Chapitre 4

Expressions des fonctions propres (I)

On commence par donner l'expression de $u_{n,\varepsilon}$ en utilisant les intégrales elliptiques.

Soit $\mathscr{A}_0$ donnée par :

$$\mathscr{A}_0(k) := \sqrt{1+k^2}K(k) \quad \text{pour tout } k \in (0,1),$$

où K est l'intégrale elliptique complète du premier type.

On observe à partir des Lemme 1.1.1 et 1.1.2 que $\mathscr{A}_0$ est croissante par rapport à $k \in (0,1)$, et on a

$$\lim_{k\to 0} \mathscr{A}_0(k) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to 1} \mathscr{A}_0(k) = +\infty.$$

Proposition 4.1. *(voir [35], Proposition 2.1, p.3968) Soit n fixé dans $\mathbb{N}$. On pose $f(u) = u - u^3$. L'équation (2.1) admet n-mode solutions $\pm u_{n,\varepsilon}(x)$ si et seulement si $\varepsilon \in (0, 1/(n\pi))$. En outre, $u_{n,\varepsilon}$ est donnée par*

$$\begin{aligned} u_{n,\varepsilon}(x) &= \sqrt{\frac{2k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\,\mathrm{sn}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\left(x+\frac{1}{2n}\right), k_{n,\varepsilon}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\,\mathrm{sn}\left(2nK(k_{n,\varepsilon})\left(x+\frac{1}{2n}\right), k_{n,\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $k_{n,\varepsilon}$ est la solution unique de

$$\mathscr{A}_0(k) = \frac{1}{2n\varepsilon}, \; k \in (0,1).$$

Dans la Propositions 4.1 $u_{n,\varepsilon}$ est choisie de telle sorte que $u_{n,\varepsilon}$ soit décroissante pour tout $x \in [0,1/(2n)]$.

Dans la suite on utilisera la notation suivante :

$$\alpha_{n,\varepsilon} := u_{n,\varepsilon}(0) = \sqrt{\frac{2k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}} \in (0,1).$$

La représentation des fonctions propres de l'équation (2.4) est donnée par deux théorèmes. Le premier théorème donne les trois fonctions propres spéciales. (C'est une reformulation du Théorème 3.1 de [31].)

Théorème 4.0.1. *(voir [37], Theorem 4, p. 74, [33], Theorem 1.4.1, p. 43) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in (0,1/(n\pi))$ fixés. On pose $f(u) = u - u^3$. Soient $k_{n,\varepsilon}$ et $u_{n,\varepsilon}$ donnés par la Proposition 4.1. Alors (2.4) admet les valeurs propres et fonctions propres suivantes :*

$$(\mathbf{i})\begin{cases} \lambda_0^{n,\varepsilon} = \frac{1+k_{n,\varepsilon}^2-2\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4}}{1+k_{n,\varepsilon}^2}, \\ \varphi_0^{n,\varepsilon}(x) = 1 - \frac{(1+k_{n,\varepsilon}^2)(1+k_{n,\varepsilon}^2-\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4})}{2k_{n,\varepsilon}^2} u_{n,\varepsilon}(x)^2. \end{cases}$$

$$(\mathbf{ii})\begin{cases} \lambda_n^{n,\varepsilon} = \frac{3k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}, \\ \varphi_n^{n,\varepsilon}(x) = 2u_{n,\varepsilon}(x)\sqrt{\frac{2}{1+k_{n,\varepsilon}^2} - u_{n,\varepsilon}(x)^2}. \end{cases}$$

$$(\mathbf{iii})\begin{cases} \lambda_{2n}^{n,\varepsilon} = \frac{1+k_{n,\varepsilon}^2+2\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4}}{1+k_{n,\varepsilon}^2}, \\ \varphi_{2n}^{n,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2}[-1 + \frac{(1+k_{n,\varepsilon}^2)(1+k_{n,\varepsilon}^2-\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4})}{2k_{n,\varepsilon}^2} u_{n,\varepsilon}(x)^2]. \end{cases}$$

Dans le papier [31], les trois fonctions propres spéciales jouent un rôle crucial dans la classification des fonctions propres quand $\varepsilon \to 0$.

Les démonstrations respectives de la Proposition 4.1 et du Théorème 4.0.1 seront données dans le chapitre 6.

On va donner les autres expressions des fonctions propres de (2.4).

On note

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &:= \{(k,\mu) \mid k \in (0,1), \mu \in (\mu_-(k),0)\}, \\ \Sigma_1 &:= \{(k,\mu) \mid k \in (0,1), \mu \in (3k^2,3)\}, \\ \Sigma_2 &:= \{(k,\mu) \mid k \in (0,1), \mu \in (\mu_+(k),+\infty)\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

où

$$\mu_\pm(k) := 1 + k^2 \pm 2\sqrt{1-k^2+k^4} \quad \text{pour tout } k \in (0,1). \tag{4.3}$$

On introduit maintenant la fonction caractéristique $\mathscr{A}_1$ pour l'équation (2.4) avec $f = u - u^3$:

$$\mathscr{A}_1(k,\mu) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mathscr{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{3k^2}}(\nu_+\Pi(\nu_+,k) - \nu_-\Pi(\nu_-,k)) & \text{si}(k,\mu) \in \Sigma_0, \\ \frac{\sqrt{\mathscr{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{3k^2}}(\nu_-\Pi(\nu_-,k) - \nu_+\Pi(\nu_+,k)) & \text{si}(k,\mu) \in \Sigma_1, \\ \frac{\sqrt{-\mathscr{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{-3k^2}}(\nu_+\Pi(\nu_+,k) - \nu_-\Pi(\nu_-,k)) & \text{si}(k,\mu) \in \Sigma_2, \end{cases} \tag{4.4}$$

où Π est l'intégrale elliptique complète du troisième type,

$$\begin{aligned} \nu_\pm(k,\mu) :&= \frac{3k^2[\mu - 3(1+k^2) \pm \sqrt{-3\mu^2 + 6(1+k^2)\mu + 9(1-k^2)^2}]}{2(\mu-3)(\mu-3k^2)}, \\ &= \frac{3k^2[\mu - 3(1+k^2) \pm \sqrt{-3(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_+(k))}]}{2(\mu-3)(\mu-3k^2)}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

et

$$\mathscr{R}(k,\mu) := -\mu(\mu-3)(\mu-3k^2). \tag{4.6}$$

Notons que $\nu_\pm(k,\mu) > -1$ si $(k,\mu) \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, et $\nu_\pm(k,\mu) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si $(k,\mu) \in \Sigma_2$ (pour plus de détails voir *Proposition 7.1*).

Quelques propriétés de $\mathscr{A}_1$ sont données dans les deux propositions suivantes :

Proposition 4.2. *(voir [33], Lemma 1.4.1, p. 48,[33]) Soit k fixé dans $(0,1)$ et soit $\mu \in (\mu_-(k),0) \cup (3k^2,3) \cup (\mu_+(k),+\infty)$. On a*
$\lim_{\mu\to\mu_-(k)} \mathscr{A}_1(k,\mu) = 0, \lim_{\mu\to 0} \mathscr{A}_1(k,\mu) = \frac{\pi}{2}$.
$\lim_{\mu\to 3k^2} \mathscr{A}_1(k,\mu) = \frac{\pi}{2}, \lim_{\mu\to 3} \mathscr{A}_1(k,\mu) = \pi$.
$\lim_{\mu\to\mu_+(k)} \mathscr{A}_1(k,\mu) = \pi$.

Proposition 4.3. *(voir [35], Proposition 2.3, p. 3970 [33], Lemma 1.4.2, p. 48) Soit $(k,\mu) \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Pour chaque $i = 0,1,2$, on a $\dfrac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial \mu}(k,\mu) > 0$ dans Σ_i.*

Les propositions 4.2 et 4.3 sont démontrées dans le chapitre 7.

Le deuxième théorème donnant les autres fonctions propres de la forme de Liouville et les valeurs propres correspondantes caractérisées par $\mathscr{A}_1$ s'énonce comme suit

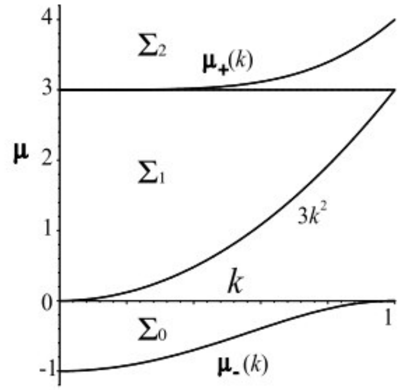

FIGURE 4.1 – Trois régions Σ_0, Σ_1 et Σ_2

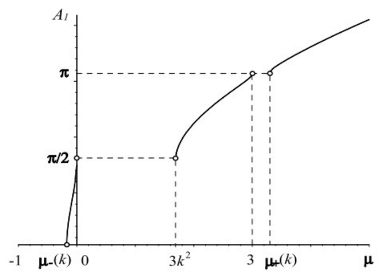

FIGURE 4.2 – Un graphique de $\mathscr{A}_1(k,\mu)$ pour $k = 3/4$.

Théorème 4.0.2. *(voir [37], Theorem 5, p. 74, [33], Theorem 1.4.2, p. 49) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in (0, 1/n\pi))$ fixés. On pose $f(u) = u - u^3$. Soit $k_{n,\varepsilon}$ et $u_{n,\varepsilon}$ donnés dans la Proposition 4.1*

Supposons que $j \neq 0, n, 2n$, et soit $\mu_j^n(k)$ la solution unique de

$$\mathscr{A}_1(k,\mu) = \frac{j\pi}{2n}.$$

Alors (2.4) admet les valeurs propres et fonctions propres suivantes :

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = \frac{1}{1+k_{n,\varepsilon}^2}\mu_j^n(k_{n,\varepsilon}),$$

et

$$\varphi_j^{n,\varepsilon}(x) = \sqrt{|\, \mathscr{Q}_{k_{n,\varepsilon}}(u_{n,\varepsilon}(x), \mu_j^n(k_{n,\varepsilon}))\,|}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{\sqrt{\rho_{k_{n,\varepsilon}}(\mu_j^n(k_{n,\varepsilon}))}}{|\, \mathscr{Q}_{k_{n,\varepsilon}}(u_{n,\varepsilon}(\xi), \mu_j^n(k_{n,\varepsilon}))\,|}d\xi\right),$$

où

$$\mathscr{Q}_k(u,\mu) = \frac{(\mu-3)(\mu-3k^2)}{9(1+k^2)^5} + \frac{(\mu-3(1+k^2))}{6(1+k^2)}u^2 + \frac{1}{4}u^4, \tag{4.7}$$

et

$$\rho_k(\mu) = \frac{1}{81(1+k^2)^5}\mu(\mu-3)(\mu-3k^2)(\mu^2-2(1+k^2)\mu-3(1-k^2)^2). \tag{4.8}$$

Remarque 4.0.1. *Soit $\mathcal{Q}_k(u,\mu)$ et $\rho_k(\mu)$ données par (4.7) et (4.8), respectivement. Si $(k,\mu) \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ alors $\rho_k(\mu) > 0$. En outre, si $(k,\mu) \in \Sigma_i$ pour chaque $i = 0,1,2$, alors $(-1)^i \mathcal{Q}_k(u,\mu) > 0$ pour tout $u \in [-\sqrt{2k^2/(1+k^2)}, \sqrt{2k^2/(1+k^2)}]$.*

Remarque 4.0.2. *En utilisant l'expression de $u_{n,\varepsilon}$ et le changement de variables*

$$z := \frac{1}{\varepsilon\sqrt{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\left(x+\frac{1}{2n}\right), \quad \Phi := \varphi\left(\varepsilon\sqrt{1+k_{n,\varepsilon}^2}z-\frac{1}{2n}\right),$$

l'équation linéarisée de (2.4) conduit à l'équation de Lamé avec $m=2$:

$$\Phi_{zz} + [-m(m+1)k^2\mathrm{sn}^2(z,k)+(1+k^2)(1+\lambda)]\Phi(z) = 0,$$

où $k = k_{n,\varepsilon}$.

Les fonctions propres spéciales du Théorème 4.0.1, peuvent être considérées comme "solution de l'équation de Lamé de première espèce", tandis que les autre fonctions du Théorème 4.0.2 appartiennent à la classe "des solutions l'équation de Lamé du deuxième type ". Pour plus de détails sur l'équation de Lamé, voir Whittaker-Watson [39] et Takemura [30].