

---

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Ecole Normale Supérieure, Vieux-Kouba, Alger  
Département de Mathématiques



Thèse

Pour l'obtention du grade de : **Doctorat en Sciences**

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **E.D.P.**

Présentée par

**KHELOUFI Arezki**

Intitulée

Etude, dans les espaces de Sobolev, de quelques problèmes  
paraboliques dans des domaines non cylindriques

Soutenue publiquement, le 17/12/2011 devant le jury composé de

Y. Atik, Professeur, E.N.S. de Kouba (Président)

S. Djebali, Professeur, E.N.S. de Kouba (Examineur)

M. A. Moussaoui, Professeur, E.N.S. de Kouba (Examineur)

A. Medeghri, Professeur, Univ. de Mostaganem (Examineur)

R. Labbas, Professeur, Univ. du Havre (Directeur de thèse)

B.-K. Sadallah, Professeur, E.N.S. de Kouba (Directeur de thèse)

---

# Contents

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Parabolic problems in non-cylindrical domains</b>	<b>18</b>
1.1 Historical notes . . . . .	18
1.2 Physical applications . . . . .	21
1.3 Some methods of resolution . . . . .	23
1.3.1 Rothe's method . . . . .	23
1.3.2 Sum of operators method . . . . .	27
<b>2 Preliminaries</b>	<b>30</b>
2.1 Function spaces . . . . .	30
2.1.1 Anisotropic Sobolev spaces . . . . .	30
2.1.2 Interpolation spaces . . . . .	32
2.1.3 The spaces $H^{\frac{1}{2}}$ , $H_0^{\frac{1}{2}}$ and $H_{00}^{\frac{1}{2}}$ . . . . .	35
2.2 Results on some parabolic model problems . . . . .	36
<b>3 Parabolic equation with Cauchy-Dirichlet boundary conditions in a non-regular domain of <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>40</b>
3.1 Introduction . . . . .	41
3.2 Resolution of the problem in a reference domain . . . . .	42
3.3 An uniform estimate . . . . .	49
3.4 Passage to the limit . . . . .	56

<b>4 Parabolic equations with Robin type boundary conditions in a non-rectangular domain</b>	<b>59</b>
4.1 Introduction . . . . .	60
4.2 Preliminaries . . . . .	63
4.3 Local in time result . . . . .	67
4.3.1 Case of a domain which can be transformed into a rectangle . . . . .	67
4.3.2 Case of a triangular domain . . . . .	71
4.4 Global in time result . . . . .	79
<b>5 On the regularity of the heat equation solution in non-cylindrical domains: two approaches</b>	<b>82</b>
5.1 Introduction . . . . .	83
5.2 First approach . . . . .	85
5.2.1 Description of the domain . . . . .	85
5.2.2 Function spaces . . . . .	86
5.2.3 Properties of solutions to Problem (5.1.1) in the model domain $Q$ . . . . .	87
5.2.4 Smoothness of the singular solutions $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ . . . . .	90
5.2.5 Smoothness of the singular part $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j w_j$ . . . . .	93
5.3 Second approach . . . . .	95
5.3.1 Cylindrical case . . . . .	95
5.3.2 Non-cylindrical case . . . . .	98
<b>Perspectives</b>	<b>103</b>
<b>Bibliography</b>	<b>104</b>

---

# Abstract

In this thesis, we shall be concerned by the existence, the uniqueness and the maximal regularity of solutions for some second-order linear parabolic problems in non-regular domains in the framework of Sobolev spaces built on the Lebesgue space of square integrable functions  $L^2$ . Our results will be given for the heat equation (the simplest case of the second-order linear parabolic equations), but, they can be generalized to a large class of parabolic equations, namely, to higher-order and semilinear parabolic equations.

It is well known that there are two main approaches for the study of boundary value problems in non-regular domains. We can impose conditions on the non-regular domains to obtain regular solutions, or we work directly in the non-regular domains and we obtain singular solutions.

The first approach will be illustrated in this work by the study of a parabolic equation with Cauchy-Dirichlet boundary conditions in a non-regular domain of  $\mathbb{R}^3$  (see Chapter 3), and by the resolution of a parabolic problem with Robin type boundary conditions in a non-rectangular domain (see Chapter 4).

The second approach will be illustrated by the analysis of the heat equation in a domain of  $\mathbb{R}^3$  with edge (see Chapter 5).

We complement this thesis by giving in Chapter 1 a general survey on some boundary value problems for parabolic equations posed in non-cylindrical domains. This survey contains historical notes, some physical applications and classical methods for the resolution of such problems. In Chapter 2, we collect some basic definitions on interpolation theory and anisotropic Sobolev spaces and results on some model parabolic problems needed to develop further arguments.

---

**Key words.** Parabolic equations, non-regular domains, anisotropic Sobolev spaces, non-rectangular domains, Robin condition, heat equation, polyhedral domains, edges, interpolation theory.

---

# Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude de l'existence et l'unicité ainsi que la régularité maximale des solutions de quelques problèmes paraboliques linéaires du second ordre dans des domaines non réguliers dans le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev construits sur l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable,  $L^2$ . La plupart de nos résultats seront donnés pour l'équation de la chaleur (la plus simple des équations paraboliques), mais peuvent être généralisés à une large classe d'équations paraboliques linéaires et semi-linéaires.

Il est bien connu qu'il existe deux approches principales pour l'étude des problèmes aux limites dans des domaines non réguliers. On peut imposer des conditions sur les domaines non réguliers pour obtenir des solutions régulières, ou bien on travaille directement dans les domaines non réguliers et on obtient des solutions singulières. La première approche sera illustrée dans ce travail par l'étude d'une équation parabolique avec des conditions aux limites de Cauchy-Dirichlet dans un domaine non régulier de  $\mathbb{R}^3$ , voir chapitre 3, et par la résolution d'un problème parabolique avec des conditions aux limites de type Robin dans un domaine non rectangulaire, voir chapitre 4. La seconde approche sera illustrée par l'analyse de l'équation de la chaleur dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$  avec arête, voir chapitre 5.

Nous complétons cette thèse en présentant, au chapitre 1, une revue sur les problèmes aux limites de type parabolique posés dans des domaines non-cylindriques. Ce survey contient quelques notes historiques, des applications physiques qui expliquent l'origine de tels problèmes ainsi que quelques méthodes classiques de résolution de tels problèmes. Dans le chapitre 2, nous rassemblons quelques définitions et résultats de base nécessaires

---

pour développer d'autres arguments dans les chapitres 3, 4 et 5. Ces rappels concernent les espaces de Sobolev anisotropes, la théorie de l'interpolation ainsi que quelques résultats concernant des problèmes paraboliques modèles.

**Mots clés:** Equations paraboliques, domaines non réguliers, espaces de Sobolev anisotropes, domaines non rectangulaires, condition de Robin, équation de la chaleur, polyèdres, arêtes, théorie de l'interpolation.