

Chapitre 2

Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

2.1 Problème

Rappelons le problème aux limites non linéaire (2) :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0 & x \in (0, 1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

et son problème aux valeurs propres linéarisé associé à u est

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u(x))\varphi(x) + \lambda \varphi(x) = 0 & x \in (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où ε est un (petit) paramètre strictement positif et f est assez régulière.

On note

$$F(u) := \int_0^u f(s) ds,$$

et on suppose que f est impaire et possède une non-linéarité bistable équilibrée. i.e. ayant uniquement trois zéros $u_- < 0 < u_+$ tels que

$$f_u(0) > 0, \quad f_u(u_{\pm}) < 0, \quad F(u_+) = F(u_-). \quad (2.3)$$

2.1 Problème

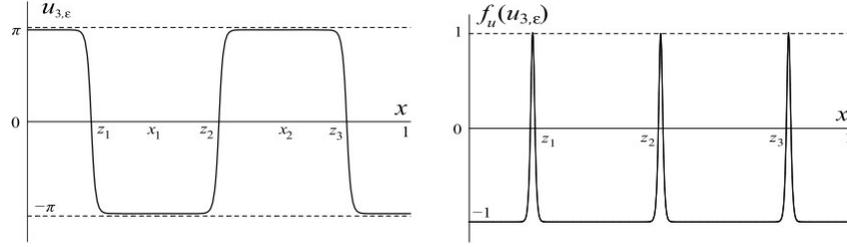


FIGURE 2.1 – Profils de $u_{3,\epsilon}(x)$ et $f(u) = \sin u$.

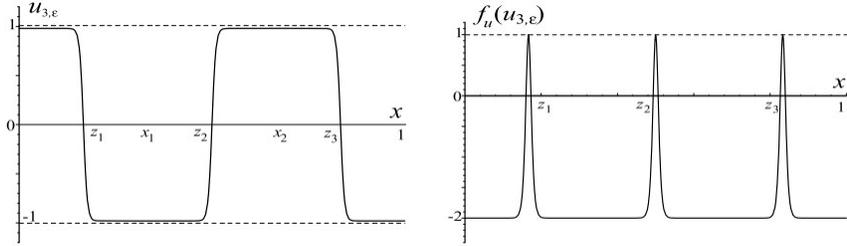


FIGURE 2.2 – Profils de $u_{3,\epsilon}(x)$ et $f(u) = u - u^3$.

Des exemples typiques sont : $f(u) = u - u^3$ avec $u_{\pm} = \pm 1$ et $f(u) = \sin u$ avec $u_{\pm} = \pm \pi$.

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, (2.1) admet des n -mode solutions $\pm u_{n,\epsilon}(x)$ lorsque ϵ est petit. Ici $u_{n,\epsilon}$ est caractérisé comme suit : $u_{n,\epsilon}$ a exactement n zéros $z_l = z_l^n$, ($l = 1, \dots, n$) et $u_{n,\epsilon}(0) > 0$.

Le problème aux valeurs propres linéarisé (2.2) associé à $u_{n,\epsilon}$ s'écrit

$$\begin{cases} \epsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u_{n,\epsilon}(x)) \varphi(x) + \lambda \varphi(x) = 0 & \text{dans } (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Pour $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous désignons par $\lambda_j = \lambda_j^{n,\epsilon}$ et $\varphi_j = \varphi_j^{n,\epsilon}$ respectivement la $(j+1)$ ème valeur propre et fonction propre. Depuis le travail de Chafee et Infante [8], (2.1) a été étudié par de nombreux auteurs, ils ont utilisé une méthode de tir pour obtenir toutes les solutions non triviales de (2.1). Selon la théorie de Sturm-Liouville, (2.4) admet des valeurs propres $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ telles que $\lambda_0^{n,\epsilon} < \dots < \lambda_j^{n,\epsilon} < \dots < +\infty$ et la fonction propre φ_j a exactement j zéros dans $(0, 1)$. (voir p.ex. Brunovský -Fiedler [6],[31]).

Wakasa et Yotsutani [35] ramènent le problème (2.4) (grâce à un changement d'échelle et à des considérations physiques) à l'étude du problème

2.1 Problème

$$\begin{cases} \Phi_{zz}(z) + f_u(U(z))\Phi(z) + \Lambda\Phi(z) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}, \\ \Phi \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (2.5)$$

La théorie spectrale due à H. Weyl montre que l'ensemble spectral de (2.5) se compose d'un nombre fini de valeurs propres isolées simples $\Lambda_0 < \dots < \Lambda_{m-1}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, et d'un spectre essentiel $[\Lambda_m, +\infty)$ avec $\Lambda_m > \Lambda_{m-1}$. On désigne par Φ_j ($j = 0, \dots, m-1$), les fonctions propres correspondant à Λ_j , Quant à Φ_m , elle désigne une fonction bornée, qui n'est pas de carré intégrable, solution de la première équation de (2.5) avec $\Lambda = \Lambda_m$ (unique à une normalisation près). Si f est impaire et satisfait (2.3) alors

$$\Lambda_0 = 0, \quad \Phi_0(z) = U_z(z) > 0, \quad \Lambda_m = -f_u(u_{\pm}).$$

L'une des propriétés importantes de (2.4) est l'existence de n valeurs propres critiques : pour $0 \leq j < n$, $\lambda_j^{n,\varepsilon} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (voir [32], Proposition 2.4, p.7). Plus précisément, Carr-Pego [7] ont obtenu pour $0 \leq j < n$, $\lambda_j^{n,\varepsilon} = O(\exp(-d/\varepsilon))$ où $d > 0$. De ce fait, il a été prouvé que si $0 \leq j < n$, alors dans le voisinage de $x = z_l^n$

$$\varphi_j^{n,\varepsilon}(x) \sim C_{j,l}^{n,\varepsilon} \Phi_0(z) = C_{j,l}^{n,\varepsilon} U_z \left(\frac{x - z_l^n}{\varepsilon} \right),$$

avec une constante $C_{j,l}^{n,\varepsilon}$. L'argument ci-dessus justifie de manière heuristique l'apparition de pics pour $\varphi_j^{n,\varepsilon}$. Chaque $C_{j,l}^{n,\varepsilon}$ est considéré comme la hauteur du pic en z_l^n .

Concernant les Profils de $\varphi_j^{n,\varepsilon}$ avec $0 \leq j < n$, ils ont été étudiés par Fusco-Hale [15]. D'un point de vue différent, E. Yanagida, a montré une conjecture détaillée sur ces profils pour une fonction f assez général comprenant la non-linéarité bistable (2.3). Ces auteurs ont proposé une conjecture intéressante :

" Pour le cas $0 \leq j < n$, $\varphi_j^{n,\varepsilon}$ a des pics aux voisinages de z_l^n ($l = 1, \dots, n$), et la hauteur de chaque pic est proportionnelle à $\cos j\pi z_l^n$."

Dans ce contexte, on s'intéresse aux questions suivantes :

(Q1) Est-ce-que $\varphi_j^{n,\varepsilon}$, avec $0 \leq j < n$, ont des pics dont les hauteurs sont proportionnelles à $\cos j\pi z_l^n$?

(Q2) Est-ce-que l'énoncé ci-dessus est valable pour $\varphi_j^{n,\varepsilon}$ avec $j \geq n$?

2.1 Problème

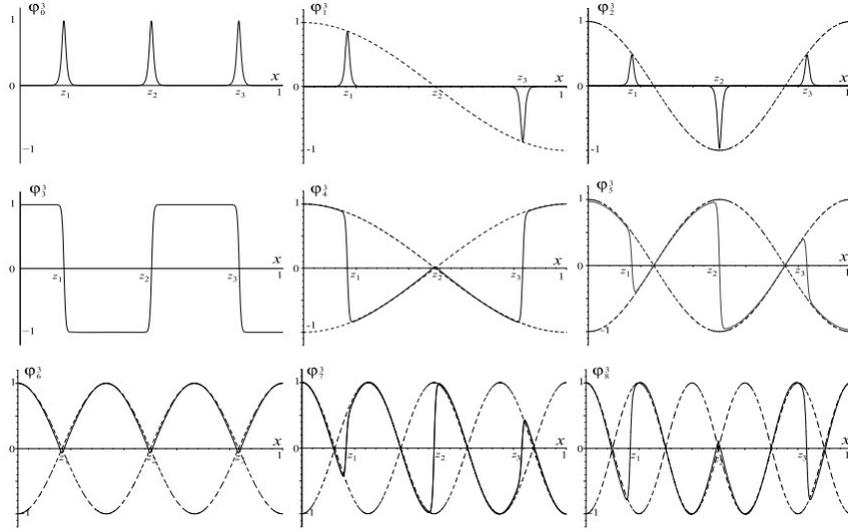


FIGURE 2.3 – Profils de $\varphi_j^{3,\varepsilon}$ ($j = 0, \dots, 8$) pour $f(u) = \sin u$.

Dans les références [37] et [34] Wakasa et Yotsutani ont fourni les réponses à ces questions dans le cas spécial $f(u) = \sin u$. Dans ce cas, il a été montré que $U(z) = 2\sin^{-1}(\tanh z)$, et que le problème spectral (2.5) a une seule valeur propre isolée Λ_0 . De même le spectre continu est de la forme $[\Lambda_1, +\infty]$. De plus :

- (i) $\Lambda_0 = 0$, $\Phi_0(z) = \cos \frac{U(z)}{2} = \operatorname{sech} z$,
- (ii) $\Lambda_1 = 1$, $\Phi_1(z) = \sin \frac{U(z)}{2} = \tanh z$.

Par ailleurs ces auteurs ont prouvé que (voir Fig.2.2) :

- (I) $\varphi_0^{n,\varepsilon}(x) \sim \Phi_0\left(\frac{x-z_l^n}{\varepsilon}\right)$
 $\varphi_n^{n,\varepsilon}(x) \sim (-1)^l \Phi_1\left(\frac{x-z_l^n}{\varepsilon}\right)$
dans un voisinage de z_l^n quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (II) Pour $0 \leq j < n$,

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} \sim -16 \cos^2 \frac{j\pi}{2n} \exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right),$$

$$\varphi_j^{n,\varepsilon}(x) \sim \varphi_0^{n,\varepsilon}(x) \cos j\pi z_l^n \sim \Phi_0\left(\frac{x-z_l^n}{\varepsilon}\right) \cos j\pi z_l^n,$$

dans un voisinage de z_l^n quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (III) Pour $j \geq n$,

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} \sim 1 + (j-n)^2 \pi^2 \varepsilon^2,$$

2.1 Problème

$$\varphi_j^{n,\varepsilon}(x) \sim \varphi_n^{n,\varepsilon}(x) \cos(j-n)\pi x \sim (-1)^l \Phi_1 \left(\frac{x-z_l^n}{\varepsilon} \right) \cos(j-n)\pi x,$$

dans un voisinage de z_l^n quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On dit que les fonctions $\varphi_0^{n,\varepsilon}$ et $\varphi_n^{n,\varepsilon}$ figurant dans les résultats ci-dessus sont des fonctions propres spéciales dans le sens qu'elles décrivent les profils locaux de toutes les autres fonctions propres lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Wakasa et Yotsutani [36,35] ont étudié également l'équation d'Allen-Cahn dans le cas où $f(u) = u - u^3$ et ont donné les formules asymptotiques des valeurs propres et fonctions propres quand $\varepsilon \rightarrow 0$. C'est le travail qu'on détaillera dans ce mémoire.

On remarque d'abord le fait suivant sur (2.5)

Théorème 2.1.1. (voir [35], p. 3965) *Le problème (2.5) admet deux valeurs propres isolées Λ_0, Λ_1 et un spectre continu $[\Lambda_2, +\infty)$ tels que :*

- (i) $\Lambda_0 = 0, \quad \Phi_0(z) = 1 - U(z)^2 \left(= \operatorname{sech}^2 \frac{z}{\sqrt{2}} \right),$
- (ii) $\Lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \Phi_1(z) = 2U(z)\sqrt{1-U^2} \left(= 2 \tanh \frac{z}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \frac{z}{\sqrt{2}} \right),$
- (iii) $\Lambda_2 = 2 (= -f_u(u_{\pm})), \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2}(3U(z)^2 - 1) \left(= \frac{3}{2} \tanh^2 \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right).$

Remarque 2.1.1. (voir [11],[14]). *On a ramené le problème (2.1) à l'étude du problème suivant*

$$\begin{cases} U_{zz}(z) + f(U(z)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}, \\ U(-\infty) = u_-, \quad U(+\infty) = u_+, \quad U(0) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

tel que $z = \frac{x-z_l^n}{\varepsilon}$. D'après la première équation du problème (2.6) on a $U_{zz}(z) = -f(U(z))$.

Pour simplifier les notations, on pose $U = U(z)$. Alors, on a

$$U_{zz} = U^3 - U. \quad (2.7)$$

En multipliant les deux membres de (2.7) par U_z , on obtient

$$U_z U_{zz} = U_z U^3 - U_z U,$$

2.1 Problème

et donc

$$\frac{1}{2}(U_z^2)_z = \frac{1}{4}(U^4)_z - \frac{1}{2}(U^2)_z. \quad (2.8)$$

En multipliant les deux membre de (2.8) par 2, puis en intégrant par rapport à z , on obtient

$$\int (U_z^2)_z dz = \frac{1}{2} \int (U^4)_z dz - \int (U^2)_z dz,$$

donc

$$U_z^2 = \frac{1}{2}U^4 - U^2 + C,$$

où C est une constante arbitraire qui est déterminée de la manière suivante en tenant compte des considérations physiques imposant les condition aux limites $U \rightarrow \pm 1$ et $U_z \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow \pm\infty$.

On a

$$C = U^2 - \frac{1}{2}U^4 \Big|_{U=\pm 1} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, on a

$$U_z^2 = \frac{1}{2}U^4 - U^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(U^2 - 1)^2.$$

On peut vérifier que parmi les solution de cette équation, on trouve $\tanh(z/\sqrt{2})$.

En fait, $U(z) = \tanh(\frac{z}{\sqrt{2}} + C)$ est solution pour toute constante C . Cependant les données physiques imposent $C = 0$, i.e,

$$U(z) = \tanh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

Maintenant, en faisant les changements des variables $U = U(z)$ et $\Phi(z) = \mathcal{P}(U(z))$ avec (2.6). On obtient

$$\Phi_z = U_z \mathcal{P}_U,$$

$$\Phi_{zz} = U_{zz} \mathcal{P}_U + U_z^2 \mathcal{P}_{UU}.$$

La première équation de (2.5) est réduite à l'équation différentielle

$$U_{zz} \mathcal{P}_U + U_z^2 \mathcal{P}_{UU} + (1 - 3U^2) \mathcal{P} + \Lambda \mathcal{P} = 0,$$

2.1 Problème

on obtient

$$U(U^2 - 1)\mathcal{P}_U + \frac{1}{2}(U^2 - 1)^2 \mathcal{P}_{UU} + (1 - 3U^2)\mathcal{P} + \Lambda\mathcal{P} = 0,$$

alors

$$\frac{1}{2}(1 - U^2) \left[(1 - U^2)\mathcal{P}_{UU} - 2U\mathcal{P}_U + \left(\frac{2(1 - 3U^2)}{1 - U^2} + \frac{2\Lambda}{1 - U^2} \right) \mathcal{P} \right] = 0,$$

donc

$$\frac{1}{2}(1 - U^2) \left[(1 - U^2)\mathcal{P}_{UU} - 2U\mathcal{P}_U + \left(6 - \frac{2(2 - \Lambda)}{1 - U^2} \right) \mathcal{P} \right] = 0.$$

Par conséquent, la première équation de (2.5) est réduite à l'équation différentielle de Legendre avec $m = 2$

$$\frac{1}{2}(1 - U^2) \left[(1 - U^2)\mathcal{P}_{UU} - 2U\mathcal{P}_U + \left(m(m + 1) - \frac{2(2 - \Lambda)}{1 - U^2} \right) \mathcal{P} \right] = 0,$$

avec $U \in [-1, 1]$. La résolution de l'équation ci-dessus, permet d'obtenir des informations sur (2.5).

Dans le cas où $f(u) = \sin u$ c'est l'équation de Legendre avec $m = 1$ qui intervient.

Dans la suite on verra que (2.4), avec $f(u) = u - u^3$ admet trois fonctions propres spéciales $\varphi_0^{n,\varepsilon}$, $\varphi_n^{n,\varepsilon}$, et $\varphi_{2n}^{n,\varepsilon}$. (voir [36],[35]) qui satisfont la relation :

$$\varphi_{nj}^{n,\varepsilon}(x) \sim (-1)^{lj} \Phi_j \left(\frac{x - z_l^n}{\varepsilon} \right), \quad j = 0, 1, 2, l = 1, \dots, n$$

dans un voisinage de z_l^n , et on a les formules asymptotiques pour les trois cas (I) $0 \leq j < n$, (II) $n \leq j < 2n$ et (III) $j \geq 2n$ (voir Fig.4,5,6) :

$$(I) \begin{cases} \lambda_j^{n,\varepsilon} \sim -96 \cos^2 \frac{j\pi}{2n} \exp \left(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon} \right), \\ \varphi_j^{n,\varepsilon}(x) \sim \varphi_0^{n,\varepsilon}(x) \cos j\pi z_l \sim \Phi_0 \left(\frac{x - z_l^n}{\varepsilon} \right) \cos j\pi z_l^n \end{cases}$$

dans un voisinage de z_l^n , quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$(II) \begin{cases} \lambda_j^{n,\varepsilon} \sim \frac{3}{2} - 12 \cos \frac{(j-n)\pi}{n} \exp \left(-\frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}} \right), \\ \varphi_j^{n,\varepsilon}(x) \sim \varphi_n^{n,\varepsilon}(x) \cos(j-n)\pi z_l^n \sim (-1)^l \Phi_1 \left(\frac{x - z_l^n}{\varepsilon} \right) \cos(j-n)\pi z_l^n \end{cases}$$

dans un voisinage de z_l^n , quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$(III) \begin{cases} \lambda_j^{n,\varepsilon} \sim 2 + (j - 2n)^2 \pi^2 \varepsilon^2, \\ \varphi_j^{n,\varepsilon}(x) \sim \varphi_{2n}^{n,\varepsilon}(x) \cos(j - 2n)\pi x \sim (-1)^{2l} \Phi_2 \left(\frac{x - z_l^n}{\varepsilon} \right) \cos(j - 2n)\pi x \end{cases}$$

dans un voisinage de z_l^n , quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.1 Problème

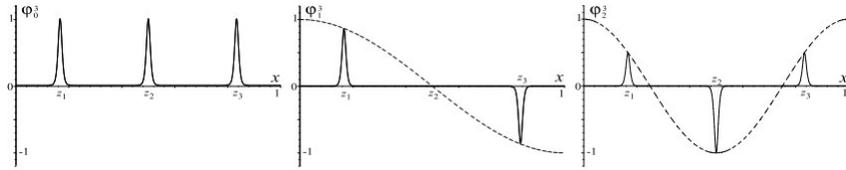


FIGURE 2.4 – Profils de $\varphi_j^{3,\varepsilon}$ pour $j = 0, 1, 2$ et $f(u) = u - u^3$.

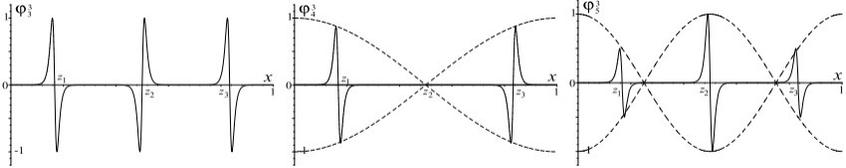


FIGURE 2.5 – Profils de $\varphi_j^{3,\varepsilon}$ pour $j = 3, 4, 5$ et $f(u) = u - u^3$.

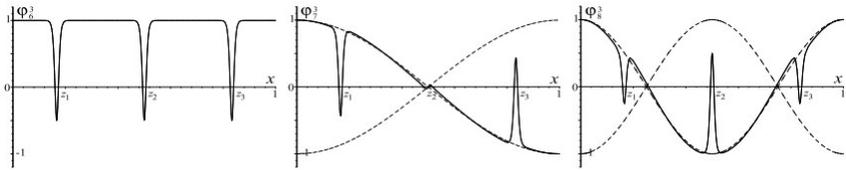


FIGURE 2.6 – Profils de $\varphi_j^{3,\varepsilon}$ pour $j = 6, 7, 8$ et $f(u) = u - u^3$.

Cela permettra alors de répondre aux questions (Q1) et (Q2) :

- Réponse à la question (Q1) : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il semble que φ_j^n avec $0 \leq j < n$ se composent de pics dont les hauteurs sont proportionnelles à $\cos j\pi z_j^n$.
- Réponse à la question (Q2) : Cela dépend étroitement de la non linéarité de f .

De plus, il semble qu'il y a un nombre fini de fonctions propres spéciales $\varphi_j^{n,\varepsilon}$ qui contrôlent les autres fonctions propres. Elles coïncident avec Φ_j de (2.5). Par cette observation, T. Wakasa, S. Yotsutani [35] proposent la conjecture suivante relativement aux éléments propres de (2.4) pour une fonction f assez générale :

" Toutes les valeurs propres et fonctions propres de (2.4) sont classées en plusieurs groupes en fonction de la structure de (2.5) et il y a une propriété asymptotique universelle dans chacun des groupes".

Les principaux résultats présentés dans ce mémoire sont les suivants

2.2 Résultats principaux

Théorème 2.2.1. (voir [35], Theorem 1.1, p. 3967, [35], Proposition 1.1, p. 5471) Supposons que $f = u - u^3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. quand $\varepsilon \rightarrow 0$, dans (2.4) on obtient

- (i) $\lambda_0^{n,\varepsilon} = -96 \exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}) + o(\exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}))$,
- (ii) $\lambda_n^{n,\varepsilon} = \frac{3}{2} - 12 \exp(-\frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}}) + o(\exp(-\frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}}))$,
- (iii) $\lambda_{2n}^{n,\varepsilon} = 2 + 96 \exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}) + o(\exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}))$.

Théorème 2.2.2. (voir [35], Theorem 1.2, p.3967, [35], Proposition 1.2, p. 5471) Supposons que $f = u - u^3$. Soient $n \in \mathbb{N}$ fixé et $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. quand $\varepsilon \rightarrow 0$, dans (2.4) on obtient

- (i) Pour $0 < j < n$, $\lambda_j^{n,\varepsilon} = -96 \cos^2 \frac{j\pi}{2n} \cdot \exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}) + o(\exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}))$,
- (ii) Pour $n < j < 2n$, $\lambda_j^{n,\varepsilon} = \frac{3}{2} - 12 \cos \frac{(j-n)\pi}{n} \exp(-\frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}}) + o(\exp(-\frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}}))$,
- (iii) Pour $j > 2n$, $\lambda_j^{n,\varepsilon} = 2 + (j - 2n)^2 \pi^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.

Afin de prouver les principaux résultats, on commence par donner les expressions de toutes les fonctions propres de (2.4). Dans le cas $f(u) = u - u^3$ (et pour le cas $f(u) = \sin u$, voir [13]), on va voir que les fonctions propres spéciales sont données explicitement en fonction de $u_{n,\varepsilon}$, et que les autres fonctions propres sont exprimées en "solutions Liouvillian " (pour plus de détails, voir Kovacic [17]).

On va introduire *la représentation de l'équation* pour obtenir des fonctions propres (2.4), cette représentation est développée dans [31] et [37]. La méthode qui utilise l'équation de représentation conduit facilement à *la fonction caractéristique*, qui fournit toutes les valeurs propres. Il convient de noter que la théorie classique de l'équation de Lamé pourrait être applicable afin d'obtenir les expressions des fonctions propres (voir Whittaker-Watson [39]). Cependant, on a besoin de prendre en compte la condition aux limites pour la caractérisation des valeurs propres.