left((K(x))^2 - (K(0))^2\right) e^{xK(x)}\varphi + (K(0))^2 e^{xK(x)}\varphi + e^{xK(x)} f^*(0) \\
= \;& \left((K(x))^2 - (K(0))^2\right) e^{xK(x)}\varphi \\
& + (K(0))^2 \left(e^{xK(x)} - e^{xK(0)}\right)\varphi \\
& + \left[e^{xK(x)} - e^{xK(0)}\right] f^*(0) \\
& + (K(0))^2 e^{xK(0)}\varphi + e^{xK(0)} f^*(0) \\
= \;& (a) + (b) + (c) + (d) + (e).
\end{aligned}$$

Il est clair que $(a), (b)$ tendent vers 0, quand $x \to 0$, et $(c) \in C([0,1]; X)$. Pour le terme $(d) + (e)$, on écrit

$$\begin{aligned}
& (d) + (e) \\
= \;& e^{xK(0)} (K(0))^2 \varphi + e^{xK(0)} f^*(0) \\
= \;& e^{xK(0)} \left((K(0))^2\varphi + f(0) + \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi + \Phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi) \right) \\
= \;& e^{xK(0)} \left((K(0))^2\varphi + f(0) + \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi \right) \\
& + e^{xK(0)} \left(\Phi_0^*(\varphi) + r_0(f^*, \psi)\right) \\
= \;& (\alpha) + (\beta) + (\gamma).
\end{aligned}$$

Tenant compte du lemme 2.4.5, on remarque que $(\beta), (\gamma) \in C([0,1]; X)$ et que

$(\alpha) \in C([0,1]; X)$ si et seulement si

$$f(0) + (K(0))^2\varphi + \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))} = \overline{D(Q(0))}.$$

De la même manière, on obtient la condition de compatibilité en 1. ∎

Remarque 2.7.1 *1. Remarquons qu'ici on a la condition de compatibilité :*

$$\begin{aligned}
& f(0) + (K(0))^2\varphi + \frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} K(0)\varphi \\
= \;& f(0) - Q(0)\varphi - \left[\frac{d^2}{dx^2} (K(x))^{-1}_{|x=0} (K(0))^{-1}\right] Q(0)\varphi,
\end{aligned}$$

et celle obtenue dans [10] est

$$f(0) - Q(0)\varphi - \left[\frac{d^2}{dx^2} (Q(x))^{-1}_{|x=0}\right] Q(0)\varphi.$$

2. *Notons que notre résultat essentiel améliore ceux concernant l'étude de l'équation (2.1) dans [10]. En effet, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la solution stricte en utilisant les racines carrées* $-\sqrt{-Q(x)}$, *mais dans [10], les auteurs donnent, seulement, les conditions suffisantes d'existence de la solution stricte, en fonction des opérateurs linéaires* $Q(x)$.

Il reste à traiter la régularité maximale de la solution, c'est ce qu'on verra au chapitre suivant.