Chapitre 3

Méthode utilisant l'équation de représentation

3.1 Expression de la n-mode solution

On suppose dans cette section et la suivante que f est une non-linéarité bistable équilibrée et impaire.

Soit $u = u(x)$ une solution non triviale de (2.1). On dit que u est un n-mode solution si u_x change de signe $n-1$ fois. On note une n mode solution par $u_{n,\varepsilon} = u_{n,\varepsilon}(x)$.

On va examiner toutes les solutions non triviales u de l'équation (2.1). On pose $\alpha := u(0)$. Il est clair que

$$\frac{\varepsilon^2}{2}(u_x)^2 = F(\alpha) - F(u). \tag{3.1}$$

On peut observer à partir de (3.1) que $\alpha \in (u_-, u_+) \setminus \{o\}$: F est impaire et comme $F'(u_\pm) = f(u_\pm) = 0$ et $F''(0) = f'(0) > 0, F''(u_\pm) = f'(u_\pm) < 0$ alors F a un minimum $F(0) = 0$ en 0 et un maximum $F(u_\pm)$ en $u_\pm$. Or l'équation (3.1) exige $F(\alpha) \geq F(u)$, mais $u = u_\pm$ ne vérifie pas cette inégalité $(F(\alpha) < F(u_\pm))$. D'où $\alpha \in (u_-, u_+)$.

Par ailleurs, si $\alpha = 0$ alors $F(\alpha) = 0$ et donc

$$\varepsilon^2 (u_x)^2 = -F(u).$$

D'où $F(u) \leq 0$, ce qui est faux car $F(u) \geq 0 \ \ (\min F = 0)$.

On pose

$$z_l^n := \frac{2l-1}{2n} \quad (l = 1, \ldots, n), \quad x_l^n := \frac{l}{n} \quad (l = 0, 1, \ldots, n).$$

La proposition suivante montre que toute n-mode solution peut être donnée de façon constructive.

Proposition 3.1. *(voir [32], Proposition 2.1, p. 5). Soit f une fonction impaire, de classe C^1 qui satisfait (2.3). Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.*

L'équation

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2(F(\alpha)-F(w))}} \mathrm{d}w = \frac{1}{n\varepsilon}, \ \alpha \in (0, u_+) \tag{3.2}$$

admet une solution unique $\alpha = \alpha_{n,\varepsilon}$ si et seulement si $\varepsilon \in (0, \sqrt{f_u(0)}/n\pi)$.

De plus, $\alpha_{n,\varepsilon}$ est décroissante par rapport à ε et vérifie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{n,\varepsilon} = u_+ \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to \sqrt{f_u(0)}/n\pi} \alpha_{n,\varepsilon} = 0.$$

Proposition 3.2. *(voir [35], Proposition 4.1 , p. 3974, [32], Proposition 2.2, p. 5). Soit f une fonction impaire, de classe C^1 satisfaisant à (2.3). Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Si $\varepsilon \in (0, f_u(0)/(n\pi))$ alors il existe deux n-mode solutions $\pm u_{n,\varepsilon}(x)$ de l'équation (2.1) telles que $u_{n,\varepsilon}(0) = \alpha_{n,\varepsilon}$, et on a

$$\int_{u_{n,\varepsilon}(x)}^{\alpha_{n,\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{2(F(\alpha_{n,\varepsilon})-F(w))}} \mathrm{d}w = \frac{x}{n\varepsilon}, \ \forall x \in [0, 1/n], \tag{3.3}$$

où $\alpha_{n,\varepsilon}$ est donnée par la Proposition 3.1.

En outre, $u_{n,\varepsilon}$ satisfait les propriétés suivantes

(i) *$u_{n,\varepsilon}$ est décroissante dans $[0, x_1^n]$,*

(ii) *$u_{n,\varepsilon}(x + \frac{1}{n}) = -u_{n,\varepsilon}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

(iii) *$u_{n,\varepsilon}(x_l^n) = (-1)^l \alpha_{n,\varepsilon}$ et $(u_{n,\varepsilon})_x(x_l^n) = 0$ pour $l = 0, 1, \ldots, n$,*

(iv) *$u_{n,\varepsilon}(\frac{1}{n} - x) = -u_{n,\varepsilon}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

(v) *$u_{n,\varepsilon}(z_l^n) = 0$ pour $l = 0, 1, \ldots, n$.*

Remarque 3.1.1. *Notons que la fonction X définie par*

$$X(\alpha) := \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2(F(\alpha)-F(w))}} \mathrm{d}w = \int_{-1}^{1} \frac{\alpha}{\sqrt{2(F(\alpha)-F(\alpha s))}} \mathrm{d}s$$

satisfait $\lim_{\alpha\to 0} X(\alpha) = \pi/\sqrt{f_u(0)}$ *et* $\lim_{\alpha\to u_+} X(\alpha) = +\infty$.

Remarquons aussi que si la solution $\alpha_{n,\varepsilon}$ de (3.2) est unique alors l'équation (2.1) admet deux n-modes solutions. Par exemple, dans le cas où $uf'(u) < f(u)$ pour $u \in (0, u_+)$, $\alpha_{n,\varepsilon}$ est unique (voir [34]).

3.2 Méthode de l'équation de représentation

L'équation de représentation de deuxième ordre

Le concept pour obtenir l'équation de représentation commence par la recherche d'une solution de l'équation (2.4) de la forme $\varphi(x) = \mathscr{P}(u(x))$, où $\mathscr{P} \in C^2([u_-, u_+])$ et $u(x) = u_{n,\varepsilon}(x)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On pose $\alpha = \alpha_{n,\varepsilon}$. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathscr{P}(u(x)) = \mathscr{P}_u(u(x))u_x(x),$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathscr{P}(u(x)) &= \mathscr{P}_{uu}(u(x))(u_x(x))^2 + \mathscr{P}_u(u(x))u_{xx}(x) \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2}(F(\alpha) - F(u(x))).\mathscr{P}_{uu}(u(x)) - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u(x)).\mathscr{P}_u(u(x)).\end{aligned}$$

On déduit de l'équation (2.1),(3.1) et du fait que $-\alpha < u(x) < \alpha$ que

$$2(F(\alpha) - F(u))\mathscr{P}_{uu}(u) - f(u)\mathscr{P}_u(u) + (f_u(u) + \lambda)\mathscr{P}(u) = 0, \quad u \in (-\alpha, \alpha). \tag{3.4}$$

On dit que (3.4) est l'équation de représentation de (2.4). On remarque que toute solution de (3.4) dépend uniquement de f, λ (et α) et elle ne dépend pas de $u_{n,\varepsilon}(x)$. C'est un avantage important pour les expressions des fonctions propres de (2.4). De plus, on peut remarquer que puisque $(u_{n,\varepsilon})_x(x)\mid_{x=0,1}=0$ on a

$$\mathscr{P}_x(u_{n,\varepsilon}(x))\mid_{x=0}=\mathscr{P}_x(u_{n,\varepsilon}(x))\mid_{x=1}=0, \tag{3.5}$$

si $\mathscr{P}\in C^2[u_-,u_+]$. Cet argument mène à la proposition suivante

Proposition 3.3. *(voir [33],Proposition 1.2.1,p.26). Soit $u_{n,\varepsilon}(x)$ une n-mode solution de (2.1) et soit $\mathscr{P}\in C^2[u_-,u_+]$ une solution de (3.4). Alors $\mathscr{P}(u_{n,\varepsilon}(x))$ est une fonction propre de (2.4) correspondant à la valeur propre λ.*

Il faudrait noter que la solution de (3.4) n'est pas obligatoirement dans $C^2[u_-,u_+]$, puisque (3.4) est dégénérée dans le sens suivant :$F(\alpha)-F(u)=0$ en $u=u_\pm$,i.e. $F(\alpha)=\max F$. Si $\mathscr{P}\in C^1[u_-,u_+]\cup C^2(u_-,u_+)$, alors $\mathscr{P}(u(x))\in C^2[0,1]$ et $\mathscr{P}(u_{n,\varepsilon}(x))$ satisfait la condition aux limites (3.5). Si $\lambda=0$ alors

$$\mathscr{P}^\star(u)=\sqrt{F(\alpha)-F(u)}$$

est une solution de (3.1) pour tout f. Cela correspond au fait que $\varphi(x)=u_x(x)$ satisfait la première équation de (2.4) avec $\lambda=0$. Par conséquent, $\mathscr{P}^\star(u)(u_{n,\varepsilon}(x))$ n'est pas une fonction propre de (2.4) et $\mathscr{P}^\star(u)(u_{n,\varepsilon}(x))$ n'appartient pas à $C^1[u_-,u_+]\cup C^2(u_-,u_+)$, et ne satisfait pas la condition aux limites de (2.4).

Remarque 3.2.1. *On peut observer que (3.4) est symétrique par rapport à l'application $(\lambda,f)\longrightarrow(-\lambda,-f)$. Puis, si $(\lambda,\mathscr{P})$ est solution de (3.4) pour f alors $(-\lambda,\mathscr{P})$ doit être une solution de l'équation correspondante pour $-f$.*

Dans [34] et [36], les fonctions propres spéciales de (2.4) pour $f(u)=u-u^3$ et $f(u)=\sin u$ respectivement sont données grâce à des propriétés élémentaires de (3.4).

Introduisons maintenant l'équation du troisième ordre.

L'équation de représentation du troisième ordre

Dans cette sous-section, on va généraliser la méthode précédente pour donner une classe plus large de fonctions propres liées à l'équation (2.4). On commence par le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} \varepsilon^2\varphi_{xx}(x)+f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi(x)+\lambda\varphi(x)=0 \quad x\in\ (0,1), \\ \varphi(0)=1,\ \varphi_x(0)=0. \end{cases} \tag{3.6}$$

On pose $R(x):=\varphi(x)^2$. Un calcul direct montre que :

$$R_x(x)=2\varphi(x)\varphi_x(x),$$

$$\begin{aligned} R_{xx}(x) &= 2\varphi_x(x)^2+2\varphi(x)\varphi_{xx}(x) \\ &= 2\varphi_x(x)^2-\frac{2}{\varepsilon^2}(f_u(u_{n,\varepsilon}(x)+\lambda).\varphi(x)^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{xxx}(x) &= 4\varphi_x(x)\varphi_{xx}(x)-\frac{2}{\varepsilon^2}f_{uu}(u_{n,\varepsilon}(x))\frac{du_{n,\varepsilon}}{dx}(x).\varphi(x)^2-\frac{4}{\varepsilon^2}(f_u(u_{n,\varepsilon}(x)+\lambda)\varphi(x)\varphi_x(x) \\ &= -\frac{8}{\varepsilon^2}(f_u(u_{n,\varepsilon}(x)+\lambda)\varphi(x)\varphi_x(x)-\frac{2}{\varepsilon^2}f_{uu}(u_{n,\varepsilon}(x))\frac{du_{n,\varepsilon}}{dx}(x).\varphi(x)^2. \end{aligned}$$

On remarque donc que R vérifie l'équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$\varepsilon^2R_{xxx}(x)+4(f_u(u_{n,\varepsilon}(x)+\lambda)R_x(x)+2f_{uu}(u_{n,\varepsilon}(x))\frac{du_{n,\varepsilon}}{dx}(x).R(x)=0, \tag{3.7}$$

et satisfait

$$\varepsilon^2(2R_{xx}(x)R(x)-R_x(x)^2)+4(f_u(u_{n,\varepsilon}(x))+\lambda)R(x)^2=\varepsilon^2(2R_{xx}(0)R(0)-R_x(0)^2)+4(f_u(\alpha)+\lambda)R(0)^2, \tag{3.8}$$

car en dérivant le 1^{er} membre de l'égalité précédente on trouve le 1^{er} membre de (3.7).

À partir de la condition initiale

$$R(0)=1, \quad R_x(0)=0,\ R_{xx}(0)=-\frac{2}{\varepsilon^2}(f_u(\alpha)+\lambda),$$

on a

$$\varepsilon^2(2R_{xx}(x)R(x)-R_x(x)^2)+4(f_u(u_{n,\varepsilon}(x))+\lambda)R(x)^2=0. \tag{3.9}$$

Supposons qu'il existe une fonction $\mathscr{Q}(u)=\mathscr{Q}(u;\lambda)$ telle que $R(x)=\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))$ vérifie (3.7). On a par les équations (2.1) et (3.1)

$$\frac{d}{dx}\left[\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))\right]=\mathscr{Q}_u(u_{n,\varepsilon}(x)).\frac{du_{n,\varepsilon}}{dx}(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))\right]=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[2(F(\alpha)-F(u_{n,\varepsilon}(x))).\mathscr{Q}_{uu}(u_{n,\varepsilon}(x))-f(u_{n,\varepsilon}(x)).\mathscr{Q}_u(u_{n,\varepsilon}(x))\right],$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3}\left[\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))\right]=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{du_{n,\varepsilon}}{dx}(x)\big[&2(F(\alpha)-F(u_{n,\varepsilon}(x))).\mathscr{Q}_{uuu}(u_{n,\varepsilon}(x))\\&-3f(u_{n,\varepsilon}(x)).\mathscr{Q}_{uu}(u_{n,\varepsilon}(x))-f_u(u_{n,\varepsilon}(x)).\mathscr{Q}_u(u_{n,\varepsilon}(x))\big].\end{aligned}$$

Les équations (3.7) et (3.8) s'écrivent en fonction de $\mathscr{Q}$ comme suit

$$2(F(\alpha)-F(u))\mathscr{Q}_{uuu}(u)-3f(u).\mathscr{Q}_{uu}(u)+(3f_u(u)+4\lambda)\mathscr{Q}_u(u)+2f_{uu}(u)\mathscr{Q}(u)=0, \tag{3.10}$$

et

$$(F(\alpha)-F(u)).\left[2\mathscr{Q}_{uu}(u)\mathscr{Q}(u)-\mathscr{Q}_u(u)^2\right]-f(u)\mathscr{Q}_u(u)\mathscr{Q}(u)+\left(f_u(u)+\lambda\right)\mathscr{Q}(u)^2=2\rho(\lambda), \tag{3.11}$$

pour $u\in(-\alpha,+\alpha)$, sachant que

$$\rho(\lambda;\alpha):=\frac{\mathscr{Q}(\alpha,\lambda;\alpha)}{2}\left[-f(\alpha)\mathscr{Q}_u(\alpha,\lambda;\alpha)+2(f_u(\alpha)+\lambda)\mathscr{Q}(\alpha,\lambda;\alpha)\right]. \tag{3.12}$$

Observons que si $\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon})$ satisfait (3.9) alors $\rho(\lambda)=0$. On appelle (3.10) l'équation de représentation du troisième ordre pour l'équation (2.4). Ainsi, $\mathscr{Q}=\mathscr{Q}(\alpha,\lambda;\alpha)$ est une solution particulière, si $\mathscr{Q}$ est une solution non triviale de (3.10) avec $\mathscr{Q}\in C^2[-\alpha,\alpha]\cup C^3(-\alpha,\alpha)$ pour chaque λ et α.

Remarque 3.2.2. *Lorsque $\lambda=0$, l'équation (3.10) admet la solution particulière $\mathscr{Q}(u,0;\alpha)=F(\alpha)-F(u)$.*

La relation entre (3.4) et (3.10)

On va donner la relation entre l'équation (3.4) et l'équation (3.10). Pour cela, on commence par le lemme suivant qui donne un résultat technique.

Lemme 3.2.1. *(voir [35], Lemma 4.1, p. 3976). Soit une fonction $G \in C^2$ et B une forme bilinéaire telle que l'image par B de tout élément $\mathscr{Q} \in C^2$ est donnée par*

$$B(\mathscr{Q}) := G(u)(2\mathscr{Q}_{uu}\mathscr{Q} - \mathscr{Q}_u^2) + G_u(u)\mathscr{Q}_u\mathscr{Q} + 2(-G_{uu}(u) + \lambda)\mathscr{Q}^2.$$

(**i**) *Soit $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 \in C^2$*

$$\begin{aligned} B(\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2) = {} & \mathscr{P}_1\mathscr{P}_2^2\,[2G(u)(\mathscr{P}_1)_{uu} + G_u(u)(\mathscr{P}_1)_u + (-G_{uu}(u) + \lambda)\mathscr{P}_1] \\ & + \mathscr{P}_1^2\mathscr{P}_2\,[[2G(u)(\mathscr{P}_2)_{uu} + G_u(u)(\mathscr{P}_2)_u + (-G_{uu}(u) + \lambda)\mathscr{P}_2] \\ & - G(u)W(u;\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)^2, \end{aligned} \tag{3.13}$$

où W désigne le Wronskien de $u, \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$.

(**ii**) *Soient $G, \mathscr{Q} \in C^3$.*

$$\frac{d}{du}B(\mathscr{Q}) = [2G(u)\mathscr{Q}_{uuu} + 3G(u)\mathscr{Q}_{uu} + (-3G_{uu}(u) + 4\lambda)\mathscr{Q}_u - 2G_{uuu}(u)\mathscr{Q}]\,\mathscr{Q}.$$

Démonstration. Un calcul direct donne ces résultats. □

La relation entre les équations (3.4) et (3.10) est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.4. *Soit f une fonction impaire de classe C^2 qui vérifie (2.3). Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux solutions de (3.4). Alors le produit $\mathscr{Q}(u) = \mathscr{P}_1(u)\mathscr{P}_2(u)$ satisfait (3.10).*

Démonstration. Considérons le cas où $\mathscr{P}_1 \not\equiv 0$ et $\mathscr{P}_2 \not\equiv 0$. Dans ce cas le nombre de zéros de $\mathscr{Q}$ dans chaque ensemble compact de $(-\alpha, \alpha)$ est fini parce que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont des solutions d'équations différentielles ordinaires linéaires.

À partir de (**i**) du Lemme 3.2.1 avec $G(u) = F(\alpha) - F(u)$, on a

$$\begin{aligned}
&(F(\alpha)-F(u))(2\mathscr{Q}_{uu}\mathscr{Q}-\mathscr{Q}_u^2)-f(u)\mathscr{Q}_u\mathscr{Q}+2(f_u(u)-\lambda)\mathscr{Q}^2 \\
&=\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2^2[2(F(\alpha)-F(u))(\mathscr{P}_1)_{uu}-f(u)(\mathscr{P}_1)_u+(f_u(u)+\lambda)\mathscr{P}_1] \\
&+\mathscr{P}_1^2\mathscr{P}_2[2(F(\alpha)-F(u))(\mathscr{P}_2)_{uu}-f(u)(\mathscr{P}_2)_u+(f_u(u)+\lambda)\mathscr{P}_2] \\
&-(F(\alpha)-F(u))W(u;\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Puisque $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont des solutions de (3.4), et

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du}(\sqrt{F(\alpha)-F(u)}W(u;\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)) \\
&=\frac{1}{2(\sqrt{F(\alpha)-F(u)})}[-f(u)W(u;\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)+2(F(\alpha)-F(u))W_u(u;\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)] \\
&=0,
\end{aligned}$$

alors, en dérivant (3.13) par rapport à u, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[(F(\alpha)-F(u))(2\mathscr{Q}_{uu}\mathscr{Q}-\mathscr{Q}_u^2)-f(u)\mathscr{Q}_u\mathscr{Q}+2(f_u(u)+\lambda)\mathscr{Q}^2]=0.$$

Par conséquent, il résulte du point (**i**) du Lemme 3.2.1, que

$$[2(F(\alpha)-F(u))\mathscr{Q}_{uuu}-3f(u)\mathscr{Q}_{uu}+(3f_u(u)+4\lambda)\mathscr{Q}_u+2f_{uu}(u)\mathscr{Q}]\,\mathscr{Q}=0.$$

Comme les zéros de $\mathscr{Q}$ sont isolées, on obtient (3.9) dans $(-\alpha,\alpha)$ en utilisant la continuité de $\mathscr{Q}$. Ce qui achève la démonstration.

□

Dans ce qui suit, on donne la représentation des fonctions propres à l'aide des formules (3.10) et (3.12).

Lemme 3.2.2. *(voir [35], Lemma 4.2, p.3977). Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,u_+)$ et $\mathscr{Q}=\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha)$ une solution particulière de* (3.10)*. On a*

$$(F(\alpha)-F(u))(2\mathscr{Q}_{uu}\mathscr{Q}-\mathscr{Q}_u^2)-f(u)\mathscr{Q}_u\mathscr{Q}+2(f_u(u)+\lambda)\mathscr{Q}^2=2\rho(\lambda;\alpha),$$

où $\rho(\lambda;\alpha)$ est donnée par (3.12).

Démonstration. La preuve se fait en utilisant (3.4), (3.12) et le point (**ii**) du Lemme 3.2.1. □

Lemme 3.2.3. *Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0,u_+)$. Soit $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha)$ une solution particulière de (3.4) telle que $\mathscr{Q} > 0$ sur le sous-intervalle $(\underline{\alpha},\overline{\alpha})$ de $(-\alpha,\alpha)$. Alors pour tout $u \in (\underline{\alpha},\overline{\alpha})$, on a*

$$2(F(\alpha)-F(u))(\sqrt{\mathscr{Q}})_{uu} - f(u)(\sqrt{\mathscr{Q}})_u + (f_u(u)+\lambda)\sqrt{\mathscr{Q}} = \frac{\rho(\lambda;\alpha)}{\mathscr{Q}(u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Démonstration. Par le point (i) du Lemme 3.2.1 avec $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2 = \sqrt{\mathscr{Q}}$ (et $G(u) = F(\alpha) - F(u)$), on a

$$\begin{aligned}
&(F(\alpha)-F(u))(2\mathscr{Q}_{uu}\mathscr{Q} - \mathscr{Q}_u^2) - f(u)\mathscr{Q}_u\mathscr{Q} + 2(f_u(u)+\lambda)\mathscr{Q}^2 \\
&= 2(\sqrt{\mathscr{Q}})^3\left[2(F(\alpha)-F(u))(\sqrt{\mathscr{Q}})_{uu} - f(u)(\sqrt{\mathscr{Q}})_u + (f_u(u)+\lambda)(\sqrt{\mathscr{Q}})\right] \\
&- (F(\alpha)-F(u))W(u;\sqrt{\mathscr{Q}},\sqrt{\mathscr{Q}})^2 \\
&= 2(\sqrt{\mathscr{Q}})^3\left[2(F(\alpha)-F(u))(\sqrt{\mathscr{Q}})_{uu} - f(u)(\sqrt{\mathscr{Q}})_u + (f_u(u)+\lambda)(\sqrt{\mathscr{Q}})\right].
\end{aligned}$$

À partir de Lemme 3.2.1,on obtient le résultat souhaité.

□

Proposition 3.5. *(voir [37, Proposition 3.1, p.77). Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0,u_+)$, soit $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha)$ une solution particulière de (3.4), et $\rho(\lambda;\alpha)$ donnée par (3.12).*

(**i**) *Si $\rho(\lambda;\alpha) = 0$, alors pour tout $u \in (-\alpha,\alpha)$ on a : ou bien $\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha) \geqslant 0$, ou alors $\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha) \leqslant 0$.*

(**ii**) *Si $\rho(\lambda;\alpha) > 0$, alors pour tout $u \in (-\alpha,\alpha)$ on a : ou bien $\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha) > 0$, ou alors $\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha) < 0$.*

Démonstration. Soit $\overline{u}$ un zéro de $\mathscr{Q}$ dans $(-\alpha,\alpha)$. On déduit du Lemme 3.2.2, que $\mathscr{Q}_u(\overline{u}) = 0$, et donc on déduit du théorème d'unicité des équations différentielles ordinaires linéaires, que $\mathscr{Q}_{uu}(\overline{u}) \neq 0$. En outre, on peut montrer qu'il y a au plus un nombre fini de zéros de $\mathscr{Q}$ dans chaque sous-ensemble compact dans $(-\alpha,\alpha)$. Cela implique le point (i).

(**ii**) Soit $\bar{u} \in (-\alpha, \alpha)$ telle que $\mathscr{Q}(\bar{u}) = 0$. On a par le Lemme 3.2.2

$$(F(\alpha) - F(\bar{u}))\mathscr{Q}_u(\bar{u})^2 = -\rho(\lambda; \alpha) < 0,$$

ce qui est une contradiction, d'où le point (**ii**).

□

Remarque 3.2.3. *Soit f une fonction impaire. La Proposition 3.5 implique qu'on peut prendre $\mathscr{Q}$ une fonction paire par rapport à u, ce qui implique que $\rho(\lambda; \alpha) \geqslant 0$.*

Proposition 3.6. *Soit f une fonction impaire de classe C^2 qui satisfait* (2.3)*. Supposons que* (3.10) *admet une solution particulière $\mathscr{Q}(u, \lambda; \alpha)$ telle que $\rho(\lambda; \alpha) = 0$ et $\mathscr{Q}(\alpha, \lambda; \alpha) \neq 0$. Alors, l'équation* (3.4) *admet une unique solution $\mathscr{P}(u, \lambda; \alpha)$ telle que pour tout $u \in [-\alpha, \alpha]$, on a*

$$\mathscr{P}(\alpha, \lambda; \alpha) = \sqrt{|\ \mathscr{Q}(\alpha, \lambda; \alpha)\ |} \quad \textbf{et} \quad \mathscr{P}(u, \lambda; \alpha)^2 = |\ \mathscr{Q}(u, \lambda; \alpha)\ | \,.$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, on pose $\mathscr{P}(u, \lambda; \alpha) = \mathscr{P}(u)$ et $\mathscr{Q}(u, \lambda; \alpha) = \mathscr{Q}(u)$.

Le point (i) de la Proposition 3.5 permet de supposer sans perte de généralité, que $\mathscr{Q}(u) \geqslant 0$ pour tout $u \in (-\alpha, \alpha)$.

Si $\mathscr{Q}(u) > 0$ pour $u \in (-\alpha, \alpha)$, alors à partir du Lemme 3.2.3 on a $\mathscr{P}(u) := \sqrt{\mathscr{Q}(u)}$ solution de (3.4). Il est facile de voir que $\mathscr{P}$ satisfait la Proposition.

Supposons que $\mathscr{Q}(u)$ admet des zéros dans $(-\alpha; \alpha)$. Alors, il existe $\alpha^\star > 0$ telles que $\mathscr{Q}(\alpha^\star) = 0$ et $\mathscr{Q}(u) > 0$ dans $(-\alpha^\star, \alpha)$. Soit $u_\star = (\alpha + \alpha^\star)/2$ et soit $\mathscr{P}$ la solution (unique) de (3.4), telle que

$$\mathscr{P}(u_\star) = \sqrt{\mathscr{Q}(u_\star)} \quad \textbf{et} \quad \mathscr{P}_u(u_\star) = \frac{\mathscr{Q}_u(u_\star)}{2\sqrt{\mathscr{Q}(u_\star)}}.$$

Notons par le Lemme 3.2.3 que $\mathscr{P}(u) = \sqrt{\mathscr{Q}(u)}$ pour $u \in [\alpha - \delta, \alpha]$.

On pose $\overline{\mathscr{Q}}(u) := \mathscr{P}(u)^2$. En combinant la Proposition 3.4 avec le théorème d'unicité, on obtient que $\overline{\mathscr{Q}}(u) = \mathscr{Q}(u)$ pour $u \in (-\alpha, \alpha)$. En utilisant la continuité de $\mathscr{Q}$, on démontre que $\mathscr{P}(u)^2 = \mathscr{Q}(u)$ pour $u \in [-\alpha, \alpha]$. □

Proposition 3.7. *Soit f une fonction impaire de classe C^2 qui satisfait* (2.3)*. Soient $\alpha_{n,\varepsilon}$ et $u_{n,\varepsilon}$ les fonctions définies par la Proposition 3.2. Soit λ un réel tel que* (3.10) *admet une solution particulière $\mathscr{Q}(u, \lambda; \alpha_{n,\varepsilon})$ avec $\rho(\lambda; \alpha_{n,\varepsilon}) = 0$ et $\mathscr{Q}(\alpha, \lambda; \alpha_{n,\varepsilon}) \neq 0$. Supposons que*

$\mathscr{Q}(.,\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})$ admet m zéros dans $(-\alpha,\alpha)$. Alors $\lambda_{mn}^{n,\varepsilon}=\lambda$ et $\varphi_{mn}^{n,\varepsilon}(x)=\mathscr{P}(u_{n,\varepsilon}(x),\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})$, où $\mathscr{P}$ est la solution régulière de (3.4) donnée par la Proposition 3.6.

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que $\mathscr{Q}\geqslant 0$ sur $[-\alpha,\alpha]$. En utilisant l'hypothèse que $\mathscr{Q}$ admet m zéros dans $(-\alpha,\alpha)$, on peut écrire que

$$\mathscr{P}(u)=\begin{cases}\sqrt{\mathscr{Q}(u)} & \text{pour } u\in(\alpha^\star,\alpha],\\ \\ (-1)^m\sqrt{\mathscr{Q}(u)} & \text{pour } u\in[-\alpha,-\alpha^\star)\end{cases}\tag{3.15}$$

avec $0<\alpha^\star<\alpha$ (on a utilisé ici l'hypothèse que $\mathscr{Q}$ est paire, voir la Remarque 3.2.3). Donc $\mathscr{P}$ admet m zéros.

Soit $\varphi(x):=\mathscr{P}(u_{n,\varepsilon}(x),\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})$. Comme $\mathscr{Q}(\alpha)=\mathscr{Q}(-\alpha)>0$, on voit que $\mathscr{P}\in C^2[-\alpha,\alpha]$ et $\mathscr{Q}\in C^2[0,1]$. À partir du point (i) de la Proposition 3.2, φ est une fonction propre de (2.4).

Puisque $u_{n,\varepsilon}$ est décroissante dans $[0,1/n]$ et satisfait le point (iv) de la Proposition 3.2, alors φ a exactement mn zéros dans $(0,1)$.

En appliquant le théorie de Sturm-Liouville à φ, nous concluons que $\varphi=\varphi_{mn}^{n,\varepsilon}$ et $\lambda=\lambda_{mn}^{n,\varepsilon}$.

□

Proposition 3.8. *Soit f une fonction impaire de classe C^2 qui satisfait (2.3). Soient $\alpha_{n,\varepsilon}$ et $u_{n,\varepsilon}$ définies par la Proposition 3.2. Supposons que (3.10) admet une solution particulière $\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha)$ avec $\rho(\lambda,\alpha_{n,\varepsilon})>0$. Alors*

$$\varphi(x;\lambda)=\sqrt{|\,\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x),\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})\,|}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\frac{\sqrt{\rho(\lambda,\alpha_{n,\varepsilon})}}{|\,\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(\xi),\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})\,|}d\xi\right),$$

et

$$\tilde{\varphi}(x;\lambda)=\sqrt{|\,\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x),\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})\,|}\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\frac{\sqrt{\rho(\lambda,\alpha_{n,\varepsilon})}}{|\,\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(\xi),\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})\,|}d\xi\right)$$

sont les deux solutions linéairement indépendantes de

$$\varepsilon^2\varphi_{xx}(x)+f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi(x)+\lambda\varphi(x)=0.\tag{3.16}$$

Démonstration. Pour simplifier, on note $\alpha_{n,\varepsilon} = \alpha$ et $\mathscr{Q}(u,\lambda;\alpha) = \mathscr{Q}(u)$. Soit un réel λ tel que $\rho(\lambda;\alpha) > 0$. Supposons que $\mathscr{Q}(u) > 0$ pour tout $u \in [-\alpha, \alpha]$. Sans perte de généralité, on suppose que $\mathscr{Q}(\alpha) = 1$.

On applique à (3.16) le changement de variable :

$$\varphi(x) = \sqrt{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))}.\mathscr{T}(\theta(x)),$$

où θ est une fonction (qu'un déterminera ultérieurement) telle que $\theta(0) = 0,\ \theta_x(x) > 0$ Alors (3.16) devient

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \sqrt{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))}\theta_x(x)^2 \mathscr{T}_{\theta\theta} + \varepsilon^2 \left(\theta_{xx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))} \right) \theta_x(x) \right) \mathscr{T}_\theta \\ &+ \left(\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))} \right) + (f_u(u_{n,\varepsilon}(x)) + \lambda) \sqrt{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))} \right) \mathscr{T} = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

On a par le Lemme 3.2.3

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))} \right) + (f_u(u_{n,\varepsilon}(x)) + \lambda) \sqrt{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))} = \frac{\rho(\lambda, \alpha_{n,\varepsilon})}{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc

$$\mathscr{T}_{\theta\theta} + \frac{1}{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))\theta_x(x)^2} \frac{d}{dx}\left(\theta_x \mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x)) \right) \mathscr{T}_\theta + \frac{\rho(\lambda, \alpha_{n,\varepsilon})}{\varepsilon^2 \mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))^2 \theta_x(x)^2} \mathscr{T} = 0. \tag{3.18}$$

Ici on choisit θ telle que

$$\frac{d}{dx}\left(\theta_x(x) \mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(x)) \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \theta_x(0) = \frac{\sqrt{\rho(\lambda;\alpha)}}{\varepsilon}.$$

En résolvant cette équation (avec l'hypothèse $\mathscr{Q}(\alpha) = 1$), on obtient

$$\theta(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\sqrt{\rho(\lambda;\alpha)}}{\mathscr{Q}(u_{n,\varepsilon}(\xi))} d\xi,$$

et (3.18) est devient

$$\mathscr{T}_{\theta\theta} + \mathscr{T} = 0. \tag{3.19}$$

En résolvant cette équation , on obtient les solutions linéairement indépendantes φ et $\tilde{\varphi}$ de la Proposition.

□

Proposition 3.9. *Soit f une fonction impaire de classe C^2 qui satisfait (2.3). Soient $\alpha_{n,\varepsilon}$ et $u_{n,\varepsilon}$ les fonctions définies par la Proposition 3.2. On suppose que (3.10) admet une solution particulière $\mathcal{Q}(u,\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})$ avec $\rho(\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})>0$.*

Si λ satisfait

$$\int_{-\alpha_{n,\varepsilon}}^{\alpha_{n,\varepsilon}} \frac{\sqrt{\rho(\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})}}{\sqrt{2(F(\alpha_{n,\varepsilon})-F(w))}\mid \mathcal{Q}(w,\lambda;\alpha_{n,\varepsilon})}dw=\frac{j\pi}{n}, \tag{3.20}$$

pour tout $j\in\mathbb{N}$, alors $\lambda_j^{n,\varepsilon}=\lambda$ et $\varphi_j^{n,\varepsilon}(x)=\varphi(x,\lambda_j^{n,\varepsilon})$, où $\varphi(x;\lambda)$ est donnée par la Proposition 3.8.

Démonstration. Notons que $\mathcal{Q}(u_{n,\varepsilon}(x))$ est $1/n$-périodique car $\mathcal{Q}$ est paire (voir Remarque 3.2.3) et $u_{n,\varepsilon}$ est $2/n$-périodique. Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\theta(1) &= \frac{n}{\varepsilon}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{\rho(\lambda,\alpha)}}{\mathcal{Q}(u_{n,\varepsilon}(\xi))}d\xi\\ &= n\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\rho(\lambda,\alpha)}}{\sqrt{2(F(\alpha)-F(w))}\mid \mathcal{Q}(w,\lambda;\alpha)\mid}dw.\end{aligned}$$

Par conséquent, si (3.20) est satisfaite, alors $\theta(1)=j\pi$. De plus, il est facile de voir que θ est croissante dans $x\in[0,1]$. En combinant ces résultats, la théorie de Sturm-Liouville, permet d'obtenir les résultats souhaités.

□