Introduction

L'intérêt des mathématiciens pour l'étude des équations différentielles abstraites (en abrégé EDA) n'a cessé de croître, et ce depuis la parution des semi-groupes qui ont permis de résoudre les équations d'évolution vers les années 1930, jusqu'à nos jours.

Dans cette thèse, on s'intéressera à la résolution de l'équation différentielle abstraite complète du second ordre, du type elliptique et à coefficients opérateurs variables

$$u''(x) + B(x) u'(x) + A(x) u(x) - \lambda u(x) = f(x), \ x \in (0,1), \tag{0.1}$$

avec les conditions de Dirichlet non homogènes

$$\begin{cases} u(0) = \varphi \in D(A(0)) \subset X, \\ u(1) = \psi \in D(A(1)) \subset X, \end{cases} \tag{0.2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$, φ et ψ sont deux éléments donnés dans un espace de Banach complexe X, $(B(x))_{x\in[0,1]}$ désigne une famille d'opérateurs linéaires bornés et $(A(x))_{x\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés dans X, à domaines $D(A(x))$ non nécessairement denses dans X. Dans tout ce travail, on va noter

$$Q(x) = A(x) - \lambda I, \quad \lambda > 0,$$

et on fera les hypothèses suivantes :

On considère le problème (0.1)-(0.2) dans le cas elliptique : La famille d'opérateurs linéaires fermés $(Q(x))_{x\in[0,1]}$ à domaines $D(Q(x))$ vérifie la condition d'ellipticité uniforme suivante

$$\begin{cases} \exists C > 0, \forall x \in [0,1], \forall z \geqslant 0, \exists (Q(x) - zI)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \left\|(Q(x) - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+z}. \end{cases} \tag{0.3}$$

Les opérateurs $B(x)$ vérifient

$$\exists C > 0 : \forall x \in [0,1], \|B(x)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C. \tag{0.4}$$

Dans ce travail, le terme $B(x)\,u'(x)$ est considéré comme une "perturbation".

En vertu de l'hypothèse (0.3), on définit les puissances fractionnaires des opérateurs $(-Q(x))$. En particulier, pour chaque $x \in [0,1]$ et $\lambda > 0$, les racines carrées $-(-Q(x))^{1/2}$sont bien définies et génèrent des semi-groupes analytiques

$$\left(e^{-(-Q(x))^{1/2}y}\right)_{y>0} = \left(e^{\left(-(-A(x)+\lambda)^{1/2}\right)y}\right)_{y>0}$$

non nécessairement fortement continus en 0 (voir A. V. Balakrishnan [3] dans le cas des domaines denses et Martinez-Sanz [31] dans le cas des domaines non denses).

Posons

$$K(x) = -(-Q(x))^{1/2}.$$

En plus des hypothèses (0.3) et (0.4), on va supposer qu'il existe un secteur

$$\Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leqslant \theta_1 + \pi/2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_1\}$$

où $\theta_1 > 0$ petit et $r_1 > 0$ tels que pour chaque $x \in [0,1]$,

$$\rho\left(-(-Q(x))^{1/2}\right) \supset \Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}.$$

On suppose que, pour tout $z \in \Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}$, l'application $x \mapsto (K(x)-zI)^{-1}$, définie sur $[0,1]$, est dans $C^2([0,1], \mathcal{L}(X))$ et il existe $C > 0$, $\nu \in]1/2,1]$ et $\eta \in]0,1[$ telles que

$\forall z \in \Pi_{\theta_1+\pi/2,r_1}, \forall x,s \in [0,1]$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|z|^{\nu}}, \tag{0.5}$$

$$\begin{cases} \left\|\dfrac{\partial}{\partial x}(K(x)-zI)^{-1} - \dfrac{\partial}{\partial s}(K(s)-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C\,|x-s|^{\eta}}{|z|^{\nu}}, \\ \text{avec } \eta+\nu-1>0, \end{cases} \tag{0.6}$$

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x)-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C\,|z|^{1-\nu}, \tag{0.7}$$

$$\left\|\frac{d^2}{dx^2}(K(x))^{-1} - \frac{d^2}{ds^2}(K(s))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C\,|x-s|^{\eta}, \tag{0.8}$$

$$B(0)(X) \subset \overline{D(K(0))}, \qquad B(1)(X) \subset \overline{D(K(1))}, \tag{0.9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(K(x))^{-1}_{|x=0}(D(K(0))) \in \overline{D(K(0))}, \\ \\ \dfrac{d}{dx}(K(x))^{-1}_{|x=1}(D(K(1))) \in \overline{D(K(1))}. \end{cases} \tag{0.10}$$

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte u du problème (0.1)-(0.2). Ici, une solution stricte est définie par une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in C^2([0,1],X), \ u(x) \in D(Q(x)) \text{ pour chaque } x \in [0,1], \\ x \mapsto Q(x)u(x) \in C([0,1],X), \end{cases}$$

et u satisfait le problème (0.1)-(0.2).

Aperçu historique

L'équation différentielle (0.1) a été traitée par de nombreux auteurs parmi lesquelles, on cite :

1. **Cas** $B = 0$ et A constant :

   Le célèbre travail de S. G. Krein fait en 1967 (voir [22] p. 249), où l'auteur a traité cette équation différentielle, en se basant sur la méthode de réduction de l'ordre et les propriétés des semi-groupes et de la racine carrée $(-A)^{1/2}$(avec $D(A)$ dense dans X).

   Cette équation a été étudiée aussi, dans le cadre des sommes d'opérateurs par G. Da Prato et P. Grisvard en 1975 (voir [8]). Ici, les auteurs ont utilisé principalement le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation et ils ont imposé la restriction $f(0) = f(1) = 0$. On signale aussi d'autres travaux liés à cette équation, Sobolevskii [34], Kuyazyuk [23], etc...

2. **Cas** $B = 0$ et A variable (A dépend de x):

   En 1975, l'équation différentielle (0.1) avec des conditions aux limites homogènes a été largement traitée par G. Da Prato et P. Grisvard (voir [8]), dans un cadre plus général de sommes d'opérateurs. Ils ont supposé que, pour chaque $x \in [0,1]$, $(-A(x))$ vérifie l'hypothèse d'ellipticité dite de Krein (voir [22], (2.2), p. 249) et des hypothèses de différentiabilité sur les résolvantes de la forme

$$(D.G)\begin{cases} \exists \alpha \in \left]0,1/2\right], \ \exists \eta \in \left]0,1\right[\ \text{ et } \exists\ N > 0 \text{ tels que} \\ 1) \left\| \dfrac{\partial}{\partial x}(A(x)-\lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{N}{\lambda^{\alpha+1/2}}, \\ 2) \left\| \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x)-\lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{N}{\lambda^{\alpha}}, \\ 3) \left\| \dfrac{\partial}{\partial x}(A(x)-\lambda I)^{-1} - \dfrac{\partial}{\partial s}(A(s)-\lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{N\left|x-s\right|^{\eta}}{\lambda^{\alpha+1/2}}, \\ 4) \left\| \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x)-\lambda I)^{-1} - \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(A(s)-\lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{N\left|x-s\right|^{\eta}}{\lambda^{\alpha}}. \end{cases}$$

En 1985, R. Labbas et B. Terreni (voir [25]) ont étudié l'équation différentielle (0.1) avec les conditions aux limites du type Sturm-Lioville

$$\begin{cases} a_0 u(0) - b_0 u'(0) = 0, \\ a_1 u(1) - b_1 u'(1) = 0, \end{cases}$$

où $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$ et $a_i + b_i > 0$; $i = 0, 1$. Ceci, en imposant aussi la restriction $f(0) = f(1) = 0$ et en utilisant l'hypothèse

$$(L.T) \begin{cases} \exists \alpha,\ \rho,\ K > 0 \text{ tels que} \\ \left\| Q(x)(A(x) - zI)^{-1} \left((Q(x))^{-1} - (Q(s))^{-1} \right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{K\,|x-s|^{\alpha}}{|z|^{\rho}}, \end{cases}$$

où $\alpha + 2\rho - 2 > 0$.

En 1987, l'équation différentielle (0.1)avec des conditions aux limites non homogènes a été traitée par R. Labbas (voir [24]) ceci en utilisant successivement l'hypothèse du type $(L.T)$ et les hypothèses du type $(D.G)$. Ici, Il n'a pas imposé que $f(0) = f(1) = 0$. En utilisant les techniques de calculs de Sinestrari [33], il a obtenu des conditions nécessaires de compatibilité entre les donnés et le second membre f, sous la forme

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\varphi \in \overline{D(A(0))}, \text{ où } \varphi = u(0), \\ f(1) - A(1)\psi \in \overline{D(A(1))}, \text{ où } \psi = u(1), \end{cases}$$

pour obtenir une solution stricte du problème (0.1)-(0.2).

Dans toutes ces études, les auteurs se sont basés sur le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation.

3. **Cas** A et B constants $(B \neq 0)$:

   L'équation différentielle abstraite complète

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \tag{0.11}$$

   a été assez développée selon deux approches :

   - La première approche s'appuie sur le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation. A ce propos, on cite le travail de R. Labbas [27], en 1994, où cette équation différentielle complète a été étudiée pour la première fois. On signale aussi le travail fait en 2001 par A. El Haial et R. Labbas [12]. Les hypothèses essentielles faites dans ces travaux sont de trois types :

$$\begin{cases} (h1) & B^2 - A \text{ est un opérateur elliptique,} \\ (h2) & B \text{ génère un groupe,} \\ (h3) & B \text{ et } B^2 - A \text{ sont commutatifs au sens des résolvantes.} \end{cases}$$

- La deuxième approche utilise les techniques de semi-groupes et la méthode de réduction d'ordre de S. G. Krein, basée sur les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires. Elle a été largement traitée, sous diverses conditions aux limites, dans plusieurs articles à partir de 2004 (voir [13], [14], [15], [16], [17] et [7]), ceci en considérant les deux cadres : f höldérienne et $f \in L^p(X)$, où X est de type UMD. Dans ces travaux, les hypothèses $(h1)$ et $(h3)$ sont maintenues, l'hypothèse $(h2)$ est remplacée par l'hypothèse :

  $$\pm B - (B^2 - A)^{1/2} \text{ génèrent des semi-groupes analytiques sur } X.$$

  Des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale ont été prouvés lorsque des conditions nécessaires et suffisantes sur les données sont satisfaites.

4. **Cas** A et B variables (A et B dépendent de x):

   Les auteurs A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et B.-K. Sadallah en 2008 (voir [10]) ont traité l'équation différentielle (0.1) avec les conditions aux limites du type

   $$\begin{cases} u(0) = \psi_0, \\ u'(\delta) = \psi_1, \text{ où } \delta \text{ est un petit nombre réel positif.} \end{cases}$$

   Ils ont utilisé, en plus des hypothèses (0.3) et (0.4), les hypothèses suivantes sur la différentiabilité des résolvantes des opérateurs $Q(x)$

$$\begin{cases} \exists\, C > 0,\ \exists \alpha \in \left]1/4, 1/2\right],\ \exists \eta, \rho \ /\ \forall z \geqslant 0, \forall x,\ s \in [0,\delta] \\ 1) \left\| A(x)(A(x) - zI)^{-1} \dfrac{d}{dx}\left(A(x)\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{z^{\alpha+1/2}}, \\ 2) \left\| A(x)(A(x) - zI)^{-1} \dfrac{d}{dx}\left(A(x)\right)^{-1} - A(s)(A(s) - zI)^{-1} \dfrac{d}{ds}\left(A(s)\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant \dfrac{C\left|x - s\right|^{2\eta}}{z^{\rho+1/2}}, \\ 3) \left\| \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{z^{\alpha}}, \\ 4) \left\| \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x) - zI)^{-1} - \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(A(s) - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C\left|x - s\right|^{2\eta}}{z^{\rho}}, \\ \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{2} - \rho < \eta \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Notons ici, que les hypothèses 1) et 2) de Yagi (voir [38], [39]) conduisent aussi à

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial}{\partial x}(A(x)-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{z^{\alpha+1/2}},\\
&\left\|\frac{\partial}{\partial x}(A(x)-zI)^{-1}-\frac{\partial}{\partial s}(A(s)-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C\,|x-s|^{2\eta}}{z^{\rho+1/2}}+\frac{C\,|x-s|}{z^{2\alpha}}.
\end{aligned}$$

Leur approche était basée sur le calcul fonctionnel de Dunford, les techniques de calculs de Sinestrari [33] et les espaces d'interpolation.

Dans cette thèse, en s'inspirant de ce dernier travail et de ceux de P. Acquistapace et B. Terreni [1]) et de E. Sinestrari [33], on va étudier l'équation différentielle (0.1) par une autre approche en utilisant la méthode de réduction de l'ordre de S. G. Krein, les racines carrées d'opérateurs linéaires et les semi-groupes, en faisant des hypothèses de différentiabilité des résolvantes des racines carrées $K(x)=-\sqrt{-Q(x)}$. On obtient des conditions de compatibilité pour l'existence de la solution stricte du problème (0.1)-(0.2) en fonction de ces racines carrées (voir [4] et [5]) qui améliorent celles obtenues dans [10].

Cette thèse se compose de quatre chapitres:

Premier chapitre

On rappellera des notions et des résultats classiques d'analyse fonctionnelle, qui nous seront nécessaires tout au long de ce travail. Plus précisémment, on s'intéressera aux opérateurs linéaires, les semi-groupes d'opérateurs linéaires, les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires, les espaces d'interpolation, le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces de Hölder.

Deuxième chapitre

Il est consacré principalement à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème (0.1)-(0.2). On s'intéressera à la présentation du problème posé et les hypothèses utilisées pour le résoudre. Ensuite, on verra la construction explicite de la solution par la méthode de Krein et les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires. Dans ce chapitre, on obtiendra les conditions nécessaires pour l'existence de la solution. Ainsi on prouvera des résultats de base liés aux propriétés des semi-groupes et leurs dérivées, puis on traitera la régularité de la solution et on démontrera le résultat essentiel suivant, sur l'existence et l'unicité de la solution:

Théorème 0.0.1 *Soit $\varphi \in D\left((K(0))^2\right)$, $\psi \in D\left((K(1))^2\right)$ et $f \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$, $0<\theta<1$. Supposons que les hypothèses (0.3), (0.4) et (0.5)∼(0.10) sont vérifiées. Alors, il existe $\lambda^*>0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, le problème (0.1)-(0.2) admet une solution stricte unique u si et seulement si*

$$\begin{cases} f(0)+(K(0))^2\varphi+\dfrac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}K(0)\varphi \in \overline{D(K(0))}=\overline{D(Q(0))}, \\ \\ f\left(1\right)+\left(K(1)\right)^2\psi+\dfrac{d^2}{dx^2}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=1}K(1)\psi \in \overline{D(K(1))}=\overline{D(Q(1))}. \end{cases} \tag{0.12}$$

Ce **nouveau résultat** obtenu avec les racines carrées $K(x)$ et qui contient les conditions de compatibilité (0.12), nous permet d'améliorer celui obtenu dans [10], lié aux opérateurs linéaires $Q(x)$. Ce théorème peut s'écrire aussi sous la forme suivante:

Théorème 0.0.2 *Soit $\varphi \in D\left(A(0)\right)$, $\psi \in D\left(A(1)\right)$ et $f \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$, $0<\theta<1$. Supposons que les hypothèses (0.3), (0.4) et (0.5)∼(0.10) sont vérifiées. Alors, il existe $\lambda^*>0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, le problème (0.1)-(0.2) admet une solution stricte unique u si et seulement si*

$$\begin{cases} f(0)-A(0)\varphi+\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\lambda-A(x)\right)^{-1/2}_{|x=0}\left(\lambda-A(0)\right)^{1/2}\varphi \in \overline{D(A(0))}, \\ \\ f\left(1\right)-A(1)\psi+\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\lambda-A(x)\right)^{-1/2}_{|x=1}\left(\lambda-A(1)\right)^{1/2}\psi \in \overline{D(A(1))}. \end{cases}$$

Troisième chapitre

Il concerne l'étude de la régularité maximale de la solution stricte du problème (0.1)-(0.2). Ici, sachant qu'on a toujours

$$D_{K(0)}\left(\theta;+\infty\right) \subset \overline{D(K(0))};\quad D_{K(1)}\left(\theta;+\infty\right) \subset \overline{D(K(1))},$$

on va remplacer les deux hypothèses (0.9) et (0.10) par les suivantes:

$$B(0)(X) \subset D_{K(0)}\left(\theta;+\infty\right);\quad B(1)(X) \subset D_{K(1)}\left(\theta;+\infty\right), \tag{0.13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=0}\left(D(K(0))\right) \subset D_{K(0)}\left(\theta;+\infty\right), \\ \\ \dfrac{d}{dx}\left(K(x)\right)^{-1}_{|x=1}\left(D(K(1)\right) \subset D_{K(1)}\left(\theta;+\infty\right), \end{cases} \tag{0.14}$$

et on montrera le résultat principal suivant:

Théorème 0.0.3 *Soit* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $(0<\theta<1)$, $\varphi \in D((K(0))^2)$ *et* $\psi \in D((K(1))^2)$. *Sous les hypothèses (0.3), (0.4) et (0.5)∼(0.8), (0.13) et (0.14), il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda^*$, *la solution stricte u du problème (0.1)-(0.2) satisfait la régularité*

$$u''(.)\,,\ B(.)\,u'(.)\,,\ Q(.)\,u(.) \in C^{\beta}([0,1];X)$$

où

$$\beta = \min(\theta, \eta+\nu-1)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} f(0) + (K(0))^2\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}\,(K(x))^{-1}_{|x=0}\,K(0)\varphi \in D_{K(0)}(\theta,+\infty)\,, \\ \\ f(1) + (K(1))^2\,\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}\,(K(x))^{-1}_{|x=1}\,K(1)\psi \in D_{K(1)}(\theta,+\infty)\,. \end{cases}$$

Ce **nouveau résultat optimal** avec les racines carrées $K(x)$, nous permet d'améliorer aussi celui obtenu dans [10], lié aux opérateurs linéaires $Q(x)$. On peut l'écrire aussi sous la forme:

Théorème 0.0.4 *Soit* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $(0<\theta<1)$, $\varphi \in D(A(0))$ *et* $\psi \in D(A(1))$. *Sous les hypothèses (0.3), (0.4) et (0.5)∼(0.8), (0.13) et (0.14), il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda^*$, *la solution stricte u du problème (0.1)-(0.2) satisfait la régularité*

$$u''(.)\,,\ B(.)\,u'(.)\,,\ Q(.)\,u(.) \in C^{\beta}([0,1];X)$$

où

$$\beta = \min(\theta, \eta+\nu-1)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} f(0) - A(0)\varphi + \dfrac{d^2}{dx^2}\,(\lambda - A(x))^{-1/2}_{|x=0}\,(\lambda - A(0))^{1/2}\,\varphi \in D_{A(0)}(\theta/2,+\infty)\,, \\ \\ f(1) - A(1)\psi + \dfrac{d^2}{dx^2}\,(\lambda - A(x))^{-1/2}_{|x=1}\,(\lambda - A(1))^{1/2}\,\psi \in D_{A(1)}(\theta/2,+\infty)\,. \end{cases}$$

Quatrième chapitre

Il est consacré à l'illustration des résultats obtenus via des exemples concrets variés liés aux équations aux dérivées partielles.