Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Résultats fondamentaux sur les intégrales elliptiques complètes

On commence par la définition de l'intégrale elliptique complète.

Définition 1.1.1. *(voir [35], p. 3999, [20], p. 8). Soient $k \in [0,1)$ et $\nu \in \mathbb{C}$. Les intégrales elliptiques complètes du premier, second et troisième type sont définies respectivement par :*

$$K(k) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\mathrm{d}s, \tag{1.1}$$

$$E(k) := \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}}\mathrm{d}s, \tag{1.2}$$

et

$$\Pi(\nu,k) := \int_0^1 \frac{1}{(1+\nu s^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\mathrm{d}s. \tag{1.3}$$

Il est clair que K est monotone et croissante en k. On a :

$$K(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to 1} K(k) = +\infty.$$

Quant à E, elle est monotone et décroissante en k. On a

$$E(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to 1} E(k) = 1.$$

On a le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *(voir [33], Lemma 1.5.2., p. 54) Soient $k \in (0,1)$ et $\nu \neq 0, -1, -k^2$. Alors,*

(**i**) $\frac{\mathrm{d}E}{dk}(k) = \frac{E(k)-K(k)}{k}$,

(**ii**) $\frac{\mathrm{d}K}{dk}(k) = \frac{E(k)-(1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)}$,

(**iii**) $\frac{\partial \Pi}{\partial k}(\nu, k) = \frac{k(E(k)-(1-k^2)\Pi(\nu,k))}{(k^2+\nu)(1-k^2)}$,

(**iv**) $\frac{\partial \Pi}{\partial \nu}(\nu, k) = -\frac{K(k)}{2\nu(1+\nu)} + \frac{E(k)}{2(1+\nu)(k^2+\nu)} + \frac{(k^2-\nu^2)\Pi(\nu,k)}{2\nu(1+\nu)(k^2+\nu)}$.

Démonstration.

(**i**) Le théorème de dérivabilité sous le signe somme nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial k}\left[\sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}}\right]\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \frac{-ks^2}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{1-k^2s^2}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}ds - \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{k}\left[E(k) - K(k)\right].
\end{aligned}$$

(**ii**) Pour montrer cette assertion, on note que

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k}(k) = \int_0^1 \frac{ks^2}{\sqrt{1-s^2}(1-k^2s^2)^{3/2}}\mathrm{d}s.$$

En multipliant cette égalité par $-(1-k^2)/k$ et en ajoutant $K(k)$ on obtient

$$\begin{aligned}
K(k)-\frac{1-k^2}{k}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k}(k) &= \int_0^1 \sqrt{1-s^2}.\frac{1}{(1-k^2s^2)^{3/2}}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \sqrt{1-s^2}\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{\sqrt{1-k^2s^2}}\right]\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}.\frac{s}{\sqrt{1-k^2s^2}}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{k^2}\int_0^1 \frac{1-(1-k^2s^2)}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{k^2}K(k)-\frac{1}{k^2}E(k).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Donc

$$K(k)-\frac{1-k^2}{k}\frac{dK}{dk}(k)=\frac{1}{k^2}K(k)-\frac{1}{k^2}E(k).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dk}(k) &= -\frac{k}{1-k^2}\left[-K(k)+\frac{1}{k^2}K(k)-\frac{1}{k^2}E(k)\right] \\
&= \frac{E(k)-(1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)}.
\end{aligned}$$

(**iii**) et (**iv**). On a

$$\frac{\partial\Pi}{\partial k}(\nu,k)=\int_0^1 \frac{ks^2}{(1+\nu s^2)\sqrt{1-s^2}(1-k^2s^2)^{3/2}}\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial \nu}(\nu,k)=-\int_0^1 \frac{s^2}{(1+\nu s^2)\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}}\mathrm{d}s.$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\Pi(\nu,k)+\frac{k^2+\nu}{k}\frac{\partial\Pi}{\partial k}(\nu,k) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}(1-k^2s^2)^{3/2}}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \frac{(1-k^2s^2)+k^2s^2}{\sqrt{1-s^2}(1-k^2s^2)^{3/2}}\mathrm{d}s \\
&= K(k)+k\frac{dK}{\mathrm{d}k}(k) \\
&= \frac{1}{1-k^2}E(k).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

En combinant (1.5) et l'assertion (**ii**), on obtient (**iii**).

De même, on a

$$\begin{aligned}
\Pi(\nu,k)-\frac{1-k^2}{k}\frac{\partial\Pi}{\partial k}(\nu,k) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{1+\nu s^2}.\frac{1}{(1-k^2s^2)^{3/2}}ds \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{1+\nu s^2}.\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{\sqrt{1-k^2s^2}}\right]\mathrm{d}s \\
&= -\int_0^1 \frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{1-s^2}}{1+\nu s^2}\right].\frac{s}{\sqrt{1-k^2s^2}}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \frac{(1+2\nu)s^2-\nu s^4}{(1+\nu s^2)^2\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}}\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{\nu}\int_0^1 \frac{(1+\nu s^2)^2-(1+\nu s^2)-2\nu(\nu+1)s^2}{(1+\nu s^2)^2\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}}\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{\nu}K(k)+\frac{1}{\nu}\Pi(\nu,k)-2(\nu+1)\frac{\partial\Pi}{\partial\nu}(\nu,k).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

On obtient alors (iv) en tenant compte de (iii). Ce qui achève la démonstration du Lemme 1.1.1.

□

On a les résultats suivants

Lemme 1.1.2. *(voir [35], p. 4000). Pour chaque $k\in(0,1)$, on a*

$$(1-k^2)K(k) < E(k) < (1-\frac{1}{2}k^2)K(k). \tag{1.7}$$

Lemme 1.1.3. *(voir [33], p. 54, [33], p. 545). Soient $k\in(0,1)$ et K l'intégrale elliptique du premier type. Alors*

$$\lim_{k\to 1}\left(K(k)-\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}-2\log 2\right)=0. \tag{1.8}$$

En plus des Lemmes 1.1.1, 1.1.2 et 1.1.3, on va utiliser plusieurs formules asymptotiques relatives à l'intégrale elliptique $\Pi(\nu,k)$. Les changements de variables $s=\tau/\sqrt{1+\nu+\tau^2}$ et $s=\tau/\sqrt{1+\tau^2}$ conduisent respectivement, aux formules suivantes :

$$\sqrt{1+\nu}\,\Pi(\nu,k)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\tau^2}\sqrt{\frac{1+\nu+\tau^2}{1+\nu+(1-k^2)\tau^2}}\mathrm{d}\tau, \tag{1.9}$$

et

$$\Pi(\nu,k)=\int_0^{+\infty}\frac{1+\tau^2}{(1+(1+\nu)\tau^2)\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+(1-k^2)\tau^2}}\mathrm{d}\tau. \tag{1.10}$$

Remarque 1.1.1. *Dans le cas où* $\nu \in (0,1)$, *les équations* (1.9) *et* (1.10) *impliquent que*

$$K(k) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+(1-k^2)\tau^2}} \mathrm{d}\tau. \tag{1.11}$$

Lemme 1.1.4. *(voir [33], Lemma 1.5.1, p. 54). Soient* $k \in (0,1)$ *et* $\nu > -1$. *On a*

(**i**) $\lim_{\nu \to -1} \sqrt{1+\nu}\ \Pi(\nu,k) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}$,

(**ii**) $\lim_{\nu \to +\infty} \sqrt{1+\nu}\ \Pi(\nu,k) = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration. En faisant le changement de variable $s = \tau/\sqrt{1+\nu+\tau^2}$ on obtient

$$\sqrt{1+\nu}\ \Pi(\nu,k) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2}\sqrt{\frac{1+\nu+\tau^2}{1+\nu+(1-k^2)\tau^2}} d\tau. \tag{1.12}$$

Donc,

$$\lim_{\nu \to +\infty} \sqrt{1+\nu}\ \Pi(\nu,k) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau = \frac{\pi}{2}. \tag{1.13}$$

Puis, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à (1.12), on obtient le point **(i)**. En procédant de la même manière, on arrive à démontrer le point **(ii)**. □

On a aussi le

Lemme 1.1.5. *(voir [35], Lemma A.5, p. 4001). Soit* $k \in (0,1)$, *et* ν *une fonction continue sur l'intervalle* $(0,1)$, *telle que pour tout* $k \in (0,1)$ *on a*

$$-1 < \nu(k) < -k^2.$$

On suppose qu'il existe $\nu^* \in [0,1]$ *telle que*

$$\lim_{k \to 1} \frac{1+\nu(k)}{1-k^2} = \nu^*.$$

Alors, pour chaque $\nu^* \in [0,1]$, *on a*

$$\lim_{k \to 1} \sqrt{-(1+\nu(k))(k^2+\nu(k))}\ .\Pi(\nu(k),k) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{\nu^*}{1-\nu^*}}.$$

Démonstration. Soit $\tilde{\nu}(k) := (1+\nu(k))/(1-k^2)$. Il est facile de voir que $0 < \tilde{\nu}(k) < 1$ pour tout $k \in (0,1)$ et $\tilde{\nu}(k) \to \nu^*$ quand $k \to 0$.

Il résulte de (1.9), que

$$\begin{aligned}\sqrt{-(1+\nu(k))(k^2+\nu(k))}\ .\Pi(\nu(k),k) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{-(k^2+\nu(k))}}{1+\tau^2}\sqrt{\frac{1+\nu(k)+\tau^2}{1+\nu(k)+(1-k^2)\tau^2}}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1-\tilde{\nu}(k)}}{1+\tau^2}\sqrt{\frac{\tilde{\nu}(k)(1-k^2)+\tau^2}{\tilde{\nu}(k)+\tau^2}}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

• Si $\nu^* \in [0,1)$, alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue conduit à

$$\lim_{k\to 1}\sqrt{-(1+\nu(k))(k^2+\nu(k))}\ .\Pi(\nu(k),k) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1-\nu^*}\tau}{(1+\tau^2)\sqrt{\nu^*+\tau^2}}\mathrm{d}\tau. \tag{1.14}$$

On conclut en utilisant l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1-\nu^*}\tau}{(1+\tau^2)\sqrt{\nu^*+\tau^2}}\mathrm{d}\tau = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } \nu^* = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{\nu^*}{1-\nu^*}} & \text{si } \nu^* \in (0,1). \end{cases} \tag{1.15}$$

• Si $\nu^* = 1$, on a

$$\lim_{k\to 1}\sqrt{-(1+\nu(k))(k^2+\nu(k))}\ .\Pi(\nu(k),k) = 0. \tag{1.16}$$

Ce qui achève la démonstration. □

Lemme 1.1.6. *(voir [35], p. 4001) Soit la fonction J définie par*

$$J(\nu,k) := \sqrt{1+\nu}\Pi(\nu,k) - \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}K(k).$$

On a

$$\lim_{\nu\to+\infty, k\to 1} J(\nu,k) = \frac{\pi}{2}. \tag{1.17}$$

Démonstration. Par l'égalité (1.10), on a

$$\begin{aligned}\Pi(\nu,k) &= \frac{1}{1+\nu}\int_0^{+\infty}\frac{1+\nu+(1+\nu)\tau^2}{(1+(1+\nu)\tau^2)\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+(1-k^2)\tau^2}}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{1+\nu}\left(K(k)+\int_0^{+\infty}\frac{\nu}{(1+(1+\nu)\tau^2)\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+(1-k^2)\tau^2}}\mathrm{d}\tau\right),\end{aligned}$$

et en faisant le changement de variable $t=\sqrt{1+\nu}\tau$, on obtient

$$\begin{aligned}J(\nu,k) &= \frac{\nu}{1+\nu}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+\nu}}{(1+(1+\nu)\tau^2)\sqrt{1+\tau^2}\sqrt{1+(1-k^2)\tau^2}}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\nu}{1+\nu}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+\frac{1}{1+\nu}t^2}\sqrt{1+\frac{1-k^2}{1+\nu}\tau}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ainsi, si on fait tendre ν vers $+\infty$ et k vers 1, on obtient le résultat souhaité, à savoir

$$\lim_{\nu\to+\infty,k\to1}J(\nu,k)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}.$$

□

Introduisons maintenant la fonction suivante liée à Π

$$\tilde{\Pi}(a,b,k):=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}[a+(b-s^2)^2]}\mathrm{d}s \tag{1.18}$$

où $a>0$ et $b\in(0,1)$. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}(a,b,k) &= \Pi((b+\sqrt{-a})/(a+b^2),k) \\ &= \Pi((b-\sqrt{-a})/(a+b^2),k).\end{aligned}$$

Dans les lemmes qui suivent, on donne quelques formules asymptotiques pour $\tilde{\Pi}$.

Lemme 1.1.7. *(voir [33], Lemma 1.5.3, p. 61) Supposons que $a>0$ et $b,b_0\in(0,1)$. Pour chaque $k\in(0,1)$, on a*

$$\lim_{a\to0,b\to b_0}\sqrt{a}\tilde{\Pi}(a,b,k)=\frac{\pi}{2\sqrt{b_0(1-b_0)(1-k^2b_0)}}. \tag{1.19}$$

Démonstration. Pour $k \in [0,1)$ arbitraire, on définit les fonctions I_1 et I_2 suivantes :

$$I_1(a,b,k) = \int_0^{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)[a+(b-s^2)^2]}} \mathrm{d}s,$$

$$I_2(a,b,k) = \int_{\sqrt{b}}^1 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)[a+(b-s^2)^2]}} \mathrm{d}s.$$

En faisant le changement de variable $s = \sqrt{b/(1+\sqrt{a}\tau)}$ dans I_1, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(a,b,k) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{(1-\frac{b}{1+\sqrt{a}\tau})^{1/2}(1-\frac{k^2b}{1+\sqrt{a}\tau})^{1/2}[a+(\frac{\sqrt{ab}\tau}{1+\sqrt{a}\tau})^2]} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{ab}}{(1+\sqrt{a}\tau)^{3/2}} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\sqrt{b}}{2} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1+\sqrt{a}\tau}{1-b+\sqrt{a}\tau}} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{a}\tau}{1-k^2b+\sqrt{a}\tau}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{a}\tau}}{(1+\sqrt{a}\tau)^2+b^2\tau^2} \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{1.20}$$

De la même manière, en faisant le changement de variable $s = \sqrt{(b+\sqrt{a}\tau)/(1+\sqrt{a}\tau)}$ dans I_2, il vient

$$\begin{aligned} I_2(a,b,k) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{(1-\frac{b+\sqrt{a}\tau}{1+\sqrt{a}\tau})^{1/2}(1-\frac{k^2(b+\sqrt{a}\tau)}{1+\sqrt{a}\tau})^{1/2}[a+(\frac{\sqrt{a}(1-b)\tau}{1+\sqrt{a}\tau})^2]} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a}(1-b)}{(b+\sqrt{a}\tau)^{1/2}(1+\sqrt{a}\tau)^{3/2}} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\sqrt{1-b}}{2} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1+\sqrt{a}\tau}{b+\sqrt{a}\tau}} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{a}\tau}{1-k^2b+(1-k^2)\sqrt{a}\tau}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{a}\tau}}{(1+\sqrt{a}\tau)^2+(1-b)^2\tau^2} \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{1.21}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue à (1.20) et (1.21), on conclut que

$$\begin{aligned} \lim_{a\to 0, b\to b_0} \sqrt{a}\tilde{\Pi}(a,b,k) &= \frac{\sqrt{b_0}}{2\sqrt{(1-b_0)(1-k^2b_0)}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+b_0^2\tau^2} \mathrm{d}\tau + \frac{\sqrt{1-b_0}}{2\sqrt{b_0(1-k^2b_0)}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1-b_0)^2\tau^2} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{b_0(1-b_0)(1-k^2b_0)}}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

$\square$

Lemme 1.1.8. *Supposons que* $a>0$, $b, b_0 \in (0,1)$ *et* $k \in (0,1)$. *On pose*

$$\tilde{J}(a,b,k) := \sqrt{a}\tilde{\Pi}(a,b,k) - \frac{\sqrt{a}}{a+(1-b)^2}K(k).$$

Alors,

$$\lim_{a\to 0, b\to b_0, k\to 1} \tilde{J}(a,b,k) = \frac{\pi}{2\sqrt{b_0}(1-b_0)}.$$

Démonstration.

Soient les fonctions $I_i(a,b,k)(i=1,2)$ définies dans le Lemme 1.1.7, et soient les fonctions $K_i(a,b,k)$ $(i=1;2)$ données par

$$K_1(a,b,k) = \frac{1}{a+(1-b)^2}\int_0^{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\mathrm{d}s,$$

$$K_2(a,b,k) = \frac{1}{a+(1-b)^2}\int_{\sqrt{b}}^1 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\mathrm{d}s.$$

Le même raisonnement suivi dans la démonstration du Lemme 1.1.7, conduit à

$$K_1(a,b,k) = \frac{\sqrt{ab}}{2(a+(1-b)^2)}\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1+\sqrt{a}\tau}{1-b+\sqrt{a}\tau}}.\sqrt{\frac{1+\sqrt{a}\tau}{1-k^2b+\sqrt{a}\tau}}.\frac{\sqrt{a}}{(1+\sqrt{a}\tau)^{3/2}}\mathrm{d}\tau,$$

et

$$K_2(a,b,k) = \frac{\sqrt{1-b}}{2}\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1+\sqrt{a}\tau}{b+\sqrt{a}\tau}}.\sqrt{\frac{1}{1-k^2b+(1-k^2)\sqrt{a}\tau}}.\frac{a}{(a+(1-b)^2)(1+\sqrt{a}\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{a\to 0, b\to b_0, k\to 1} I_1(a,b,k) = \frac{\pi}{4\sqrt{b_0}(1-b_0)}.$$

De plus, il résulte de l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{(1+\sqrt{a}\tau)^{3/2}}\mathrm{d}\tau = 2,$$

que

$$\lim_{a\to 0, b\to b_0, k\to 1} K_1(a,b,k) = 0.$$

D'autre part, l'application du théorème de convergence dominée à la fonction

$$I_2(a,b,k)-K_2(a,b,k)=\frac{\sqrt{1-b}}{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{1+\sqrt{a}\tau}{b+\sqrt{a}\tau}}.\sqrt{\frac{1}{1-k^2b+(1-k^2)\sqrt{a}\tau}}$$
$$.\frac{(1-b)^2(1+2\sqrt{a}\tau)}{(a+(1-b)^2)(1+\sqrt{a}\tau)[(1+\sqrt{a}\tau)^2+(1-b)^2\tau^2]}\mathrm{d}\tau,$$

donne

$$\lim_{a\to 0,b\to b_0,k\to 1}(I_2(a,b,k)-K_2(a,b,k))=\frac{\pi}{4\sqrt{b_0}(1-b_0)}.$$

On conclut alors,

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0,b\to b_0,k\to 1}\tilde{J}(a,b,k)&=\lim_{a\to 0,b\to b_0,k\to 1}I_1(a,b,k)-\lim_{a\to 0,b\to b_0,k\to 1}K_1(a,b,k)\\&+\lim_{a\to 0,b\to b_0,k\to 1}(I_2(a,b,k)-K_2(a,b,k)\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{b_0}(1-b_0)}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

1.2 Fonction de Jacobi sn

Dans cette section, on va donner la définition de la fonction de Jacobi sn. Les fonctions de Jacobi sont des fonctions elliptiques du second ordre qui ont deux pôles simples dans le parallélogramme des périodes. Ces fonctions interviennent souvent lors de la résolution de problèmes pratiques.(voir [20], p. 18, [1], Ch.5, §25., p. 65)

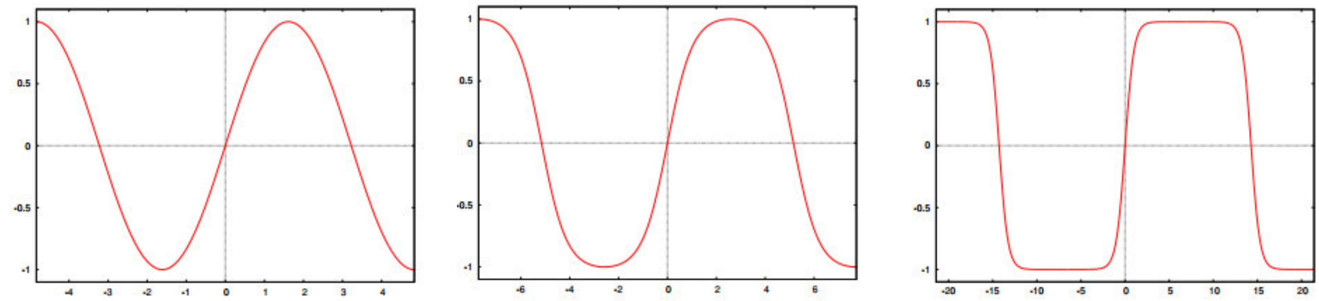
Considérons l'intégrale elliptique de la forme

$$t=\int_0^s\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(1-r^2)(1-k^2r^2)}},\quad 0\leq k<1.$$

Les changements des variables $s=\sin\varphi$ et $r=\sin\psi$ ramène cette intégrale à la forme

$$t=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

On envisage tout d'abord le cas où $k\neq 0$. La fonction $t(\varphi)$ définie par cette intégrale



$k = 0.1$ $\qquad$ $k = 0.9$ $\qquad$ $k = 0.99999$

FIGURE 1.1 – Tracés de sn pour différentes valeurs de k.

est strictement croissante et dérivable. Elle possède donc un inverse, qu'on appelle amplitude de t et qu'on note

$$\varphi = \mathrm{am}t = \mathrm{am}(t;k).$$

Notons aussi que si $k = 0$, alors

$$t = \int_0^s \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(1-r^2)}} = \arcsin s,$$

d'où $s = \sin t$. Pour $k \neq 0$, on note par analogie la fonction inverse de l'intégrale en question par

$$s = \mathrm{sn}t = \mathrm{sn}(t;k),$$

que l'on nomme fonction elliptique de Jacobi (Lire s, n, t en détachant les lettres). Le nombre k est appelé module de la fonction. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le module k, on écrit tout simplement $\mathrm{sn}t$ au lieu de $\mathrm{sn}(t;k)$.

Proposition 1.1. *On a*

(**i**) $\mathrm{sn}(0) = 0$,

(**ii**) *Quand* $k = 0$, $\mathrm{sn}(t;0) = \sin t$ *et lorsque* $k = 1$, $\mathrm{sn}(t;1) = \tanh t$,

(**iii**) $\mathrm{sn}(K(k)) = 1$.

1.3 Problème de Sturm Liouville

On va d'abord décrire le problème de Sturm-Liouville.

Définition

L'équation de Sturm-Liouville est l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+(q(x)+\lambda p(x))y=0 \quad \text{ou} \quad x\in[a,b]. \tag{1.22}$$

Ici $p(x), q(x), r(x)$ sont des fonctions données à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a,b]$, $r(x)\not\equiv 0$, $y=y(x)$ est une fonction à déterminer, λ est une constante quelconque à déterminer aussi. Bien que l'équation de Sturm-Liouville ait une forme spéciale, beaucoup d'équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 sont équivalentes à une équation de Sturm-Liouville (voir [2], Ch.2, p. 41, [25], Ch.11, p. 139).

Un problème de Sturm-Liouville est une équation de Sturm-Liouville du type (1.22) avec en plus des conditions aux extrémités de l'intervalle $[a,b]$ de la forme

$$(\star)\begin{cases}(a)\ k_1y(a)+k_2y'(a)=0 \quad \text{ou } k_1,k_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (k_1,k_2)\neq(0,0) \text{ et}\\ (b)\ l_1y(b)+l_2y'(b)=0 \quad \text{ou } l_1,l_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (l_1,l_2)\neq(0,0).\end{cases}$$

Ici k_1, k_2, l_1 et l_2 sont des nombres réels donnés et λ est un paramètre quelconque.

Une solution d'un problème de Sturm-Liouville est une fonction qui satisfait à la fois l'équation de Sturm-Liouville et les conditions $(\star)$. La fonction triviale $y\equiv 0$ est clairement une solution pour tout problème de Sturm-Liouville. Les solutions $y\not\equiv 0$ (si elles existent) sont dites *fonctions caractéristiques ou encore fonctions propres* du problème et, dans ce cas, la valeur λ pour laquelle une telle solution existe est *la valeur propre ou caractéristique* de cette solution. Ces notions sont les mêmes que celles de l'algèbre linéaire. Si $p(x)\neq 0$ pour tout $x\in[a,b]$, alors on peut considérer l'opérateur linéaire

$$y\mapsto -\frac{1}{p(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y\right]=L(y)$$

défini sur l'espace vectoriel approprié de fonctions. Dans ce cadre, une fonction caractéristique du problème de Sturm-Liouville et sa valeur propre correspondante sont respectivement un vecteur propre de L et la valeur propre associée à ce vecteur propre.

Propriétés des valeurs propres

Proposition 1.2. *(voir [20], Theorem 2.14, p. 58) Soit le problème de Sturm-Liouville (1.22) sur l'intervalle $[a,b]$ avec comme conditions aux extrémités $(\star)$. Supposons que les fonctions $p(x), q(x), r(x)$ et $r'(x)$ sont à valeurs réelles et continues sur l'intervalle $[a,b]$. Si $p(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$ $($ou encore $p(x) < 0$ pour tout $x \in [a,b])$, alors toutes les valeurs propres du problème sont réelles.*

On dit d'un problème de Sturm-Liouville (1.22) sur l'intervalle $[a,b]$, avec comme conditions aux extrémités $(\star)$, qu'il est *régulier* si les fonctions $p(x), q(x), r(x)$ sont à valeurs réelles et continues sur $[a,b]$, $p(x) > 0$ et $r(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

Théorème 1.3.1. *Quand le problème de Sturm-Liouville est régulier, alors*

a) *Toutes les valeurs propres du problème sont des nombres réels (voir [25], Lemma 1, p. 140).*

b) *Il existe un nombre infini de valeurs propres : $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$.*
Il existe une plus petite valeur propre.
On a aussi $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ (voir [25], Theorem 3, p. 141).

c) *Chaque espace propre correspondant à la valeur propre λ_n est de dimension 1 sur $\mathbb{R}$. De plus, chaque fonction caractéristique pour la valeur propre λ_n a exactement $(n-1)$ zéros dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Ici λ_n est la n-ième valeur propre. (voir [38], §27, p. 269)*

1.4 Quelques remarques sur le spectre de Weyl

En 1909, H. Weyl a étudié le spectre d'un opérateur, contenant une perturbation compacte $T+K$, dans les espaces de Hilbert et a montré que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre $\sigma(T+K)$ pour tout opérateur compact K quand λ n'est pas un point isolé à multiplicité finie dans $\sigma(T)$. Aujourd'hui, ce résultat classique peut être énoncé en disant que les points spectraux d'un opérateur hermitien T qui n'appartiennent pas au spectre de Weyl (voir définition ci-dessous) sont précisément les valeurs à multiplicité finie qui ne sont pas des points isolées du spectre.

Définition et notations

Dans cette section, on présente une caractérisation du spectre essentiel des opérateurs linéaires fermés à domaine dense dans un espace de Banach quelconque.

Soit X un espace de Banach. On désigne par $\mathscr{L}(X)$ (resp. $\mathscr{C}(X)$) l'espace des opérateurs linéaires bornés (resp. non bornés, fermés à domaines denses) sur X. $A \in \mathscr{C}(X)$ est dit de Fredholm si $R(A)$ est fermée et les deux quantités

$$\alpha(A) := \dim[N(A)] \quad \text{et} \quad \beta(A) := \operatorname{codim}[R(A)],$$

sont finies, où $N(A)$ (resp. $R(A)$) désigne le noyau (resp. l'image) de l'opérateur A. On note par $\Phi(X)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm sur X. Le nombre $i(A) := \alpha(A)-\beta(A)$ est appelé l'indice de A. Enfin, par $\rho(A)$ (resp. $\sigma(A)$) on désigne l'ensemble résolvant (resp. le spectre) de l'opérateur A.

Le spectre essentiel de A défini par

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (A-\lambda I) \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm }\}.$$

On dit que A est un opérateur de Weyl s'il est un opérateur de Fredholm avec $i(A)=0$ et le spectre de Weyl de A, noté $\sigma_w(A)$, est

$$\sigma_w(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (A-\lambda I) \text{ n'est pas un opérateur de Weyl }\},$$

et on note les points isolés dans $\sigma(A)$ par $\pi_{00}(A)$,

$$\pi_{00}(A) := \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(A) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}$$

où iso$A$ est l'ensemble de tous les points isolés de $A \in \mathbb{C}$

Théorème 1.4.1. *(voir [24], Theorem 1.3, p. 163). Soient A et B deux opérateurs de Fredholm. Alors, $AB \in \Phi(X)$ et $i(AB) = i(A) + i(B)$.*

Définition 1.4.2. *Soit A un élément de $\mathscr{C}(X)$. i.e, $A : D(A) \subsetneqq X \to X$ a domaine dense dans X. On appelle spectre essentiel de A la partie du plan complexe définie par*

$$\sigma_{ess}(A) = \bigcap_{S \in \mathscr{K}(X)} \sigma(A+S),$$

où $\mathscr{K}(X)$ désigne l'ensemble des opérateurs compacts sur X.

Remarque 1.4.1. *Le spectre essentiel d'un opérateur linéaire est stable par les opérateurs compacts, i.e., $\sigma_{ess}(A+K) = \sigma_{ess}(A)$ pour $K \in \mathscr{K}(X)$.*

Théorème 1.4.3. *(voir [24], Theoreme 5.4, p. 180). Soit A un élément de $\mathscr{C}(X)$. Alors $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$ si et seulement si $\lambda \in \Phi_A$ et $i(\lambda - A) = 0$.*

Définition 1.4.4. *Un opérateur $B \in \mathscr{L}(X)$ est dit strictement singulier si sa restriction à tout sous-espace de X de dimension infinie n'est pas un isomorphisme.*

Le spectre essentiel dans les espaces L^p

On désigne par X^p l'ensemble $L^p(D \times V)$, où D et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty)$. Soit K un opérateur linéaire fermé borné sur X^p.

Définition 1.4.5. *L'opérateur K, défini sur X^p, est dit régulier sur X^p si sa restriction à l'espace $L^p(V)$ est compacte.*

On désigne par $\mathscr{R}(X^p)$ l'ensemble des opérateurs réguliers sur X^p.

Théorème 1.4.6. *(voir [24], Theorem 1 (ii)). Soient A et B deux opérateurs de $\mathscr{C}(X^p)$. s'il existe $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ tel que $(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1} \in \mathscr{R}(X^p)$, alors*

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B).$$