Chapitre 6

Expressions des fonctions propres (II)

Dans ce chapitre, on prouve la Proposition 4.1 ainsi que le Théorème 4.0.1 et 4.0.2 en utilisant les Proposition 3.2, 3.7 et 3.9.

À partir de maintenant, on suppose que $f(u) = u - u^3$. Commençons par prouver la Proposition4.1.

Démonstration de la Proposition 4.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, et soit $\varepsilon \in (0, 1/(n\pi))$ arbitraire. À partir de la Proposition 3.1, $u_{n,\varepsilon}$ est définie en utilisant $\alpha_{n,\varepsilon}$ qui est la solution de 3.2.

On pose

$$k := \sqrt{\frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}} \ \in \ (0,1).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2(F(\alpha)-F(w))}} \mathrm{d}w &= 2\int_{0}^{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\alpha^2-w^2)(2-\alpha^2-w^2)}} \mathrm{d}w \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{2-\alpha^2}} \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-\frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}s^2)}} \mathrm{d}s \\
&= 2\sqrt{1+k^2}K(k),
\end{aligned}$$

et donc

$$\alpha_{n,\varepsilon} = \sqrt{2k_{n,\varepsilon}^2/(1+k_{n,\varepsilon}^2)}.$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{n\varepsilon} &= \int_{u_{n,\varepsilon}(x)}^{\alpha_{n,\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{2(F(\alpha_{n,\varepsilon})-F(w))}}\mathrm{d}w \\
&= \int_{0}^{\alpha_{n,\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{2(F(\alpha_{n,\varepsilon})-F(w))}}dw - \int_{0}^{u_{n,\varepsilon}(x)} \frac{1}{\sqrt{2(F(\alpha_{n,\varepsilon})-F(w))}}\mathrm{d}w \\
&= \sqrt{1+k_{n,\varepsilon}^2}K(k_{n,\varepsilon}) - \sqrt{1+k_{n,\varepsilon}^2}\int_{0}^{u_{n,\varepsilon}(x)/\alpha_{n,\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_{n,\varepsilon}^2 s^2)}}ds \\
&= \frac{1}{2n\varepsilon} - \sqrt{1+k_{n,\varepsilon}^2}\int_{0}^{u_{n,\varepsilon}(x)/\alpha_{n,\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_{n,\varepsilon}^2 s^2)}}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

L'identité ci-dessus avec une certaine donne, grâce à la symétrie de la fonction sn l'expression de $u_{n,\varepsilon}(x)$ de la Proposition 4.1.

Enfin, on remarque que l'unicité de $k_{n,\varepsilon}$ implique l'unicité de $\alpha_{n,\varepsilon}$. De plus, si $\varepsilon \in (1/(n\pi),+\infty)$ alors $\mathscr{A}_0(k)=1/(2n\varepsilon)$ n'a pas une solution pour $k\in(0,1)$, ce qui implique la non existence de n-mode solutions dans le cas où $\varepsilon\in(1/(n\pi),+\infty)$. Ainsi, se termine la démonstration. □

Maintenant, on va appliquer les Proposition 3.7 et 3.9 dans le cas où $f(u)=u-u^3$.

Lemme 6.0.1. *(voir [35],Lemma 5.1,p.3982). Supposons que $f(u)=u-u^3$.*

On pose

$$\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha)=\frac{1}{4}(\alpha^2-u^2)(2-\alpha^2-u^2)+\frac{\lambda}{6}(u^2-2)+\frac{\lambda^2}{9}. \tag{6.1}$$

Alors, $\mathscr{Q}$ est une solution particulière de (3.10)*. De plus, ρ de* (3.12) *est donnée par*

$$\rho(\lambda;\alpha)=\frac{1}{81}\lambda\left(\lambda-\frac{3(2-\alpha^2)}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3\alpha^2}{2}\right)(\lambda^2-2\lambda-3(\alpha^2-1)^2). \tag{6.2}$$

Ce lemme permet d'avoir l'expression de $\varphi_j^{n,\varepsilon}(x)$ en fonction de $\mathscr{Q},\rho,u_{n,\varepsilon},\alpha_{n,\varepsilon}$ et $\lambda_j^{n,\varepsilon}$. Pour terminer ce procédé, il reste la caractérisation de $\alpha_{n,\varepsilon}$ et $\lambda_j^{n,\varepsilon}$ par l'équation (3.2) et (3.20). Comme on l'a fait dans la démonstration de la Proposition 4.1, on introduit de nouveaux paramètres $k \in (0,1)$ et $\mu \in \mathbb{R}$ donnés par

$$\alpha^2 = \frac{2k^2}{1+k^2}, \quad \lambda = \frac{\mu}{1+k^2}. \tag{6.3}$$

On écrit alors

$$\mathscr{Q}_k(u,\mu) := \mathscr{Q}\left(u, \frac{\mu}{1+k^2}; \frac{2k^2}{1+k^2}\right) \quad \text{et} \quad \rho_k(\mu) := \left(\frac{\mu}{1+k^2}; \frac{2k^2}{1+k^2}\right). \tag{6.4}$$

On remarque que la définition de $\mathscr{Q}_k$ et $\rho_k(\mu)$ est celle donnée dans le Théorème 4.0.2.

En effet, on déduit de (6.1) et (6.2), que

$$\begin{aligned}
\mathscr{Q}_k(u,\mu) &= \frac{(2k^2-(1+k^2)u^2)(2-(1+k^2)u^2)}{4(1+k^2)^2} + \frac{\mu(u^2-2)}{6(1+k^2)} + \frac{\mu^2}{9(1+k^2)^2} \\
&= \frac{(\mu-3)(\mu-3k^2)}{9(1+k^2)^2} + \frac{(\mu-3(1+k^2))}{6(1+k^2)}u^2 + \frac{1}{4}u^4 \\
&= \frac{\mu^2-2(1+k^2)\mu-3(1+k^2)^2}{12(1+k^2)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{3(1+k^2)-\mu}{3(1+k^2)} - u^2\right)^2,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

et

$$\begin{aligned}
\rho_k(\mu) &= \frac{1}{81(1+k^2)^5}\mu(\mu-3)(\mu-3k^2)(\mu^2-2(1+k^2)\mu-3(1-k^2)^2) \\
&= \frac{1}{81(1+k^2)^5}\mu(\mu-3)(\mu-3k^2)(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_-(k)),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

où $\mu_\pm(k) = 1+k^2 \pm 2\sqrt{1-k^2+k^4}$ pour tout $k \in (0,1)$.

Démonstration du Théorème 4.0.1. Soient $u_{n,\varepsilon}$ et $k_{n,\varepsilon}$ données par la Proposition 4.1. On rappelle que $\alpha_{n,\varepsilon} = \sqrt{2k_{n,\varepsilon}^2/(1+k_{n,\varepsilon}^2)}$.

(i) Soit $\lambda = \mu_-(k_{n,\varepsilon})/(1+k_{n,\varepsilon}^2)$. On a, à partir du Lemme 6.0.1 et les équations (6.4)-(6.6),

$$\rho(\lambda,\alpha_{n,\varepsilon}) = \rho_{k_{n,\varepsilon}}(\mu_-(k_{n,\varepsilon})) = 0,$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}(u_{n,\varepsilon}(x),\lambda;\alpha_{n,\varepsilon}) &= \mathcal{Q}_{k_{n,\varepsilon}}(u_{n,\varepsilon}(x),\mu_-(k_{n,\varepsilon})) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3(1+k_{n,\varepsilon}^2)-,\mu_-(k_{n,\varepsilon})}{3(1+k_{n,\varepsilon}^2)} - u_{n,\varepsilon}(x)^2\right)^2 \\
&= \frac{1}{9(1+k_{n,\varepsilon}^2)^2}\left[\left(1+k_{n,\varepsilon}^2+\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4}\right) - \frac{3(1+k_{n,\varepsilon}^2)}{2}u_{n,\varepsilon}(x)^2\right]^2 \\
&= \frac{\left(1+k_{n,\varepsilon}^2+\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4}\right)^2}{9(1+k_{n,\varepsilon}^2)^2}. \\
&\cdot\left[1-\frac{3(1+k_{n,\varepsilon}^2)}{2\left(1+k_{n,\varepsilon}^2+\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4}\right)}u_{n,\varepsilon}(x)^2\right]^2 \\
&= \frac{\left(1+k_{n,\varepsilon}^2+\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4}\right)^2}{9(1+k_{n,\varepsilon}^2)^2}\mathscr{P}_{k_{n,\varepsilon}}(u_{n,\varepsilon}(x))^2,
\end{aligned}
$$

où

$$
\mathscr{P}_k(u) = 1 - \frac{(1+k^2)(1+k^2-\sqrt{1-k^2+k^4})}{2k^2}u^2.
$$

En outre, $\mathscr{P}_k$ est positif pour tout $u \in [-\sqrt{2k^2/(1+k^2)}, \sqrt{2k^2/(1+k^2)}]$.

Ainsi, le point (i) de la Proposition 3.5 et la Proposition 3.7 implique que

$$
(\lambda_0^{n,\varepsilon},\varphi_0^{n,\varepsilon}(x)) = (\mu_-(k_{n,\varepsilon})/(1+k_{n,\varepsilon}^2), \mathscr{P}_{k_{n,\varepsilon}}(u_{n,\varepsilon}(x))).
$$

D'où le point (i). De la même manière on obtient les points (ii) et (iii). Ce qui achève la démonstration.

□

Démonstration de Théorème 4.0.2

Lemme 6.0.2. *(voir [35], Lemma 5.2, p.3984). Supposons que $f(u) = u - u^3$, $\alpha \in (0,1)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $\mathcal{Q}(u,\lambda;\alpha)$ et $\rho(\lambda;\alpha)$, données par le Lemme 6.0.1. Supposons que $\rho(\lambda;\alpha) > 0$. Soient $k \in (0,1)$ et $\mu \in \mathbb{R}$ données par (6.3). Alors, $\rho(\lambda;\alpha) > 0$ si et seulement si $(k,\mu) \in$*

$\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, *où* $\Sigma_i (i = 0,1,2)$ *sont donnés dans* (4.2). *De plus,*

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\rho(\lambda;\alpha)}}{\sqrt{2(F(\alpha)-F(w))}\mid \mathscr{Q}(w,\lambda;\alpha)\mid} \mathrm{d}w = 2\mathscr{A}_1(k,\mu), \tag{6.7}$$

où $\mathscr{A}_1$ *est donnée dans* (4.4).

Démonstration. À partir des Lemme 6.1 et (6.4) on a $\rho(\lambda;\alpha) = \rho_k(\mu)$. Ainsi, les équations (6.5) et (6.6) impliquent que $\rho(\lambda;\alpha) > 0$ si et seulement si $(k,\mu) \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

En outre

$$\begin{aligned}
&\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\rho(\lambda;\alpha)}}{\sqrt{2(F(\alpha)-F(w))}\mid \mathscr{Q}(w,\lambda;\alpha)\mid} \mathrm{d}w \\
&= 2\int_{0}^{\alpha} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\rho(\lambda;\alpha)}}{\sqrt{(\alpha^2-w^2)(2-\alpha^2-w^2)}\mid \mathscr{Q}(w,\lambda;\alpha)\mid} \mathrm{d}w \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{1-\alpha^2}}\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\rho(\lambda;\alpha)}}{\sqrt{(1-s^2)(1-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}s^2)}\mid \mathscr{Q}(\alpha s,\lambda;\alpha)\mid} \mathrm{d}s \\
&= 2\sqrt{1+k^2}\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\rho_k(\lambda)}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}\mid \mathscr{Q}_k(\sqrt{2k^2/(1+k^2)}s,\lambda)\mid} \mathrm{d}s \\
&= 2\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\tilde{\rho}_k(\mu)}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}\mid \tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu)\mid} \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_k(\mu) &:= 81(1+k^2)^5 \rho_k(\mu) \\
&= \mu(\mu-3)(\mu-3k^2).(\mu^2-2(1+k^2)\mu-3(1-k^2)^2) \\
&= \mu(\mu-3)(\mu-3k^2)(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_-(k)),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu) &:= 9(1+k^2)^2\mathscr{Q}_k\left(\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}s,\mu\right)\\ &= (\mu-3)(\mu-3k^2)+3k^2(\mu-3(1+k^2))s^2+9k^4s^4\\ &= (\mu-3)(\mu-3k^2)(1+\nu_+(k,\mu)s^2)(1+\nu_-(k,\mu)s^2),\end{aligned}$$

avec $\nu_\pm(k,\mu)$ donné par (4.5).

Notons que $\tilde{\mathscr{Q}}_k(0,\mu)=(\mu-3)(\mu-3k^2)$. Par conséquent, si $\mu\in\Sigma_i$ pour $i=0,1,2$, alors $(-1)^i\tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu)>0$ pour $s\in(-1,1)$ (rappelons que $\mid\tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu)\mid>0$ ne disparaît pas si $\tilde{\rho}_k(\mu)>0$).

Considérons maintenant le cas où $\mu\in\Sigma_0$; alors, $\tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu)>0$ pour $s\in(0,1)$. En utilisant la décomposition partielle en fraction, on obtient

$$\frac{1}{\tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu)}=\frac{1}{(\mu-3)(\mu-3k^2)(\nu_+(k,\mu)-\nu_-(k,\mu))}.\left[\frac{\nu_+(k,\mu)}{1+\nu_+(k,\mu)s^2}-\frac{\nu_-(k,\mu)}{1+\nu_-(k,\mu)s^2}\right],$$

avec

$$\nu_+(k,\mu)-\nu_-(k,\mu)=\frac{3k^2\sqrt{-3(\mu-\mu_-(k))(\mu-\mu_+(k))}}{(\mu-3)(\mu-3k^2)},$$

$$\begin{aligned}&2\int_0^1\frac{\sqrt{\tilde{\rho}_k(\mu)}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}\mid\tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu)\mid}\mathrm{d}s\\ &=2\int_0^1\frac{\sqrt{\tilde{\rho}_k(\mu)}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}\tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu)}\mathrm{d}s.\\ &=\frac{2\sqrt{\tilde{\rho}_k(\mu)}\nu_+}{(\mu-3)(\mu-3k^2)(\nu_+-\nu_-)}\int_0^1\frac{1}{(1+\nu_+s^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}ds\\ &-\frac{2\sqrt{\tilde{\rho}_k(\mu)}\nu_-}{(\mu-3)(\mu-3k^2)(\nu_+-\nu_-)}\int_0^1\frac{1}{(1+\nu_-s^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}ds\\ &=2\frac{\sqrt{\mathscr{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{3}k^2}(\nu_+\Pi(\nu_+,k)-\nu_-\Pi(\nu_-,k)),\end{aligned}$$

où $v_\pm = v_\pm(k,\mu)$ et $\mathscr{R}$ est donne par (4.6). Donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\rho(\lambda;\alpha)}}{\sqrt{2(F(\alpha)-F(w))}\mid \mathscr{Q}(w,\lambda;\alpha)\mid}\mathrm{d}w = 2\mathscr{A}_1(k,\mu), \quad \text{quand } \mu\in\Sigma_0.$$

De la même manière, on peut écrire l'intégrale de (6.7) en fonction de l'intégrale elliptique complète $\Pi(v,k)$ quand $\mu\in\Sigma_i (i=1,2)$. Ainsi, se termine la démonstration de (6.7). □

Démonstration de Théorème 4.0.2. Soient $n, j\in\mathbb{N}$ arbitraires tels que n est fixé et $j\neq 0,n,2n$. Par les Proposition 4.2 et 4.3, $\mu_j^n(k)$ est définie pour chaque $k\in(0,1)$. En particulier, $\mu_j(k)\in(\mu_-(k),0)$ si $0<j<n, \mu_j(k)\in(3k^2,3)$ si $n<j<2n$ et $\mu_j(k)\in(\mu_+(k),+\infty)$ si $j>2n$.

Soient $u_{n,\varepsilon}$ et $k_{n,\varepsilon}$ tels qu'il sont définis dans la Proposition 4.1. Alors $\alpha_{n,\varepsilon} = \sqrt{2k_{n,\varepsilon}^2/(1+k_{n,\varepsilon}^2)}$. Posons $\lambda = \mu_j(k_{n,\varepsilon})/(1+k_{n,\varepsilon}^2)$. On peut observer que

$$\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha_{n,\varepsilon}) = \mathscr{Q}_{k_{n,\varepsilon}}(u,\mu_j^n(k_{n,\varepsilon}))$$

et

$$\rho(\lambda;\alpha_{n,\varepsilon}) = \rho_{k_{n,\varepsilon}}(\mu_j^n(k_{n,\varepsilon}))>0.$$

En outre, le Lemme 6.0.2 donne

$$\int_{-\alpha_{n,\varepsilon}}^{\alpha_{n,\varepsilon}} \frac{\sqrt{\rho(\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})}}{\sqrt{2(F(\alpha_{n,\varepsilon})-F(w))}\mid \mathscr{Q}(w,\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})\mid}dw = 2\mathscr{A}_1(k_{n,\varepsilon},\mu_j^n(k_{n,\varepsilon})) = \frac{j\pi}{n}.$$

Par conséquent, si λ est la solution de l'égalité ci-dessus les Proposition 3.9, 3.8 et le Lemme 6.0.1 impliquent que $\lambda_j^{n,\varepsilon}=\lambda$ et $\varphi_j^{n,\varepsilon}(x) = \varphi(x,\lambda_j^{n,\varepsilon})$, où $\lambda = \dfrac{\mu}{1+k^2}$ et

$$\varphi(x,\lambda) = \sqrt{\mid \mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x),\lambda,\alpha_{n,\varepsilon}} \mid \cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{\sqrt{\rho(\lambda,\alpha_{n,\varepsilon})}}{\mid \mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(\xi),\lambda,\alpha_{n,\varepsilon}\mid}d\xi\right).$$

Ainsi se termine la démonstration du Théorème.

□