Etude, dans les espaces de Sobolev, de quelques problèmes paraboliques dans des domaines non cylindriques

Arezki KHELOUFI

Département de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure de Kouba, Alger

Soutenance de Doctorat en Sciences

Sous la direction de
R. Labbas, Professeur, Univ. du Havre
et
B.-K. Sadallah, Professeur, E.N.S. de Kouba
17 Décembre 2011

Plan

1) Introduction.

a) Survey sur les problèmes paraboliques du second ordre dans des domaines non cylindriques.

b) Quelques méthodes et principaux outils de résolution de tels problèmes.

2) Résolution d'une équation parabolique avec de conditions aux limites de Cauchy-Dirichlet dans un domaine non régulier de $\mathbb{R}^3$.

Plan

3) Résolution d’une équation parabolique avec des conditions aux limites de type Robin dans un domaine non rectangulaire.

4) Régularité de la solution d’une équation parabolique dans un domaine non cylindrique: deux approches.

5) Perspectives.

Introduction

Equation parabolique linéaire du second ordre

$$\partial_t u - \Delta u = f.$$

- $f \in L^2(Q)$.
- Q est un domaine non cylindrique de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.
- Cauchy-Dirichlet, type Robin.

Introduction

Equation parabolique linéaire du second ordre

$$\partial_t u - \Delta u = f.$$

- $f \in L^2(Q)$.
- Q est un domaine non cylindrique de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.
- Cauchy-Dirichlet, type Robin.

Introduction

Equation parabolique linéaire du second ordre

$$\partial_t u - \Delta u = f.$$

- $f \in L^2(Q)$.
- Q est un domaine non cylindrique de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.
- Cauchy-Dirichlet, type Robin.

Notes historiques

Problème 1 : Gevrey (1913)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \text{ dans } E = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t \leq T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\} \\ u(0,x) = u_0(x), \varphi_1(0) \leq x \leq \varphi_2(0), \\ u(t,\varphi_i(t)) = \psi_i(t),\ 0 < t \leq T,\ i = 1,2, \end{cases}$$

où $0 < T \leq +\infty$, $\varphi_i, \psi_i \in C([0,T])$, $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ pour $t \in [0,T]$, $u_0 \in C([\varphi_1(0), \varphi_2(0)])$ et $u_0(\varphi_i(0)) = \psi_i(0)$, $i = 1, 2$.

Gevrey a montré que ce problème admet une solution classique si les $(\varphi_i)_{i=1,2}$ sont Höldériennes d'exposants supérieurs à $1/2$.

M. Gevrey, *Sur les équations aux dérivées partielles de type parabolique,* Journ. Math. pures et appliquées, (6), 9 (1913), 305-471.

Critère de Petrovskii 1934

Condition suffisante: Le problème 1 admet une solution classique si $\forall t_0 > 0$, $\exists$ une fonction $p(h)$, positive, monotone et $\lim_{h\to 0} p(h) = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) - \varphi_1(t) &\leq 2(t_0 - t)^{1\backslash 2}(-\log p(t - t_0))^{1\backslash 2}, t \in [t_0 - |h|, t_0], \\ \varphi_2(t_0) - \varphi_2(t) &\geq -2(t_0 - t)^{1\backslash 2}(-\log p(t - t_0))^{1\backslash 2}, t \in [t_0 - |h|, t_0] \end{aligned}$$

et

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_c^{\epsilon} \frac{p(h)\left|\log p(h)\right|^{1/2}}{h} dh = -\infty,$$

où c est une constante.

Condition nécessaire: Une condition nécessaire a également été obtenue qui est proche de la condition suffisante mais elle en diffère légèrement.

I. G. Petrovskii, *Solution of a boundary value problem for the heat equation,* Uchenye Zapiski MGU, No. 2, (1934), 55-59.

Notes historiques

En 1957

J. L. Lions a démontré l'existence et l'unicité des solutions faibles pour une large classe d'équations paraboliques d'ordre supérieur.

Cependant, la classe des domaines utilisée par l'auteur n'est pas suffisamment large puisqu'il considère des domaines dont les fonctions de paramétrisation sont de classe c^∞.

J. L. Lions, *Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (1957)143-182.

Notes historiques

En 1966

le cas des problèmes aux limites de type parabolique dans des domaines non cylindriques est considéré par V. A. Kondrat'ev. Il a obtenu le comportement asymptotique des solutions au voisinage des points non réguliers.

V. A. Kondrat'ev, *Boundary value problems for parabolic equations in closed domains,* Tr. Mosk. Mat. Obshch., 15, (1966), 400-451.

Notes historiques

Depuis le début des années 70, le nombre de travaux consacrés aux problèmes paraboliques dans des domaines non cylindriques a augmenté considérablement.

1. Celà est dû d'une part, à la découverte de nouvelles applications émanant de la mécanique et de la physique (beaucoup d'articles publiés sont consacrés à l'étude des problèmes paraboliques dans des domaines non cylindriques à géométries particulières).

2. D'autres part, des méthodes classiques ont été adaptées pour la résolution de tels problèmes.

Quelques méthodes de résolution de tels problèmes

1. La méthode de régularisation elliptique.
2. La méthode de Rothe.
3. La méthode du potentiel.
4. La méthode des sommes d'opérateurs.
5. La méthode de décomposition des domaines.

Espaces Fonctionnels

On aura besoin de quelques espaces de Sobolev anisotropes

$$H^{r,s}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{ u \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) : \left[\left(1+\zeta^2\right)^{r/2} + \left(1+\tau^2\right)^{s/2}\right]\widehat{u} \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \right\}$$

où $\widehat{u}$ est la transformation de Fourier de u définie par

$$\widehat{u}(\zeta,\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp^{-2i\pi(x\zeta+y\tau)} u(x,y)dxdy$$

et r, s sont deux nombres positifs. On pose

(1) $$H^{r,s}\left(\Omega\right) = \left\{ u_{/\Omega} : u \in H^{r,s}\left(\mathbb{R}^2\right) \right\},$$

avec Ω est un ouvert $\mathbb{R}^2$.

J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, 1,2, Dunod, Paris, 1968.

Théorème de recollement

Soit Ω un ouvert borné de frontière Lipschitzienne et Ω_1, Ω_2 deux ouverts de Ω de frontières Lipschitziennes tels que

$$\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega},$$
$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

Posons $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Soient $u_1 \in H^{1,2}(\Omega_1)$ et $u_2 \in H^{1,2}(\Omega_2)$ satisfaisant à

$$u_1 = u_2 \text{ sur } \Gamma,$$

alors la fonction u définie par

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_2 \text{ dans } \Omega_2, \end{cases}$$

appartient à $H^{1,2}(\Omega)$.

Définition 1

On fixe deux espaces de Hilbert X et Y avec $X \subset Y$ algébriquement et topologiquement. L'espace $[X, Y]_\theta$, $0 < \theta < 1$, est le sous-espace de Y formé des éléments a qui peuvent s'écrire sous la forme

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \tag{2}$$

avec

$$t^\theta u(t) \in L^2_*(X)\,, t^{\theta-1}u(t) \in L^2_*(Y), \tag{3}$$

cet espace est muni de la norme

$$a \mapsto \mathrm{Inf}[(\int_0^\infty t^{2\theta}|u(t)|^2_X \frac{dt}{t})^{\frac{1}{2}} + (\int_0^\infty t^{2(\theta-1)}|u(t)|^2_Y \frac{dt}{t})^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Le Inf étant pris par rapport aux u vérifiant (2) et (3).

Ici, $L^2_*(V)$ désigne l'espace des fonctions de $t > 0$, à valeurs dans V, qui sont mesurables et de carré intégrable pour la mesure $\frac{dt}{t}$.

Espaces Fonctionnels

$H^{r,s}(\Omega)$ peut être aussi défini comme un espace d'interpolation réel entre $H^{r/(1-\theta),s/(1-\theta)}(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, $\theta \in]0,1[$.

(5) $$H^{r,s}(\Omega) = \left[H^{r/(1-\theta),s/(1-\theta)}(\Omega), L^2(\Omega)\right]_\theta .$$

Ici, on considère le cas $s = 2r$, $\theta = 1 - r$,

(6) $$H^{r,2r}(\Omega) = \left[H^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega)\right]_{1-r} \quad \forall r \in]0,1[.$$

Posons $s = 2r$ dans la relation (1), on obtient

(7) $$H^{r,2r}(\Omega) = \left\{u_{/\Omega} : u \in H^{r,2r}\left(\mathbb{R}^2\right)\right\} .$$

P. Grisvard, Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, Arch. Rational Mech. Anal. 25 (1) (1967) 40-63.

Les espaces $H^{\frac{1}{2}}, H_0^{\frac{1}{2}}$ et $H_{00}^{\frac{1}{2}}$

On peut définir $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ à l'aide de la transformation de Fourier :

$$H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) : \sqrt{|x|}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Les éléments de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ ne sont pas nécessairement continus. On sait par contre que les éléments de $H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathbb{R})$ sont continus pour tout $\epsilon > 0$.

Si Ω est borné et à bord Lipschitzien, on a pour $\theta \in]0,1[$:

$$H_0^{\theta}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)\right)_{1-\theta}$$

sauf pour $\theta = \frac{1}{2}$.

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega) \quad : \quad \equiv \left(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)\right)_{\frac{1}{2}} \neq H^{\frac{1}{2}}(\Omega) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$$

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \left\{ u \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) : \widetilde{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

($\widetilde{u} =$ prolongement par 0).

Résolution d'une équation parabolique avec de conditions aux limites de Cauchy-Dirichlet dans un domaine non régulier de $\mathbb{R}^3$.

Introduction

BVP1

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{x_1} u - \partial^2_{x_2} u = f \in L^2(Q) \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial Q - \Gamma_T, \end{cases}$$

où

$$Q = \{(t, x_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T,\ \varphi_1(t) < x_1 < \varphi_2(t)\} \times]0, b[.$$

et Γ_T est la partie de la frontière de Q où $t = T$. φ_1 et φ_2 sont définies dans $[0, T]$ et telles que

$$\begin{cases} \varphi_1(t) < \varphi_2(t), \quad t \in]0, T[\\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \ \text{ et } \varphi_1(T) = \varphi_2(T). \end{cases}$$

Quelques références de base

B.K. Sadallah, *Etude d'un problème 2m-parabolique dans des domaines plans non rectangulaires,* Bollettino U:M:I: (6) 2-B (1983)-51-112.

R. Labbas, A. Medeghri, B.K. Sadallah, , *Sur une équation parabolique dans un domaine non cylindrique,* C.R.A.S. Paris, Série 1; p. 1017-1022; 2002.

S. Hofmann. J.L. Lewis *The L_p Neumann and regularity problems for the heat equation in noncylindrical domains,* Journal of Functional Analysis, 220 (2005), 1-54.

Deux approches

En général, il y a deux approches principales pour l'étude des problèmes aux limites dans des domaines non réguliers.

Première approche:

On travaille directement dans les domaines non réguliers et on obtient des solutions singulières.

Deuxième approche:

On peut imposer des conditions sur les domaines non réguliers pour obtenir des solutions régulières.

Objectifs

Objectifs

Trouver des conditions ("minimales") suffisantes sur les fonctions de paramétrisation $(\varphi_i)_{i=1,2}$ pour que le problème (BVP1) admette une (unique) solution u possédant la régularité maximale, à savoir u est dans l'espace de Sobolev anisotrope

$$H_0^{1,2}(Q) = \{u \in H^{1,2}(Q) : u_{/\partial Q - \Gamma_T} = 0\}$$

avec

$$H^{1,2}(Q) = \{u \in L^2(Q) : \partial_t u, \partial_{x_1}^j u, \partial_{x_2}^j u, \partial_{x_1}\partial_{x_2} u \in L^2(Q)\},$$

$j = 1, 2.$

Hypothèses et résultat obtenu

φ_1 et φ_2 sont Lipschitziennes sur $[0, T]$ et vérifiant

$$(\mathbf{H}) \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} \varphi_i'(t)(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) = 0, \; i = 1, 2 \quad \text{si } \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \lim\limits_{t \to T} \varphi_i'(t)(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) = 0, \; i = 1, 2 \quad \text{si } \varphi_1(T) = \varphi_2(T). \end{cases}$$

Le résultat obtenu

Sous les hypothèses **(H)**,

$$L = \partial_t - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$$

est un isomorphisme de $H_0^{1,2}(Q)$ dans $L^2(Q)$.

Méthode utilisée: La méthode de décomposition du domaine

Première étape:
nous montrons que le problème (BVP1) admet une et une seule solution lorsque le domaine Q peut être transformé en un domaine régulier à l'aide d'un changement de variables régulier, i.e., nous supposons que $\varphi_1(0) < \varphi_2(0)$ et $\varphi_1(T) < \varphi_2(T)$.
Deuxième étape:
Nous approximons Q par une suite(Q_{α_n}) de tels domaines et nous établirons une estimation *a priori* du type

$$\|u_n\|_{H^{1,2}(Q_{\alpha_n})} \leq K \|f\|_{L^2(Q_{\alpha_n})},$$

où u_n est la solution du problème (BVP1) dans Q_{α_n} et K est une constante indépendante de n.
Troisième étape:
Nous passons à la limite dans (Q_{α_n}) pour atteindre Q.

Première étape : Résolution du problème dans des ouverts se ramenant à un parallélépipède

On remplace Q par

$Q_\alpha = \{(t, x_1) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < t < T - \alpha,\ \varphi_1(t) < x_1 < \varphi_2(t)\} \times]0, b[$, $\alpha > 0$. Ainsi, on a

$$\begin{cases} \varphi_1(\alpha) < \varphi_2(\alpha) \\ \varphi_1(T-\alpha) < \varphi_2(T-\alpha) \end{cases}$$

Q_α peut se ramener par un changement de variables au parallélépipède $P_\alpha =]\alpha, T-\alpha[\times]0,1[\times]0, b[$. On définit ce changement de variables comme suit:

$$\begin{aligned} \psi :\quad & Q_\alpha \quad \rightarrow \quad P_\alpha \\ & (t, x_1, x_2) \quad \mapsto \quad \psi(t, x_1, x_2) = (\tau, y_1, y_2) = \left(\tau, \frac{x_1 - \varphi_1(t)}{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}, x_2\right). \end{aligned}$$

L'équation $\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = f$ dans Q_α,

devient
$\partial_\tau v + a(\tau, y_1)\, \partial_{y_1} v - c(\tau)\, \partial_{y_1}^2 v - \partial_{y_2}^2 v = g$ dans P_α

$$\begin{aligned} a(\tau, y_1) &= \frac{\left(\varphi_1'(\tau)-\varphi_2'(\tau)\right) y_1 - \varphi_1'(\tau)}{\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau)} \\ c(\tau) &= \frac{1}{(\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau))^2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2) &= g(\tau, y_1, y_2), \\ u(t, x_1, x_2) &= v(\tau, y_1, y_2). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_{/\partial P_\alpha - \Gamma_{T-\alpha}} = 0, \\ \Gamma_{T-\alpha} = \{T-\alpha\} \times]0,1[\times]0,b[\end{cases}$$

Théorème 1

$L' = \partial_t + a\partial_{x_1} - c\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$ est un isomorphisme de $H_0^{1,2}(P_\alpha)$ dans $L^2(P_\alpha)$.

Deuxième étape: Estimation *a priori*

Maintenant on doit montrer une estimation qui nous permet de passer à la limite lorsque $\alpha \to 0$.

Notons par $u_n \in H^{1,2}(Q_{\alpha_n})$ la solution du problème (BVP1) correspondant à un second membre $f_n = f_{/Q_{\alpha_n}} \in L^2(Q_{\alpha_n})$ dans

$$Q_{\alpha_n} = \Omega_{\alpha_n} \times]0, b[,$$

où

$$\Omega_{\alpha_n} = \left\{(t, x_1) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_n < t < T - \alpha_n, \varphi_1(t) < x_1 < \varphi_2(t)\right\},$$

$(\alpha_n)_n$ est une suite strictement décroissante vers zéro.

Proposition 1

Il existe une constante K_1 indépendante de n telle que

$$\|u_n\|_{H^{1,2}(Q_{\alpha_n})} \leq K_1 \|f\|_{L^2(Q_{\alpha_n})} \leq K_1 \|f\|_{L^2(Q)}.$$

Un résultat utilisé

Lemme 1

Pour $\epsilon > 0$, choisi tel que $(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \leq \epsilon$, il existe une constante C_1 indépendante de n telle que

$$\left\|\partial_{x_1}^{j} u_n\right\|_{L^2(Q_{\alpha_n})}^2 \leq C_1 \epsilon^{2(2-j)} \left\|\partial_{x_1}^{2} u_n\right\|_{L^2(Q_{\alpha_n})}^2, j = 0, 1.$$

Preuve de la Proposition 1

Proof.

$$
\begin{aligned}
& \|f_n\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} \\
= \; & \langle \partial_t u_n - \partial^2_{x_1} u_n - \partial^2_{x_2} u_n, \partial_t u_n - \partial^2_{x_1} u - \partial^2_{x_2} u_n \rangle \\
= \; & \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} + \left\|\partial^2_{x_1} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} + \left\|\partial^2_{x_2} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} \\
& -2\langle \partial_t u_n, \partial^2_{x_1} u_n \rangle - 2\langle \partial_t u_n, \partial^2_{x_2} u_n \rangle + 2\langle \partial^2_{x_1} u_n, \partial^2_{x_2} u_n \rangle .
\end{aligned}
$$

$\square$

$$
\|u_n\|_{H^{1,2}(Q)} = \left(\|u_n\|^2_{H^1(Q)} + \sum_{i,j=1}^{2} \|\partial_{x_i} \partial_{x_j} u_n\|^2_{H^{1,2}(Q)} \right)^{\frac{1}{2}} .
$$

Estimation des produits scalaires

Lemme 2

a)

$$-2\langle \partial_t u_n, \partial_{x_1}^2 u_n \rangle \geq -2K\epsilon \left\| \partial_{x_1}^2 u_n \right\|_{L^2(Q_{\alpha_n})}^2 .$$

b)

$$-2\langle \partial_t u_n, \partial_{x_2}^2 u_n \rangle \geq 0.$$

c)

$$2\langle \partial_{x_1}^2 u_n, \partial_{x_2}^2 u_n \rangle \ \geq \ 2 \left\| \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_n \right\|_{L^2(Q_{\alpha_n})}^2 .$$

Retour à la preuve de la Proposition 1

Proof.

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} &\geq \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} + \left\|\partial^2_{x_1} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} + \left\|\partial^2_{x_2} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} \\
&\quad -2K\epsilon \left\|\partial^2_{x_1} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} + 2\left\|\partial_{x_1}\partial_{x_2} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} \\
&\geq \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} + (1-2K\epsilon)\left\|\partial^2_{x_1} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} \\
&\quad + \left\|\partial^2_{x_2} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})} + 2\left\|\partial_{x_1}\partial_{x_2} u_n\right\|^2_{L^2(Q_{\alpha_n})}.
\end{aligned}$$

Grâce aux estimations précédentes et en choisissant ϵ tel que $(1-2K\epsilon) > 0$, alors il existe une constante $K_1 > 0$, indépendante de n telle que

$$\|u_n\|_{H^{1,2}(Q_{\alpha_n})} \leq K_1 \|f_n\|_{L^2(Q_{\alpha_n})} \leq K_1 \|f\|_{L^2(Q)}.$$

$\square$

Troisième étape: Passage à la limite

Dans ce cas, on considère

$$Q = \{(t, x_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T,\ \varphi_1(t) < x_1 < \varphi_2(t)\} \times]0, b[,$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_1(t) < \varphi_2(t), \quad t \in]0, T[\\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \ \text{ et } \varphi_1(T) = \varphi_2(T) \end{cases}$$

Théorème 2

Sous les hypothèses **(H)**, $L = \partial_t - \partial^2_{x_1} - \partial^2_{x_2}$ est un isomorphisme de $H_0^{1,2}(Q)$ dans $L^2(Q)$.

Idée sur la preuve

Proof.

Choisissons une suite de domaines Q_{α_n} $n = 1, 2, \ldots$ définis précédemment tels que $Q_{\alpha_n} \subseteq Q$ avec (α_n) une suite décroissante vers 0, lorsque $n \to \infty$. Ainsi, on a $Q_{\alpha_n} \to Q$, lorsque $n \to \infty$. Considérons la solution $u_{\alpha_n} \in H^{1,2}(Q_{\alpha_n})$ du problème de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u_{\alpha_n} - \partial_{x_1}^2 u_{\alpha_n} - \partial_{x_2}^2 u_{\alpha_n} = f \quad \text{dans } Q_{\alpha_n} \\ u_{\alpha_n / \partial Q - \Gamma_{T-\alpha_n}} = 0, \end{cases}$$

$\Gamma_{T-\alpha_n}$ est la partie de la frontière de Q_{α_n} où $t = T - \alpha_n$. Soit $\widetilde{u_{\alpha_n}}$ le prolongement par 0 de u_{α_n} à Q. On sait qu'il existe une constante C telle que

$$\left\| \widetilde{u_{\alpha_n}} \right\|_{L^2(Q)} + \left\| \widetilde{\partial_t u_{\alpha_n}} \right\|_{L^2(Q)} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ 1 \le i+j \le 2}}^{2} \left\| \widetilde{\partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^j u_{\alpha_n}} \right\|_{L^2(Q)} \le C \|f\|_{L^2(Q)} .$$

Idée sur la preuve

Celà signifie que $\widetilde{u_{\alpha_n}}$, $\widetilde{\partial_t u_{\alpha_n}}$, $\widetilde{\partial^i_{x_1}\partial^j_{x_2} u_{\alpha_n}}$, pour $1 \leq i+j \leq 2$, sont des fonctions bornées dans $L^2(Q)$. Donc, pour une suite croissante d'entiers n_k, $k = 1, 2, ...,$

$$\begin{array}{llll}
\widetilde{u_{\alpha_{n_k}}} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } L^2(Q), & & k \to \infty \\
\widetilde{\partial_t u_{\alpha_{n_k}}} \rightharpoonup \partial_t u & \text{faiblement dans } L^2(Q), & & k \to \infty \\
\widetilde{\partial^i_{x_1}\partial^j_{x_2} u_{\alpha_{n_k}}} \rightharpoonup \partial^i_{x_1}\partial^j_{x_2} u & \text{faiblement dans } L^2(Q), & 1 \leq i+j \leq 2, & k \to \infty.
\end{array}$$

Donc, $u \in H^{1,2}(Q)$ et

$$\partial_t u - \partial^2_{x_1} u - \partial^2_{x_2} u = f \quad \text{dans } Q.$$

D'autre part, la solution u satisfait les conditions aux limites $u_{/\partial Q - \Gamma_T} = 0$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{/Q_{\alpha_n}} = u_{\alpha_n}.$$

Celà montre l'existence d'une solution pour le problème (BVP1).

Quelques généralisations possibles

1) Le domaine non régulier Q peut être remplacé par un domaine non cylindrique (par un domaine conique, par exemple).

2) La fonction f du membre du côté droit de l'équation du problème (BVP1), peut être prise dans $L^p(Q)$, où $p \in]1, \infty[$. La méthode de décomposition du domaine utilisée ici ne semble pas être appropriée pour l'espace $L^p(Q)$ lorsque $p \neq 2$.

3) L'opérateur $L = \partial_t - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$ peut être remplacé par un opérateur d'ordre supérieur.

Résolution d'une équation parabolique avec des conditions aux limites de type Robin dans un domaine non rectangulaire

Introduction

BVP2

$$\begin{cases} \partial_t u - c^2(t)\,\partial_x^2 u = f \in L^2(\Omega) \\ \partial_x u + \beta_i(t)\, u_{/\Gamma_i} = 0, i = 1, 2. \end{cases}$$

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\},$$

$$\Gamma_i = \{(t, \varphi_i(t)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T\}, i = 1,2,$$

où T est un nombre réel positif, φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues dans $[0, T]$, Lipschitziennes dans $]0, T]$, et telles que: $\varphi(t) := \varphi_2(t) - \varphi_1(t) > 0$ pour $t \in]0, T]$ et $\varphi(0) = 0$.

Notes historiques

1) $\beta_i = \infty$, i=1,2: Le problème de Dirichlet.

B.-K. SADALLAH, *A remark on a parabolic problem in a sectorial domain,* Applied Mathematics E-Notes, 8(2008), 263-270.

2) $\beta_i = 0$, i=1,2: Le problème de Neumann.

S. HOFMANN, J.L. LEWIS, *The L^p regularity problems for the heat equation in non-cylindrical domains,* Journal of Functional Analysis 220, (2005), 1-54.

Notes historiques

3) $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = \infty$ ou ($\beta_2 = 0$ et $\beta_1 = \infty$): Le problème mêlé (Dirichlet-Neumann)

G. SAVARÉ, *Parabolic problems with mixed variable lateral conditions: an abstract approach,* J. Math. Pures Appl. 76 (1997),321-351.

4) $f \in L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty$: Le cas non Hilbertien.

R. LABBAS, A. MEDEGHRI, B.-K. SADALLAH, *Sur une équation parabolique dans un domaine non cylindrique,* C.R.A.S. Paris, Série 1; (2002), 1017-1022.

Objectifs

Dans cette partie, nous considérons le cas des conditions aux limites de type Robin, i.e., le cas où $\beta_i \neq 0$ et $\beta_i \neq \infty$ i=1,2.

Objectifs

Trouver des conditions ("minimales") suffisantes de non dégénérescence des coefficients $(c, \beta_i)_{i=1,2}$ et des fonctions de paramétrisation $(\varphi_i)_{i=1,2}$ pour que le problème (BVP2) admette une (unique) solution u possédant la régularité maximale, à savoir u est dans l'espace de Sobolev anisotrope

$$H_{\gamma}^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in H^{1,2}(\Omega) : \partial_x u + \beta_i u_{/\Gamma_i} = 0, i = 1, 2\right\}$$

avec

$$H^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \partial_t u, \partial_x u, \partial_x^2 u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Les hypothèses

Concernant les fonctions de paramétrisation $(\varphi_i)_{i=1,2}$:

$$\textbf{(A)} \quad \varphi_i'(t)\,\varphi(t) \;\rightarrow\; 0 \qquad \text{lorsque } t \rightarrow 0, \quad i = 1, 2.$$

Concernant le coefficient c:

Le coefficient c est une fonction dérivable et bornée sur $]0, T[$ et telle que

$$(\mathbf{C}_1) \qquad 0 < d_1 \leq c \leq d_2,$$

$$(\mathbf{C}_2) \quad 0 < m_1 \leq c(t)\,c'(t) \leq m_2$$

pour tout $t \in]0, T[$, où d_1, d_2, m_1 et m_2 sont des constantes.

Concernant les coefficients $(\beta_i)_{i=1,2}$:

Les coefficients $(\beta_i)_{i=1,2}$ sont des fonctions continues dans $]0, T]$ vérifiant

$$(\mathbf{B}_1) \quad \beta_1(t) < 0 \text{ et } \beta_2(t) > 0 \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

$$(\mathbf{B}_2) \qquad \left| \frac{(1 + \beta_2(t))}{A(t)} \right| \leq l$$

et

$$(\mathbf{B}_3) \quad \left| \frac{\beta_1(t)(1 + \beta_2(t))}{A(t)} \right| \leq l,$$

pour tout $t \in]0, T[$, où $A(t) = \beta_1(t)\beta_2(t) + \beta_1(t) - \beta_2(t)$ et l est une constante positive.

Concernant les coefficients $(c, \beta_i)_{i=1,2}$**:**

(BC$_1$) $(\beta_1 c^2)$ est une fonction croissante sur $]0, T[$

et

(BC$_2$) $(\beta_2 c^2)$ est une fonction décroissante sur $]0, T[$.

Concernant les fonctions $(c, \varphi_i, \beta_i)_{i=1,2}$**:**

(U) $$(-1)^i \left(c^2(t)\, \beta_i(t) - \frac{\varphi_i'(t)}{2} \right) \geq 0 \;\; p.p.t \in]0, T[\,,\; i = 1, 2.$$

Méthode utilisée: La méthode de décomposition du domaine

1) Approcher le domaine Ω pour T suffisamment petit par une suite de sous domaines $(\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ dans lesquels on peut résoudre le problème (BVP2) et établir une estimation *a priori* qui va nous permettre de faire un passage à la limite.

2) Lorsque T est un nombre réel quelconque, on divise Ω en deux parties

$$D_1 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T_1, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\}$$

$$D_2 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : T_1 < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\}$$

avec T_1 suffisamment petit. Donc on obtient deux solutions $u_1 \in H^{1,2}(D_1)$ dans D_1 et $u_2 \in H^{1,2}(D_2)$ dans D_2.

Méthode utilisée: La méthode de décomposition du domaine

3) Finalement, on montre que la fonction définie par

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ dans } D_1 \\ u_2 \text{ dans } D_2 \end{cases}$$

est la solution du problème (BVP2) et possède la régularité maximale, à savoir $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

Le premier résultat: résultat local en temps

Théorème principal 1

Supposons que $(c, \varphi_i, \beta_i)_{i=1,2}$ vérifient les hypothèses précédentes. Alors, pour T suffisamment petit, le problème (BVP2) admet une unique solution $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

$$H^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \partial_t u, \partial_x u, \partial_x^2 u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Première étape: Résolution du problème (BVP2) dans un domaine qui peut être transformé en un rectangle

Soit $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\}$ où φ_1 et φ_2 sont telles que $\varphi(t) := \varphi_2(t) - \varphi_1(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Theorem

Le problème

$$(8) \qquad \begin{cases} \partial_t u - c^2(t)\,\partial_x^2 u = f \in L^2(\Omega), \\ u_{/t=0} = 0, \\ \partial_x u + \beta_i(t)\, u_{/x=\varphi_i(t)} = 0, i = 1, 2, \end{cases}$$

admet une (unique) solution $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

Idée sur la preuve

Proof.

$$(t,x) \quad \mapsto \quad (t,y) = \left(t, \frac{x-\varphi_1(t)}{\varphi(t)}\right)$$

transforme Ω en le rectangle $R =]0,T[\times]0,1[$. Posons $u(t,x) = v(t,y)$ et $f(t,x) = g(t,y)$, alors le problème (8) devient

$$\begin{cases} \partial_t v(t,y) + a(t,y)\,\partial_y v(t,y) - \dfrac{1}{b^2(t)}\partial_y^2 v(t,y) = g(t,y) \\ v_{/t=0} = 0 \\ \frac{1}{\varphi(t)}\partial_y v + \beta_1(t)\, v_{/y=0} = 0, \\ \frac{1}{\varphi(t)}\partial_y v + \beta_2(t)\, v_{/y=1} = 0, \end{cases}$$

où $b(t) = \dfrac{\varphi(t)}{c(t)}$ et $a(t,y) = -\dfrac{y\varphi'(t) + \varphi_1'(t)}{\varphi(t)}$.

Deuxième étape: Estimation *a priori*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit Ω_n par

$$\Omega_n = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : a_n < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\}$$

où $(a_n)_n$ est une suite décroissante vers zéro. Ainsi, on a

$$\begin{cases} \varphi_1(a_n) < \varphi_2(a_n), \\ \varphi_1(T) < \varphi_2(T). \end{cases}$$

Posons $f_n = f_{/\Omega_n}$, où $f \in L^2(\Omega)$, on note $u_n \in H^{1,2}(\Omega_n)$ la solution du problème (8) dans Ω_n

$$\begin{cases} \partial_t u_n - c^2(t)\, \partial_x^2 u_n = f_n \in L^2(\Omega_n) \\ u_{n/t=a_n} = 0 \\ \partial_x u_n + \beta_i(t)\, u_{n/\Gamma_{n,i}} = 0, i = 1, 2. \end{cases}$$

Ici $\Gamma_{n,i} = \{(t, \varphi_i(t)), a_n < t < T\}, i = 1, 2.$

Deuxième étape: Estimation *a priori*

Proposition 1

Il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que

$$\|u_n\|^2_{H^{1,2}(\Omega_n)} \leq K \, \|f_n\|^2_{L^2(\Omega_n)} \leq K \, \|f\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\partial_x^2 u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Un résultat utilisé

Lemma

Pour tout $\epsilon > 0$ *satisfaisant* $\varphi(t) \leq \epsilon$, *il existe une constante* $C > 0$ *indépendante de* n, *telle que*

$$\left\|\partial_x^j u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_n)} \leq C\epsilon^{2(2-j)} \left\|\partial_x^2 u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_n)}, j = 0,1.$$

Preuve de la proposition 1

Proof.

Dans la suite, $\|.\|$ dénote la norme L^2. On a

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2_{L^2(\Omega_n)} &= \left\langle \partial_t u_n - c^2\partial_x^2 u_n, \partial_t u_n - c^2\partial_x^2 u_n \right\rangle \\
&= \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega_n)} + \left\|c^2.\partial_x^2 u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_n)} \\
&\quad -2\left\langle \partial_t u_n, c^2\partial_x^2 u_n \right\rangle .
\end{aligned}$$

$\square$

Estimation du produit scalaire $-2\left\langle \partial_t u_n, c^2\partial_x^2 u_n\right\rangle$

Lemme

$$-2\left\langle \partial_t u_n, c^2\partial_x^2 u_n\right\rangle \geq -\left|I_{n,1}\right|-\left|I_{n,2}\right|-\left|J_{n,1}\right|-\left|J_{n,2}\right|-\int_{\Omega_n} 2cc^{'}\left(\partial_x u_n\right)^2 dtdx.$$

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= (-1)^{k+1}\int_{a_n}^{T} c^2\varphi_k^{'}(t)\left[\partial_x u_n\left(t,\varphi_k(t)\right)\right]^2 dt, k=1,2, \\ J_{n,k} &= (-1)^{k}\, 2\int_{a_n}^{T}\left(\beta_k c^2\right)(t)\,\partial_t u_n\left(t,\varphi_k(t)\right).u_n\left(t,\varphi_k(t)\right)dt, k=1,2. \end{aligned}$$

$$\left|I_{n,1}\right|+\left|I_{n,2}\right|+\left|J_{n,1}\right|+\left|J_{n,2}\right|\leq K\epsilon\left\|\partial_x^2 u_n\right\|^2.$$

Finalement

$$-2\left\langle \partial_t u_n, c^2\partial_x^2 u_n\right\rangle \geq -K\epsilon\left\|\partial_x^2 u_n\right\|^2 - K_2\left\|\partial_x^2 u_n\right\|^2.$$

Retour à la preuve de la proposition 1

$$
\begin{aligned}
\|f_n\|^2_{L^2(\Omega_n)} &\geq \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega_n)} + \left\|c^2\partial_x^2 u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_n)} - K\epsilon \left\|\partial_x^2 u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_n)} \\
&\quad -K_2 \left\|\partial_x^2 u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_n)} \\
&\geq \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega_n)} + \left(d_1^2 - K\epsilon - K_2\right) \left\|\partial_x^2 u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_n)} .
\end{aligned}
$$

Grâce aux estimations précédentes et en choisissant ϵ tel que $\left(d_1^2 - K\epsilon - K_2\right) > 0$, alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de n vérifiant

$$
\|u_n\|_{H^{1,2}(\Omega_n)} \leq C \, \|f\|_{L^2(\Omega)} .
$$

Troisième étape: Passage à la limite

Dans ce cas, on définit Ω par

$$\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\}$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \varphi_1(T) < \varphi_2(T). \end{cases}$$

Théorème principal 1

Supposons que $(c, \varphi_i, \beta_i)_{i=1,2}$ vérifient les hypothèses précédentes. Alors, pour T suffisamment petit, le problème (BVP2) admet une unique solution $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

$$H^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \partial_t u, \partial_x u, \partial_x^2 u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Deuxième résultat: résultat global en temps

Dans ce cas, on définit Ω par

$$\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\}$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \varphi_1(T) < \varphi_2(T). \end{cases}$$

Théorème principal 2

Supposons que $(c, \varphi_i, \beta_i)_{i=1,2}$ vérifient les hypothèses précédentes. Alors, le problème (BVP2) admet une unique solution $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

$$H^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \partial_t u, \partial_x u, \partial_x^2 u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Idée sur la preuve

Proof.

On divise Ω en deux parties, $\Omega = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{T_1}$ où

$$D_1 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T_1, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\}$$

$$D_2 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : T_1 < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\}$$

$$\Gamma_{T_1} = \left\{(T_1,x) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(T_1) < x < \varphi_2(T_1)\right\}$$

avec T_1 suffisamment petit. Dans la suite, f sera un élément fixé de $L^2(\Omega)$ et $f_i = f_{/D_i}$, $i = 1, 2$. On sait qu'il existe une unique solution $u_1 \in H^{1,2}(D_1)$ du problème (BVP2) dans D_1, et correspondant à un second membre f_1.

Théorème de trace

Si $u \in H^{1,2}(D_1)$, alors $u_{/\Gamma_{T_1}} \in H^1(\Gamma_{T_1})$, $u_{/x=\varphi_1(t)} \in H^{\frac{3}{4}}(\Gamma_{1,2})$ et $u_{/x=\varphi_2(t)} \in H^{\frac{3}{4}}(\Gamma_{2,2})$, où $\Gamma_{i,2}$ sont les parties de la frontière de D_2 où $x = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2$.

Theorem

Le problème

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - c^2(t)\,\partial_x^2 u_2 = f_2 \in L^2(D_2) \\ u_{2/\Gamma_{T_1}} = \psi \\ \partial_x u_2 + \beta_i(t)\,u_{2/\Gamma_{i,2}} = 0, i = 1, 2, \end{cases}$$

où $\psi = u_{1/\Gamma_{T_1}}$, $\Gamma_{i,2}$ *sont les parties de la frontière de* D_2 *où* $x = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, *admet une (unique) solution* $u_2 \in H^{1,2}(D_2)$.

Finalement, on montre que la fonction définie par

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ dans } D_1 \\ u_2 \text{ dans } D_2 \end{cases}$$

est la solution du problème (BVP2) et possède la régularité maximale, à savoir $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

Quelques généralisations possibles

1) Le cadre non Hilbertien:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = f(t,x) \in L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty, \\ \partial_x u + \beta_1(t) u_{/x=0} = 0, \\ \partial_x u + \beta_2(t) u_{/x=t^\alpha} = 0, \end{cases}$$

$$\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 1, 0 < x < t^\alpha\right\},\ \alpha > 1/2.$$

Trouver des conditions sur the coefficients $(\beta_i)_{i=1,2}$ et les nombres α, p pour que le problème précédent admette une solution qui possède la régularité maximale, à savoir une solution u appartenant à l'espace de Sobolev anisotrope

$$H_p^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \partial_t u, \partial_x^j u \in L^p(\Omega), j = 1, 2\}.$$

2) Les conditions aux limites de type Robin peuvent être remplacées par des conditions aux limites de type Neumann.

Quelques généralisations possibles

3) Le cas d'une seule variable d'espace peut être étendu au cas de deux variables d'espace, par exemple au problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = f \in L^2(Q), \\ u_{/t=0} = 0, \\ \partial_{x_1} u.\nu_{x_1} + \partial_{x_2} u.\nu_{x_2} + \beta_i u_{/\Sigma_i} = 0, \; i = 1{,}2, \end{cases}$$

$$Q = \left\{(t, x_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, \varphi_1(t) < x_1 < \varphi_2(t)\right\} \times]0, b[,$$

$$\Gamma_i = \left\{(t, \varphi_i(t)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T\right\}, i = 1{,}2,$$

$$\Sigma_i = \Gamma_i \times]0, b[, \; i = 1{,}2$$

et $\nu = (\nu_t, \nu_{x_1}, \nu_{x_2})$ est le vecteur normal à ∂Q.

Régularité de la solution d'une équation parabolique dans un domaine non cylindrique: deux approches.

Première approche: propriétés de régularité de la solution d'une équation parabolique dans un polyèdre.

Position du problème

BVP3

Soit G un domaine borné et non convexe de $\mathbb{R}^3$.
Dans G, on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = f \\ u_{/\partial_p G} = 0, \end{cases}$$

avec $\partial_p G$ est la frontière parabolique de G et $f \in L^2(G)$.

Dans la suite, l'opérateur $\partial_t - \partial_x^2 - \partial_y^2$ sera noté L.

Description du domaine

Ici, on introduit le domaine non convexe dans lequel on va travailler.

Comme modèle d'un domaine non-convexe, on choisit un domaine Q, qui est l'union de deux parallélépipèdes.

Q est le domaine le plus simple de $\mathbb{R}^3$ qui garantit l'apparition de la partie singulière dans la solution du problème (BVP3).

Description du domaine

Voici quelques notations dans un système de coordonnées de variables (t, x, y):

$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \Omega$, où $Q_1 =]-1, 0[\times]-1, 1[\times]0, 1[$,
$Q_2 =]0, 1[^3$ et $\Omega = \{0\} \times]0, 1[\times]0, 1[$.

Concernant les faces et l'arête du domaine Q, on a

$\Omega_1 = \{-1\} \times]-1, 1[\times]0, 1[$,
$\Omega_1' =]-1, 0[\times \{1\} \times]0, 1[\cup]-1, 0[\times \{-1\} \times]0, 1[$,
$\Omega_1'' = \{0\} \times]-1, 0[\times]0, 1[$,
$\Omega_2' =]0, 1[\times \{0\} \times]0, 1[\cup]0, 1[\times \{1\} \times]0, 1[$,
$\Omega_2'' = \{1\} \times]0, 1[\times]0, 1[$, $A = \{0\} \times \{0\} \times]0, 1[$.

Le résultat principal

Théorème 1

Le problème

$$(\mathbf{PQ}) \quad \begin{cases} Lu = f \in L^2(Q) \\ u_{/\partial Q - (\Omega_1'' \cup \Omega_2'')} = 0, \end{cases}$$

∂Q est la frontière de Q, admet une solution $u = u_R + w$, avec $u_R \in H^{1,2}(Q)$ et $w \in H^{r,2r}(Q)$ pour tout $r < 3/4$.

$$H^{r,2r}(\Omega) = \left[H^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega)\right]_{1-r} \quad \forall r \in]0,1[.$$

Le problème dans Q_1

Soit f un élément fixé de $L^2(Q)$ et $f_i = f_{/Q_i}$, $i = 1,2$.

Proposition 1

Le problème

$$(\mathbf{PQ}_1) \quad \begin{cases} Lu_1 = f_1 \in L^2(Q_1) \\ u_{1/\partial Q_1 - \left(\Omega \cup A \cup \Omega_1''\right)} = 0, \end{cases}$$

admet une (unique) solution $u_1 \in H^{1,2}(Q_1)$.

Dans la suite, on note la trace $u_{1/\Omega}$ par φ, qui est dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ car $u_1 \in H^{1,2}(Q_1)$.

Le problème dans Q_2

Considérons le problème suivant dans Q_2

$$(\mathbf{PQ}_2) \quad \begin{cases} Lu_2 = f_2 \in L^2(Q_2) \\ u_{2/\Omega} = \varphi \in H^1(\Omega), \\ u_{2/\partial Q_2 - \left(\Omega \cup \Omega_2''\right)} = 0. \end{cases}$$

Il est bien connu que ce problème admet une unique solution u_2 dans $H^{1,2}(Q_2)$ si et seulement si la condition de compatibilité suivante est satisfaite $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ i.e.,

$$\begin{cases} \text{a) } \varphi_{/\partial\Omega - A} & = & 0 \\ \text{b) } \varphi_{/A} & = & 0. \end{cases}$$

Remarque 1

1) Observons que les conditions aux limites du problème $(\mathbf{PQ}_1)$ donnent $\varphi_{/\partial\Omega - A} = 0$. Donc la condition de compatibilité a) est automatiquement satisfaite.

D'autre part, on a $\varphi_{/A} = u_{1/A}$ mais on ne sait pas si $u_{1/A}$ s'annule. c'est la raison pour laquelle des singularités peuvent apparaitre dans la solution u_2 du problème $(\mathbf{PQ}_2)$, et par conséquent dans la solution u du problème $(\mathbf{PQ})$.

2) La solution u du problème $(\mathbf{PQ})$ sera définie par

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ dans } Q_1 \\ u_2 \text{ dans } Q_2 \end{cases}$$

où u_1 et u_2 sont les solutions de $(\mathbf{PQ}_1)$ et $(\mathbf{PQ}_2)$ respectivement.

Remarque 2

Observons que $u_{1/\Omega} = u_{2/\Omega} = \varphi$ et $u_1 \in H^{1,2}(Q_1)$. Par suite, si $u_2 \in H^{1,2}(Q_2)$ alors $u \in H^{1,2}(Q)$

D'autre part, u est régulière dans Q_1 car $u_{/Q_1} = u_1 \in H^{1,2}(Q_1)$, et cela signifie que les singularités qu'on cherche sont contenues dans $u_{/Q_2}$, i.e., dans u_2. Donc, dans la suite, on se restreint à u_2.

Un problème auxiliaire

On introduit des fonctions $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui vont nous permettre l'étude de la partie singulière de u_2.

Lemme 1

$\forall (x,y) \in \Omega, \forall j \in \mathbb{N},\ \ P_j(x,y) = \sin j\pi y \cos \frac{\pi}{2} x.$
$a)\ P_{j/\partial\Omega - A} = 0\ \forall j \in \mathbb{N},$
$b)\ P_{j/A} = \sin j\pi y\ \forall j \in \mathbb{N},\ \forall y \in]0,1[,$
$c)\ P_j \in H^1(\Omega)\ \forall j \in \mathbb{N}.$

Pour déterminer la régularité des singularités dans u_2 , on aura besoin d'étudier ce problème posé dans Q_2

$$(\mathbf{PQ}_2)' \quad \begin{cases} Lw_j = 0 \\ w_{j/\Omega} = P_j \quad \forall j \in \mathbb{N} \\ w_{j/\partial Q_2 - (\Omega \cup \Omega_2'')} = 0, \end{cases}$$

où P_j sont les fonctions définies dans le Lemme 1. Le problème $(\mathbf{PQ}_2)'$ admet une unique solution $w_j \in L^2(Q_2)$ pour $j \in \mathbb{N}$. Donc, on peut définir la fonction v dans Ω par

$$v = u_2 - \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j w_j$$

où u_2 est la solution du problème $(\mathbf{PQ}_2)$ et $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont les coefficients de décomposition de $\varphi_{/A}$ dans $L^2(A)$

$$\varphi_{/A} = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j P_j.$$

En effet, les fonctions $P_{j/A} = \sin j\pi y$ forment une base de $L^2(A)$. Donc, grâce aux propriétés de $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans le Lemme 1, il est facile de vérifier que

$$v_{/\Omega} = \varphi - \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j P_j \in H_0^1(\Omega)$$

et v est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} Lv = f_2 \in L^2(Q_2) \\ v_{/\Omega} = \varphi - \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j P_j \\ v_{/\partial Q_2 - (\Omega\cup\Omega_2'')} = 0. \end{cases}$$

Par suite $v \in H^{1,2}(Q_2)$ et on a démontré le résultat suivant

Proposition 2

La solution u_2 du problème $(\mathbf{PQ}_2)$ peut être écrite sous la forme

$$u_2 = v + \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j w_j$$

où $v \in H^{1,2}(Q_2)$ et w_j est la solution du problème $(\mathbf{PQ}_2)'$, pour $j \in \mathbb{N}$.

Remarque 4

La partie singulière $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j w_j$ dépend de f via les coefficients a_j, $j \in \mathbb{N}$. En effet, les coefficients a_j, $j \in \mathbb{N}$ dépendent de φ et la solution u_1 correspondant au second membre $f_1 = f_{/Q_1}$ est telle que $u_{1/\Omega} = \varphi$.

Si $\varphi_{/A} = 0$ i.e., $u_{1/\Omega} \in H_0^1(\Omega)$, alors $a_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par suite, $u \in H^{1,2}(Q)$ puisque la partie singulière $U = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j w_j$ s'annule.

Résultat de régularité

Rappelons que pour $r \in]0,1]$

$$H^{r,2r}(Q_2) = H^r\left(]0,1[\,;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(]0,1[\,;H^{2r}(\Omega)\right).$$

Le plus grand nombre réel $r \in]0,1]$ tel que $w_j \in H^{r,2r}(Q_2)$ est donné par

Théorème 2

$$w_j \in H^{r,2r}(Q_2) \text{ pour tout } r < 3/4.$$

La preuve utilise la transformation de Fourier, l'interpolation et les puissances fractionnaires du Laplacien.

Deuxième approche: régularité intermédiaire de la solution de l'équation de la chaleur.

Position du problème

BVP4

Soit Ω_0 un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ. On notera Q_0 le cylindre $\mathbb{R}_+ \times \Omega_0$ de frontière latérale $\Sigma = \mathbb{R}_+ \times \Gamma$.
On suppose que Ω_0 est convexe ou de classe C^2.
On considère dans Q_0 l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega_0 \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma \\ u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Nous nous intéressons à la régularité des solutions u de (BVP4) en fonction de la régularité de la donnée initiale u_0.

Le résultat classique

Theorem

1) On suppose que $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)$*, alors (BVP4) admet une unique solution* $u \in H^{1,2}(Q_0)$ *définie par*

$$H^{1,2}(Q_0) = L^2(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega_0)) \cap H^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega_0)).$$

2) On suppose que $u_0 \in L^2(\Omega_0)$*, alors (BVP4) admet une unique solution faible*

$$u \in L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega_0)) \cap H^1(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega_0)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega_0)).$$

H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

Dans la suite on supposera $u_0 \in H_0^r(\Omega_0)$, $0 \leq r \leq 1$ où

$$H_0^r(\Omega_0) = \{u \in H^r(\Omega_0) \, ; u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

pour $1/2 < r \leq 1$.

$$H_0^r(\Omega_0) = H_{00}^{1/2}(\Omega_0)$$

pour $r = 1/2$,

$$H_0^r(\Omega_0) = H^r(\Omega_0)$$

pour $0 \leq r < 1/2$.
Ainsi $H_0^r(\Omega_0)$ est exactement l'espace d'interpolation $\left[H_0^1(\Omega_0), L^2(\Omega_0)\right]_{1-r}$ d'ordre $1-r$ entre $H_0^1(\Omega_0)$ et $L^2(\Omega_0)$.
Et on cherche alors la régularité de u en fonction de r.

Un lemme utile

Lemma

Soit $u_0 \in L^2(\Omega_0)$. Alors la solution u du problème (BVP4) associée à u_0 est dans $H^{1/2}\left(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega_0)\right)$.

Le résultat principal

Theorem

Soit $u_0 \in H_0^r(\Omega_0)$ $0 \leq r \leq 1$, *le problème (BVP4) admet une unique solution faible dans* $H^{(1+r)/2,1+r}(Q_0)$.

$$H^{(1+r)/2,1+r}(Q_0) = L^2(\mathbb{R}_+; H^{1+r}(\Omega_0)) \cap H^{(1+r)/2}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega_0)).$$

Proof.

Première étape: $u \in L^2\left(\mathbb{R}_+; H^{1+r}\left(\Omega_0\right)\right)$? Considérons l'opérateur $S : u_0 \to u$. On a la continuité des applications

$$S : H_0^1\left(\Omega_0\right) \longrightarrow L^2\left(\mathbb{R}_+; H^2\left(\Omega_0\right)\right)$$

$$S : L^2\left(\Omega_0\right) \longrightarrow L^2\left(\mathbb{R}_+; H^1\left(\Omega_0\right)\right).$$

D'où la continuité de

$$S : H_0^r\left(\Omega_0\right) \longrightarrow L^2\left(\mathbb{R}_+; H^{1+r}\left(\Omega_0\right)\right).$$

Deuxième étape: $u \in H^{(1+r)/2}\left(\mathbb{R}_+; L^2\left(\Omega_0\right)\right)$? On a la continuité de

$$S : H_0^1\left(\Omega_0\right) \longrightarrow H^1\left(\mathbb{R}_+; L^2\left(\Omega_0\right)\right)$$

$$S : L^2\left(\Omega_0\right) \longrightarrow H^{1/2}\left(\mathbb{R}_+; L^2\left(\Omega_0\right)\right).$$

D'où la continuité de

$$S : H_0^r\left(\Omega_0\right) \longrightarrow H^{(1+r)/2}\left(\mathbb{R}_+; L^2\left(\Omega_0\right)\right).$$

Cas non cylindrique: le cas où $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$

Ici $C = C_1 \cup C_2 \cup (\{T_1\} \times \Omega_1)$, où $C_1 =]0, T_1[\times \Omega_1$, $C_2 =]T_1, T_2[\times \Omega_2$.

Dans C, considérons le problème aux limites suivant:

$$(\mathbf{PC}) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \in L^2(C) \\ u = 0 \ \text{ sur } \Sigma \\ u(0, x) = 0, \, x \in \Omega_1 \end{cases}$$

où $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \sigma$ avec $\sigma = \{T_1\} \times (\Omega_2 \backslash \Omega_1)$.

Lemma

Le problème

$$(\mathbf{PC}_1) \quad \begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta u_1 = f_1 \in L^2(C_1) \\ u_{1/\partial C_1 - (\{T_1\} \times \Omega_1)} = 0, \end{cases}$$

admet une (unique) solution $u_1 \in H^{1,2}(C_1)$.

Cas non cylindrique: le cas où $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$

Notons la trace $u_{1/\{T_1\}\times\Omega_1}$ par ψ, qui est dans l'espace $H_0^1(\{T_1\}\times\Omega_1)$ car $u_1 \in H^{1,2}(C_1)$. Soit $\widetilde{\psi}$ le prolongement par 0 de ψ à $\{T_1\}\times\Omega_2$, qui est dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\{T_1\}\times\Omega_2)$, puisque $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$.
Maintenant, soit $u_2 \in H^{1,2}(C_2)$ la solution du problème suivant dans C_2

$$(\mathbf{PC}_2) \quad \begin{cases} \partial_t u_2 - \Delta u_2 = f_2 \in L^2(C_2) \\ u_{2/\{T_1\}\times\Omega_2} = \widetilde{\psi}, \\ u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma_2. \end{cases}$$

La solution u du problème $(\mathbf{PC})$ sera définie par

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ dans } C_1, \\ u_2 \text{ dans } C_2. \end{cases}$$

$u \in H^{1,2}(C)$.

Cas non cylindrique: le cas où $\Omega_2 \subsetneq \Omega_1$

Ici $C = C_1 \cup C_2 \cup (\{T_1\} \times \Omega_2)$.
Considérons dans C, le problème aux limites suivant:

$$(\mathbf{PC})' \quad \begin{cases} \partial_t v - \Delta v = f \in L^2(C) \\ v = 0 \ \text{ sur } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\ v(0, x) = 0, \, x \in \Omega_1. \end{cases}$$

On sait que le problème $(\mathbf{PC})'$ dans C_1 admet une unique solution $v_1 \in H^{1,2}(C_1)$.

Notons la trace $v_{1/\{T_1\}\times\Omega_1}$ par φ, qui est dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\{T_1\} \times \Omega_1)$. Donc, $v_{1/\{T_1\}\times\Omega_2} \in H^r(\{T_1\} \times \Omega_2) = H_0^r(\{T_1\} \times \Omega_2)$ pour $0 \leq r < \frac{1}{2}$.

Cas non cylindrique: le cas où $\Omega_2 \subsetneq \Omega_1$

Maintenant, considérons le problème suivant dans C_2

$$(\mathbf{PC}_2)' \begin{cases} \partial_t v_2 - \Delta v_2 = f_2 \in L^2(C_2) \\ v_{2/\{T_1\}\times\Omega_2} = \varphi, \\ v_2 = 0 \text{ sur } \Sigma_2. \end{cases}$$

Lemma

Le problème $(\mathbf{PC}_2)'$ admet une unique solution $u_2 \in H^{(1+r)/2,1+r}(C_2)$.

Theorem

Pour tout $f \in L^2(C)$, l'unique solution u du problème $(\mathbf{PC})'$ est telle que
1) $u_{/C_1} \in H^{1,2}(C_1)$.
2) $u_{/C_2} \in H^{(1+r)/2,1+r}(C_2)$ si et seulement si $r < 1/2$,
ou d'une manière équivalente
$u_{/C_2} \in H^{r,2r}(C_2)$ si et seulement si $r < 3/4$.

Perspectives

1. La fonction f dans le membre du côté droit de l'équation du problème (BVP3), peut être choisie plus régulière, par exemple $f \in H^{1,2}(G)$ ou $f \in H^{1}(G)$, etc.

2. L'opérateur de la chaleur peut être remplacé par un opérateur parabolique d'ordre supérieur.

$$\begin{cases} \partial_t u + (-1)^m(\partial_x^{2m} u + \partial_y^{2m} u) = f \in L^2(G) \\ +CL, \end{cases}$$

où m est un entier strictement positif.

3. On peut considérer d'autres conditions aux limites.

Bibliographie

- YU. A. ALKHUTOV, *L_p-Estimates of solutions of the Dirichlet problem for the heat equation in a ball,* Journ. Math.Sc., Vol. 142, No.3, (2007), 2021-2032.
- V. N. AREF'EV, L.A. BAGIROV, *Asymptotic behavior of solutions to the Dirichlet problem for parabolic equations in domains with singularities,* Math. Notes 59 (1) (1996) 10-17.
- V. N. AREF'EV, L. A. BAGIROV, *Solutions of the heat equation in domains with singularities,* Math. Notes, Vol. 64, No.2, (1998), 139-153.
- E. A. BADERKO, *On the solution of the boundary value problems for parabolic equations of high order in domains with curvilinear lateral boundaries,*, Diff., Urav., 12 (10) (1976), 1781-1792.
- P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains,* Monographs and Studies in Mathematics 24, Pitman, Boston, 1985.

- P. GRISVARD, *Singularities in Boundary Values Problems,* Masson, Paris, 1992.
- S. HOFMANN. J. L. LEWIS, *The L^p regularity problems for the heat equation in non-cylindrical domains,* Journ. Funct. Anal. 220 (2005), 1-54.
- A. KHELOUFI, R. LABBAS, B.K. SADALLAH, *On the resolution of a parabolic equation in a nonregular domain of $\mathbb{R}^3$,* Differ. Equat. Appl. 2 (2) (2010) 251- 263.
- R. LABBAS, A. MEDEGHRI, B.-K. SADALLAH, *Sur une équation parabolique dans un domaine non cylindrique,* C.R.A.S, Paris, 335 (2002), 1017-1022.
- R. LABBAS, A. MEDEGHRI, B.-K. SADALLAH, *On a parabolic equation in a triangular domain,* Appl. Math. Comput. 130(2002), 511-523.
- R. LABBAS, A. MEDEGHRI, B.-K. SADALLAH, *An L^p approach for the study of degenerate parabolic equation,* E. J. D. E., vol 2005 (2005), No. 36, 1-20.

J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, 1, 2,* Dunod, Paris, 1968.

B.-K. SADALLAH, *Etude d'un problème 2m-parabolique dans des domaines plan non rectangulaires,* Boll. Un. Mat. Ital., (5), 2-B (1983), 51-112.

B.-K. SADALLAH, *The smoothness of the heat equation solution in a singular domain of* $\mathbb{R}^n$, Arab Gulf J. Scient. Res. 4 (2) (1986) 563-571.

B. K. SADALLAH, *Smoothness of the singularity for the heat equation in a polygonal domain (Part Two),* Arab Gulf J. Scient. Res. 9 (1) (1991) 153-178.

B. K. SADALLAH, *Regularity of a parabolic equation solution in a nonsmooth and unbounded domain,* J. Aust. Math. Soc., 84 (2) (2008), 265-276.

B. K. SADALLAH, *A remark on a parabolic problem in a sectorial domain,* Applied Mathematics E-Notes, 8 (2008), 263-270.

G. SAVARÉ, *Parabolic problems with mixed variable lateral conditions: an abstract approach,* J. Math. Pures Appl. 76 (1997), 321-351.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION