Chapitre 5

Démonstration des résultats principaux

Dans cette section on va prouver les deux résultats, à savoir le Théorème 2.2.1 et le Théorème 2.2.2 pour cela nous utiliserons les Théorèmes 4.0.1 et 4.0.2.

On commence par la proposition suivante :

Proposition 5.1. *(voir [31], Lemma 2.1, p. 545). Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitraire et $k_{n,\varepsilon}$ donné par la Proposition 4.1. On a*

$$1 - k_{n,\varepsilon}^2 = 16\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}}\right) + o\left(-\frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}}\right) \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

Démonstration. Soit $k(p)$ la solution unique de $\mathscr{A}_0 = p$, avec $p \in (\pi/2, +\infty)$. On pose

$$\tilde{K}(k) = K(k) - \log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} - 2\log 2.$$

On sait par le Lemme 1.1.3 que $\tilde{K}(k) = o(1)$ quand $k \to 1$. Alors

$$p = \sqrt{1+k(p)^2}\left[\log\frac{1}{\sqrt{1-k(p)^2}} + 2\log 2 + \tilde{K}(k(p))\right],$$

et donc

$$1 - k(p)^2 = 16\exp\left(2\tilde{K}(k(p))\right).\exp\left(-\frac{2p}{\sqrt{1+k(p)^2}}\right),$$

ce qui implique que

$$1-k(p)^2 = 16e^{-\sqrt{2}p} + o(e^{-\sqrt{2}p}) \quad \text{quand} \quad p \to +\infty.$$

En prenant $p = 1/(2n\varepsilon)$ on obtient le résultat de la Proposition. □

Preuve du Théorème 2.2.1 . Á partir du Théorème 4.0.1 on a

$$\lambda_0^{n,\varepsilon} = \frac{1+k_{n,\varepsilon}^2 - 2\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2 + k_{n,\varepsilon}^4}}{1+k_{n,\varepsilon}^2}.$$

En posant $h(x) = \lambda_0^{n,\varepsilon}$ et en utilisant le changement de variable $x = 1-k_{n,\varepsilon}^2$ on obtient

$$h(x) = \frac{2-x-2\sqrt{1-x+x^2}}{2-x},$$

alors

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{2-x-2\sqrt{1-x+x^2}}{2-x} \Longrightarrow h(0) = 0,\\
h'(x) &= \frac{-3x}{(2-x)^2\sqrt{1-x+x^2}} \Longrightarrow h'(0) = 0,\\
h''(x) &= \frac{-3(x^4-26x^3+39x^2-8x+4)}{(2-x)^4(1-x+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow h''(0) = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
h(x) &= h(0) + xh'(0) + \frac{x^2}{2}h''(0) + o(x^2)\\
&= -\frac{3}{8}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

La Proposition 5.1 implique que

$$\begin{aligned}\lambda_0^{n,\varepsilon} &= \frac{1+k_{n,\varepsilon}^2-2\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4}}{1+k_{n,\varepsilon}^2}\\ &= -\frac{3}{8}\left(1-k_{n,\varepsilon}^2\right)^2+o\left((1-k_{n,\varepsilon}^2)^2\right)\\ &= -96\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}\right)+o\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}\right)\right).\end{aligned}$$

On procède de la même manière pour montrer les points (ii) et (iii) du Théorème 2.2.1.

□

Proposition 5.2. *(voir [35], Proposition 3.2, p. 3972). Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitraire et soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \neq 0, n, 2n$.*

Soit $\mu_j^n(k)$ donné par le Théorème 4.0.2. On a

(**i**) *Si $0 < j < n$, alors*

$$\mu_j^n(k) = -\frac{3}{4}\cos^2\frac{j\pi}{2n}.(1-k^2)^2+o\left((1-k^2)^2\right) \quad \text{quand} \;\; k \to 1.$$

(**ii**) *Si $n < j < 2n$, alors*

$$\mu_j^n(k) = 3-3\cos^2\frac{(j-n)\pi}{2n}.(1-k^2)+o(1-k^2) \quad \text{quand} \;\; k \to 1.$$

(**iii**) *Si $j > 2n$, alors*

$$\mu_j^n(k) = 4+\left(\frac{j-2n}{2n}\right)^2\pi^2 K(k)^{-2}+o\left(K(k)^{-2}\right) \quad \text{quand} \;\; k \to 1.$$

La Proposition 5.2 sera prouvée au Chapitre 7.

Preuve du Théorème 2.2.2. On a par la Proposition 4.2 pour $j \neq 0, n, 2n$,

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = \frac{1}{1+k^2{}_{n,\varepsilon}}\mu\left(k_{n,\varepsilon};\frac{j\pi}{2n}\right).$$

Notons que lorsque $k \to 1$, alors

$$\frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2-(1-k^2)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}(1-k^2)\right)+o(1-k^2).$$

Il découle de la Proposition 5.1 et du point (i) de la Propositions 5.2, que si $0 < j < n$, alors

$$\begin{aligned}
\lambda_j^{n,\varepsilon} &= \frac{1}{2}.\left(-\frac{3}{4}\cos^2\frac{j\pi}{2n}(1-k_{n,\varepsilon}^2)^2\right) + o((1-k_{n,\varepsilon}^2)^2) \\
&= -96\cos^2\frac{j\pi}{2n}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}\right) + o\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}\right)\right),
\end{aligned}$$

d'où le point (i) du Théorème 2.2.2.

De même, si $n < j < 2n$, alors on a par la Proposition 5.1 et par le point (ii) de la Proposition 5.2

$$\begin{aligned}
\lambda_j^{n,\varepsilon} &= \frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{2}(1-k_{n,\varepsilon}^2)\right).\left(3-3\cos^2\frac{(j-n)\pi}{2n}(1-k_{n,\varepsilon}^2)\right) + o\left((1-k_{n,\varepsilon}^2)\right) \\
&= \frac{3}{2}+\frac{3}{4}\left(1-2\cos^2\frac{(j-n)\pi}{2n}\right)(1-k_{n,\varepsilon}^2) + o\left((1-k_{n,\varepsilon}^2)\right) \\
&= \frac{3}{2}-\frac{3}{4}\cos\frac{(j-n)\pi}{2n}(1-k_{n,\varepsilon}^2) + o\left((1-k_{n,\varepsilon}^2)\right) \\
&= \frac{3}{2}-12\cos\frac{(j-n)\pi}{2n}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}n\varepsilon}\right) + o\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}n\varepsilon}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, le point (ii) du Théorème 2.2.2 est prouvé.

Finalement, il reste le cas où $j > 2n$. On déduit de la définition de $k_{n,\varepsilon}$, l'identité suivante :

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{4n^2\mathscr{A}_0(k_{n,\varepsilon})^2} = \frac{1}{4n^2(1+k_{n,\varepsilon}^2)K(k_{n,\varepsilon})^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{K(k_{n,\varepsilon})^2} = (1+k_{n,\varepsilon}^2)4n^2\varepsilon^2 = 8n^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

quand $\varepsilon \to 0$, et il résulte du point (iii) de la Proposition 5.2, que

$$\begin{aligned}
\lambda_j^{n,\varepsilon} &= \frac{1}{2}\left(4+\frac{(j-n)^2}{4n^2}\pi^2 8n^2\varepsilon^2\right) + o(\varepsilon^2) \\
&= 2+(j-2n)^2\pi^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

D'où le point (iii) du Théorème 2.2.2.

□