1

Rappels de notions essentielles d'analyse fonctionnelle

Sommaire

Ici, on va introduire les notions de base et rappeler certains résultats classiques d'analyse fonctionnelle qui nous serviront pour réaliser ce travail.

1.1 Les opérateurs linéaires

Définition 1.1.1 *Soit* $(X, \|.\|_X)$ *un espace de Banach. Dire que* A *est un opérateur linéaire sur* X *signifie que* A *est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel* $D(A)$ *(appelé domaine de l'opérateur* A*)* $\subset X$*, à valeurs dans* X*.*

1 *L'opérateur linéaire A est borné, si*

$$D(A) = X \quad et \quad \sup_{\|u\| \leqslant 1} \|Au\| < +\infty$$

et on écrit $A \in \mathcal{L}(X)$. Sinon (si $D(A) \subset X$), l'opérateur linéaire A est non borné.

2 *L'opérateur linéaire A est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$*

telle que $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$ alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Ensemble résolvant, résolvante et spectre d'un opérateur linéaire

Définition 1.1.2 *Soit X un espace de Banach complexe et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire. On appelle ensemble résolvant de l'opérateur A, l'ensemble ouvert $\rho(A)$ défini par*

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ / \ A - \lambda I : D(A) \to X \text{ est bijectif et } (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \ \right\}.$$

Si l'opérateur A est fermé, alors

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \ / \ A - \lambda I \ : D(A) \to X \text{ est bijectif} \}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$, alors l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ s'appelle la résolvante de l'opérateur A. On appelle spectre de l'opérateur A, l'ensemble fermé $\sigma(A)$ défini par

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Opérateur sectoriel

Définition 1.1.3 *Soit X un espace de Banach complexe et $0 < \phi < \pi$.*

On pose $S_\phi = \{ z \in \mathbb{C} / \{0\} : |\arg(z)| < \phi \}$ et $\Sigma_\phi = \mathbb{C} / \overline{S_\phi}$. Un opérateur linéaire A sur X est dit sectoriel d'angle ϕ si et seulement si

$$\rho(A) \subset \overline{S_\phi}$$

et pour tout $\phi < \varphi < \pi$, il existe $M_\varphi > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in \Sigma_\varphi, \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{M_\varphi}{|\lambda|}.$$

Pour plus de détails, voir H. Brezis [6] et H. Tanabe [36].

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

Pour plus de détails, voir A. Pazy [32], H. Tanabe [36] et J. A. Goldstein [18].

Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach. La famille d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$ est dite semi-groupe, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$T(t+s) = T(t)\,T(s)$, pour tout $t,\ s \geqslant 0$.*
2. *$T(0) = I$, où I désigne l'opérateur identité.*

   Si de plus la condition suivante est satisfaite :

3. *Pour chaque $x \in X$, l'application $t \longmapsto T(t)\,x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue c'est à dire*

$$\forall x \in X,\ \lim_{t\to 0^+} \|T(t)\,x - x\|_X = 0,$$

alors $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit semi-groupe fortement continu ou C_0 semi-groupe.

Si la famille $(T(t))$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$ et satisfait les conditions (1) et (2), alors $(T(t))$ est dit groupe.

Proposition 1.2.1 *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0,\ \ \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}. \tag{1.1}$$

Définition 1.2.2 *On dit que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un :*

- *C_0 semi-groupe uniformément borné si on a la majoration (1.1) avec $M \geqslant 1$ et $\omega = 0$.*
- *C_0 semi-groupe de contraction si on a (1.1) avec $M = 1$ et $\omega = 0$.*

Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.2.3 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire A, défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\right\} \\ \forall x \in D(A), \quad Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

On dit aussi que l'opérateur A engendre le C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Proposition 1.2.2 *Si A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, alors*

1. *A est linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X,*

2. *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ contient le demi-plan*

$$P_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(\lambda)| > \omega\}$$

et $\forall \lambda \in P_\omega, \forall n \geqslant 1$

$$\left\|(A-\lambda I)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda-\omega)^n}.$$

3. *La résolvante de A est donnée par la transformation de Laplace :*

$$\forall \lambda \in P_\omega \ , \ (A-\lambda I)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt,$$

où M et ω sont les constantes de la proposition 1.2.1.

Le théorème de Hille-Yosida donne la réciproque de ce résultat.

Théorème 1.2.1 *(Hille-Yosida) Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire tel que :*

1. *A est fermé et $D(A)$ est dense dans X,*

2. *il existe $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ tels que :*

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(\lambda)| > \omega\}$$

et pour $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, $n = 1, 2...$

$$\left\|(A-\lambda I)^{-n}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda-\omega)^n}.$$

Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

On rassemble les principales propriétés des C_0 semi-groupes dans la

Proposition 1.2.3 *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal A. Alors,*

1. *Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*

2. *Si $x \in D(A)$ et $t \geqslant 0$ alors $T(t)x \in D(A)$.*

3. *La fonction* $t \mapsto T(t)x$ *est continûment dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *si et seulement si* $x \in D(A)$. *Dans ce cas*
$$\forall t \geqslant 0, \quad \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4. *Pour tout* x *de* X *et tout* $t \geqslant 0$
$$\int_0^t T(s)xds \in D(A) \ \text{et} \ A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$
Si de plus $x \in D(A)$, *alors*
$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = \int_0^t T(s)Axds = T(t)x - x.$$

5. *Si* A *est générateur infinitésimal d'un autre* C_0 *semi-groupe* $(S(t))_{t\geqslant 0}$, *alors*
$$\forall t \geqslant 0, \ \ S(t) = T(t).$$

Cette proposition permet d'affirmer entre autres que si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et si $u_0 \in D(A)$, la fonction $u : [0, +\infty[\to X$ définie par
$$\forall t \geqslant 0, \quad u(t) = T(t)u_0$$
est l'unique fonction dans $C^1([0,1]\,;X) \cap C([0,1]\,;D(\Lambda))$ solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & x \in [0,+\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Semi-groupes différentiables

Définition 1.2.4 *On dit qu'un* C_0 *semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est différentiable si pour tout* x *de* X, *la fonction* $t \mapsto T(t)x$ *est différentiable de* $]0,+\infty[$ *dans* X.

Proposition 1.2.4 *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe différentiable de générateur infinitésimal* A. *Alors, pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in X$, *on a :*

1. $\forall t \in]0,+\infty[, \ \ T(t)x \in D(A^n)$.

2. $t \mapsto T(t)x$ *est* n *fois différentiable sur* $]0,+\infty[$ *et*
$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad T^{(n)}(t)x = A^nT(t)x.$$

3. $\forall t \in]0,+\infty[, \ \ T^{(n)}(t) \in \mathcal{L}(X)$.

4. $t \mapsto T^{(n)}(t)$ *est différentiable (donc continue) de* $]0,+\infty[$ *dans* $\mathcal{L}(X)$.

Semi-groupe analytique

Soit X un espace de Banach complexe. Si on considère un secteur S_ϕ dans $\mathbb{C}$ et contenant $\mathbb{R}_+$, alors il sera possible de généraliser la notion de C_0semi-groupe à celle de semi-groupe analytique. Dans toute la suite arg désigne la détermination principale de la fonction argument caractérisée par :

$$\arg(z) = \varphi \text{ si } z = re^{i\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in [-\pi, \pi]\,.$$

Définition 1.2.5 *Soit $\phi \in]0, \pi]$. On appelle semi-groupe analytique, l'application T définie sur le secteur $\overline{S_\phi}$ où*

$$S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \phi\}$$

et à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ telle que :

1. $\forall z_1, z_2 \in \overline{S_\phi}$, $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *et* $T(0) = I$.
2. $\forall x \in X$, $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \overline{S_\phi}}} \|T(z)x - x\|_X = 0$.
3. *La fonction $z \mapsto T(z)$ est analytique sur S_ϕ.*

   Si de plus $\sup\limits_{z \in \overline{S_\phi}} \|T(z)\| < +\infty$, on dit que $(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$est uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$.

Semi-groupe analytique généralisé

On dira que $\left(e^{xQ}\right)_{x\geq 0}$ est un semi-groupe analytique généralisé si Q est un opérateur linéaire dans X, à domaine non dense et vérifiant :

$$\begin{cases} \rho(Q) \supset S_{\omega,\delta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\omega\}\ \ /\ \ |\arg(\lambda - \omega)| < \dfrac{\pi}{2} + \delta\right\} \text{et} \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\omega,\delta}} \|(\lambda - \omega)(\lambda I - Q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Dans ce cas $\left(e^{xQ}\right)_{x\geq 0}$ n'est pas supposé être un semi-groupe fortement continu (voir E. Sinestrari [33], A. Lunardi [30]).

Remarque 1.2.1 *En fixant $r > 0$, $\delta_0 \in]0, \delta[$ alors $\left(e^{xQ}\right)_{x\geq 0}$ est défini par*

$$e^{xQ} = \begin{cases} \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma e^{\lambda x}(\lambda I - Q)^{-1}\,d\lambda \ \text{si}\ x > 0, \\ I \ \text{si}\ x = 0, \end{cases}$$

où γ est le bord de $S_{\omega,\delta}\backslash B(0, r)$ orienté négativement.

Générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique (ou holomorphe)

Théorème 1.2.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$ uniformément borné sur X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Il existe $\delta \in]0, \pi/2[$ et $C \geqslant 0$ tels que*
$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\frac{\pi}{2}+\delta} \text{ et} \\ \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\delta}, \quad \|(A-\lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda|}. \end{cases} \tag{1.2}$$
2. *$(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe différentiable et il existe $M > 0$ tel que pour tout $t > 0$,*
$$T(t) \in \mathcal{L}(X, D(A)) \text{ et } \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{t}.$$
3. *Il existe $\phi \in]0, \pi]$ tel que $(T(t))_{t\geq 0}$ soit prolongeable en $(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$ semi-groupe sur X, analytique dans S_ϕ, uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$.*

Théorème 1.2.3 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est fermé, $D(A)$ est dense dans X et il existe $C \geqslant 0$ tel que*
$$\begin{cases} \rho(A) \supset \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C}^* \ / \ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} \text{ et} \\ \forall \lambda \in \Pi, \quad \|(A-\lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda|}. \end{cases} \tag{1.3}$$
2. *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, uniformément borné $(T(t))_{t\geqslant 0}$ qui, de plus, se prolonge en $(T(z))_{z\in\overline{S_\phi}}$, semi-groupe sur X, analytique dans S_ϕ, uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$ (avec $\phi \in]0, \pi]$).*

1.3 Les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires

Puissances fractionnaires avec partie réelle positive

Soit A un opérateur sectoriel d'angle ϕ. On se donne $\alpha \in \mathbb{C}$, il s'agit alors sous certaines conditions, d'activer la formule
$$A^\alpha = (z^\alpha)(A). \tag{1.4}$$

Ici z^α désigne la détermination principale de la fonction "puissance α" caractérisée par
$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln r \ + i\theta)} \text{ si } z = re^{i\theta}, \ r > 0, \ \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Proposition 1.3.1 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta > 0$, *on a alors*

1. A^{α} *est un opérateur fermé de* X.
2. $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha}$.
3. $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha \Longrightarrow D(A^{\beta}) \subset D(A^{\alpha})$ *et en particulier*
$$\operatorname{Re}\alpha < 1 \Longrightarrow D(A) \subset D(A^{\alpha}).$$
4. *Si* A *est injectif alors* A^{α} *l'est aussi et*
$$\left(A^{-1}\right)^{\alpha} = \left(A^{\alpha}\right)^{-1}.$$
5. *Si* $0 \in \rho(A)$ *alors* $0 \in \rho(A^{\alpha})$.
6. *Si* $\theta \in \mathbb{R}$ *avec* $0 < \theta < \dfrac{\pi}{\omega}$ *alors*
$$\left(A^{\theta}\right)^{\alpha} = A^{\theta\alpha}.$$
7. $A \in \mathcal{L}(X) \Longrightarrow A^{\alpha} \in \mathcal{L}(X)$.

Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque

Proposition 1.3.2 *On considère* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *et on suppose que* A *est injectif. Alors*

1. A^{α} *est un opérateur fermé de* X.
2. A^{α} *est injectif et* $\left(A^{\alpha}\right)^{-1} = A^{-\alpha} = \left(A^{-1}\right)^{\alpha}$.
3. $A^{\alpha+\beta} \subset A^{\alpha}A^{\beta}$.
4. *Si* $\theta \in \mathbb{R}$ *avec* $|\theta| < \dfrac{\pi}{\omega}$ *alors*
$$\left(A^{\theta}\right)^{\alpha} = A^{\theta\alpha}.$$

Considérons maintenant le cas particulier où A admet un inverse borné.

Définition 1.3.1 *Si* $0 \in \rho(A)$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *avec* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, *alors*

1. $A^{-\alpha} = \left(A^{-1}\right)^{\alpha} \in \mathcal{L}(X)$.
2. $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-\beta}A^{-\alpha}$.

Pour plus de détails voir A.V. Balakrishnan [3], H. Tanabe [36], S. G. Krein [22] et A. Pazy [32].

1.4 Les espaces d'interpolation

On donne ici certaines caractérisations des espaces d'interpolation. Voir P. Grisvard [19]), J. L. Lions [28], Triebel [37], Lions-Peetre [29] et Da Prato-Grisvard [8].

Définition 1.4.1 *Soit X un espace de Banach. On désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ avec $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ et telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X)} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ par

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X) \Leftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \to X \text{ est fortement mesurable et} \\ \sup\limits_{0<t<\infty} ess \, \|f(t)\|_X < \infty. \end{cases}$$

Définition 1.4.2 *Soit $(X_0, \|.\|_0)$ et $(X_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé X. Pour $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$, on dit que $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i) \forall t > 0, \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 \ / \ x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii) t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0) \ , \ t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.4.1 *Les espaces*

$$\left(X_0 \cap X_1, \|.\|_{X_0 \cap X_1}\right), \left(X_0 + X_1, \|.\|_{X_0+X_1}\right) \ \ et \ \left((X_0, X_1)_{\theta,p}, \|.\|_{\theta,p}\right)$$

sont de Banach pour les normes respectives

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} \ \ si \ x \in X_0 \cap X_1, \\ \|x\|_{X_0+X_1} = \inf\limits_{x_i \in X_i, \ x_0 + x_1 = x} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right) \ \ si \ x \in X_0 + X_1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \|x\|_{\theta,p} = \inf\limits_{\substack{u_i : \mathbb{R}_+ \to X_i, \ i=0,1: \\ \forall t>0, u_0(t)+u_1(t)=x}} \left(\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_1)} \right) \\ si \ x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}. \end{cases}$$

De plus

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

Notons que

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_1, X_0)_{1-\theta,p}.$$

Propriété fondamentale d'interpolation

On se donne deux triplets d'espaces d'interpolation (X_0, X_1, X), (Y_0, Y_1, Y) et un opérateur linéaire T de X dans Y, alors on a le

Théorème 1.4.1 *On suppose que les restrictions de T aux espaces X_i à valeurs dans Y_i avec $i = 1, 2$ sont linéaires continues, alors pour tous $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, \infty]$, l'opérateur T est linéaire continu de $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ dans $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ et*

$$\|T\|_{L\left((X_0,X_1)_{\theta,p},(Y_0,Y_1)_{\theta,p}\right)} \leqslant C \|T\|_{L(X_0,Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{L(X_1,Y_1)}^{\theta},$$

où C est une constante positive.

Définition 1.4.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$, muni de sa norme du graphe :*

$$\forall x \in D(A), \quad \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X .$$

On pose alors, en suivant les notations de P. Grisvard [19],

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta,p}$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta, p)$ comme suit :

Théorème 1.4.2 *Soit $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$. Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda > 0$,*

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{x \in X : t^\theta A (A - tI)^{-1} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\right\},$$

et

$$D_A(\theta, +\infty) = \left\{x \in X : \sup_{t>0} \left\|t^\theta A (A - tI)^{-1} x\right\|_X \leqslant C < +\infty\right\},$$

sachant que

$$\|x\|_{D_A(\theta,+\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t>0} \left\|t^\theta A(A - t)^{-1}x\right\|_X .$$

(Voir P. Grisvard [19]).

1. Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X, alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : t^{-\theta}(e^{tA} - I)x \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X) \right\}.$$

   Voir J. L. Lions [28].

2. Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X, alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X) \right\}.$$

1.5 L'intégrale de Dunford

Formule de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(U)$, l'espace des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K, la formule de Cauchy est donnée par

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K.

Intégrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(A)$ où A est un opérateur linéaire fermé et f est holomorphe.

Plus précisément, si $A \in L(X)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(A)$ (le spectre de A) alors on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K contenant $\sigma(A)$ et contenu dans U.

Propriété de l'intégrale de Dunford

Théorème 1.5.1 *Soit f et $g \in H(T)$ et $A \in \mathcal{L}(X)$, alors $f.g \in H(A)$ et*

$$f(A)\, g(A) = (f.g)(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda)\, g(\lambda)\, (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

Preuve. Voir Dunford-Schwartz [9]. ■

1.6 Les espaces de Hölder

Définition 1.6.1 *Soit X un espace de Banach et $C([0,1];X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans X muni de la norme*

$$\|f\|_{C(X)} = \max_{x\in[0,1]} \|f(x)\|_X .$$

Pour $0<\theta<1$, l'espace défini par

$$C^\theta([0,1];X) = \left\{ f \in C([0,1];X) \ / \ \sup_{\substack{x,s\in[0,1]\\ x\neq s}} \frac{\|f(x)-f(s)\|_X}{|x-s|^\theta} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + \sup_{\substack{x,s\in[0,1]\\ x\neq s}} \frac{\|f(x)-f(s)\|_X}{|x-s|^\theta},$$

est un espace de Banach appelé espace de Hölder à exposant θ.

Pour plus de détails, voir A. Lunardi [30].

1.7 L'intégrale définie dépendant d'un paramètre

Proposition 1.7.1 *Soit X un espace de Banach et $f : J\times[a,b]\to X$ (J un intervalle de $\mathbb{R}$), une application continue, admettant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la première variable, continue sur $J\times[a,b]$. Soit α, β deux fonctions de classe C^1 sur J et à valeurs dans $[a,b]$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} g\colon J &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,s)\,ds, \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur J et pour tout $x\in J$, on a

$$g'(x) = \beta'(x) f(x,\beta(x)) - \alpha'(x) f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\,ds. \tag{1.5}$$