

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
École Normale Supérieure, Kouba, Alger
Département de Mathématiques



Thèse pour l'obtention du grade de :

Doctorat en Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

présentée Par

BOUTAOUS Fatiha

THÈME

Étude d'une équation différentielle abstraite complète du second ordre de type elliptique et à coefficients opérateurs variables

Soutenue publiquement, le **09 Mai 2012**, devant le jury composé de :

Président	Mr A. Mokrane	Professeur, E. N. S. Kouba, Alger
Directeurs de Thèse	Mr B.-K. Sadallah	Professeur, E. N. S. Kouba, Alger
	Mr R. Labbas	Professeur, Université du Havre, France
Examineurs	Mr M. Moussaoui	Professeur, École Centrale de Lyon
	Mr A. Medeghri	Professeur, Université de Mostaganem
	Mr H. Ouazar	Professeur, E. N. S. Kouba, Alger

Table des matières

Introduction		1
1 Rappels de notions essentielles d'analyse fonctionnelle		9
1.1 Les opérateurs linéaires		9
1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires		11
1.3 Les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires		15
1.4 Les espaces d'interpolation		17
1.5 L'intégrale de Dunford		19
1.6 Les espaces de Hölder		20
1.7 L'intégrale définie dépendant d'un paramètre		20
2 Étude d'existence et d'unicité de la solution		21
2.1 Position du problème et hypothèses		22
2.1.1 Position du problème		22
2.1.2 Hypothèses		22
2.2 Construction de la solution		30
2.2.1 Formule de représentation de la solution		30
2.3 Conditions nécessaires		33
2.4 Résultats de base		36
2.4.1 Analyse des opérateurs $e^{xK(x)}\varphi$		39
2.4.2 Analyse des opérateurs $\frac{d}{dx}(e^{xK(x)}\varphi)$		43
2.4.3 Analyse des opérateurs $\frac{d^2}{dx^2}(e^{xK(x)}\varphi)$		47
2.5 Régularité de la solution		55
2.5.1 Régularité des opérateurs $Op(d_0)$ et $Op(d_1)$		55
2.5.2 Régularité de l'opérateur $Op(m)$		62

2.5.3	Régularité de l'opérateur $Op(v)$	71
2.6	L'équation vérifiée par la solution et sa résolution	79
2.7	Résultat essentiel d'existence et d'unicité de la solution	85
3	Régularité maximale de la solution	91
3.1	Préliminaire	91
3.2	Résultat principal de régularité maximale	92
4	Applications	110
4.1	Cas d'un intervalle borné de \mathbb{R}	110
4.1.1	Exemple 1	110
4.1.2	Exemple 2	121
4.2	Cas d'un ouvert borné de \mathbb{R}^n	130
4.2.1	Exemple 1	130
4.2.2	Exemple 2	134
	Conclusion et perspectives	136
	Bibliographie	137

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude d'une équation différentielle abstraite complète du second ordre du type elliptique et à coefficients opérateurs variables. L'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte sont prouvées sous des hypothèses naturelles sur la différentiabilité des résolvantes des racines carrées $\sqrt{-Q(x)}$. Les techniques utilisées ici sont basées essentiellement sur la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires et le calcul fonctionnel de Dunford.

Mots-clés : Puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires, semi-groupes analytiques, solution stricte, calcul fonctionnel de Dunford.

Abstract

This work is devoted to the study of a complete abstract second order differential equation of elliptic type with variables operators coefficients. The existence, the uniqueness and the maximal regularity of the strict solution are proved under some natural resolvent's differentiability hypotheses on the square roots $\sqrt{-Q(x)}$. The techniques used here are essentially based on the semigroups theory, the fractional powers of linear operators and the Dunford's functional calculus.

Key Words : Fractional powers of linear operators, analytic semigroups, strict solution, Dunford's functional calculus.

ملخص

هذا العمل مكرّس لدراسة معادلة تفاضليّة مجردة تامّة من الرتبة الثانية من النوع الناقصي معاملاتها هي مؤثرات متغيّرة.

الوجود، الوحدانية، والنّظامية القصوى للحل الدقيق لهذه المعادلة مبرهنون تحت فرضيّات على تفاضليّة الحالات للجذور التربيعية للمؤثرات الخطيّة ($-Q(x)$)

التقنيّات المستعملة هنا تتركز أساساً على أشباه الزمر، القوى الكسرية للمؤثرات الخطيّة و الحساب التابعي لدانفورد.

الكلمات المفتاحية:

القوى الكسرية للمؤثرات الخطيّة، أشباه الزمر التحليلية، الحل الدقيق والحساب التابعي لدانفورد.