

Introduction générale

L'équation d'Allen-Cahn est un modèle mathématique simple pour certains procédés de séparation de phases. Elle sert également comme exemple type pour les équation semi-linéaires paraboliques. La présence d'un petit paramètre qui définit l'épaisseur des interfaces séparant les différentes phases rend difficile l'analyse des problèmes posés. (voir Fig. 1.).

On cherche une fonction $u : (0, 1) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ qui résout

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \varepsilon^2 u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)) & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (1)$$

Le paramètre ε est une constante positive. Le terme de réaction $f(u) = F'(u)$ avec $F(u) = \int_0^u f(s) ds$ étant donné, on suppose $F(\pm 1) = 0$ (voir Fig1). Pour plus de détails sur les aspects de modélisation, les propriétés analytiques de l'équation d'Allen-Cahn et d'autres équations du champ de phases on renvoie le lecteur à l'ouvrage [12] et aux articles [3, 9, 21].

Ce problème est connu comme étant le modèle le plus simple qui décrit la transition de phases des matériaux; les deux valeurs ± 1 et 0 représentent respectivement deux états stables et un état instable.

La théorie dynamique concernant (1) a été largement étudiée depuis les années 70. On sait déjà que toute solution de (1) converge vers une solution (stationnaire) de

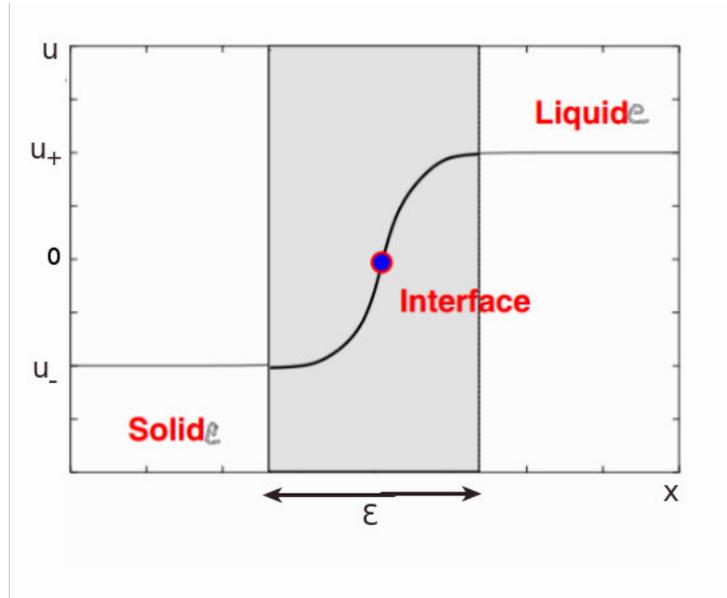


FIGURE 1 – Dans le contexte de la modélisation de l'interface diffuse la variable phase u varie en douceur d'une valeur fixe dans une phase à une autre valeur fixe dans l'autre phase. Ici $u = -1$ est choisie pour représenter la phase solide, $u = 1$ la phase liquide.

problème (3) quand $t \rightarrow +\infty$ suivant

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x,t) + f(u(x,t)) = 0 & x \in (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(moyennant certaines hypothèses sur les espaces fonctionnels). Par ailleurs, on note que l'ensemble des solutions de (2) a une riche structure (qui dépend du paramètre ε) assez variée (voir par exemple, Chafee-Infante [8] et Henry [16]).

L'équation d'Allen-Cahn a été initialement présentée par Samuel Allen et John Cahn (1928-2016) dans [4] pour décrire le mouvement d'opposition de phases dans les solides cristallins. Dans ce contexte, la solution u fait référence à la concentration pour l'un des deux composants de l'alliage métallique. La condition aux limites homogènes implique qu'aucun de ces mélanges ne peut passer à travers les murs. L'équation d'Allen-Cahn a été largement utilisée pour modéliser plusieurs phénomènes dans la nature. En particulier, elle est devenue un modèle de base pour l'interface de l'équation de diffusion. Par conséquent, il est important de concevoir des schémas numériques efficaces relatifs à l'équation d'Allen-Cahn.

L'énergie libre totale $E(u)$ est définie par

$$E(u) = \int \left(\frac{\varepsilon^2}{2} u_x^2 + F(u) \right) dx.$$

Il est connu que la solution $u(x,t)$ de l'équation d'Allen-Cahn possède la propriété affirmant que l'énergie libre totale $E(u)$ diminue avec le temps (voir [29]), i.e.

On considère la fonction $G : u \mapsto \int F(u) dx$. En dérivant G , on obtient

$$\begin{aligned} G'(u)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(u+th) - G(u)}{t} = \int \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+th) - F(u)}{t} dx \\ &= \int F'(u) h dx = \langle F'(u), h \rangle. \end{aligned}$$

On pourra écrire

$$G'(u) : h \mapsto \langle F'(u), h \rangle,$$

autrement dit

$$G'(u) = \frac{d}{du} \int F(u) dx = F'(u).$$

En outre, si $F(u) = \frac{1}{2}u^2$, on a

$$F'_x(u) = F'(u).u_x = u_x u_{xx}$$

alors $F'(u) = u_{xx}$. Donc

$$\frac{d}{du} \int \frac{1}{2} u_x^2 dx = u_{xx}.$$

Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{\partial}{\partial u} E(u) = -\frac{\partial}{\partial u} \left[\int \frac{\varepsilon^2}{2} u_x^2 dx + \int F(u) dx \right] \\ &= -\varepsilon^2 u_{xx} - F'(u). \end{aligned}$$

Cela donne l'équation d'Allen-Cahn

$$u_t = -\varepsilon^2 u_{xx} - F'(u).$$

Par ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u) = \frac{\partial E(u)}{\partial u} \cdot u_t = -u_t^2 \leq 0.$$

Par conséquent, l'énergie totale est décroissante. La conception de schémas numériques qui satisfont la propriété de décroissance de l'énergie au niveau discret a été largement étudiée dans le passé. Il y a eu sur ce sujet de nombreux travaux [5, 10, 13, 26, 41].

Dans ce mémoire, on considère le problème aux limites non linéaire stationnaire d'Allen-Cahn suivant

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0 & \text{dans } (0, 1); \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Le problème aux valeurs propres linéarisé associé à u est

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u(x))\varphi(x) + \lambda \varphi(x) = 0 & \text{dans } (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

On suppose que la fonction f est impaire, assez régulière et possède une *non-linéarité bistable équilibrée* : f admet uniquement trois zéros $u_-, 0, u_+$ tels que $u_- < 0 < u_+$

$$f_u(0) > 0, \quad f_u(u_{\pm}) < 0, \quad F(u_+) = F(u_-). \quad (5)$$

sachant que $F(u) := \int_0^u f(s) ds$.

Comme f est impaire et $f(u_-) = f(u_+) = 0$ alors $u_+ = -u_-$ car $f(u_-) = 0$ et u_+ est la seule racine positive.

En d'autres termes, F est supposée être un double puits potentiel avec la même profondeur (voir Fig.2.). Pour tout $\varepsilon > 0$, (3) admet deux solutions triviales stables $u = u_{\pm}$ et une solution instable $u = 0$.

L'exemple type de f est $f(u) = u - u^3$ (avec $u_+ = -u_- = 1$). Il y a aussi $f(u) = \sin u$ (avec $u_+ = -u_- = \pi$).

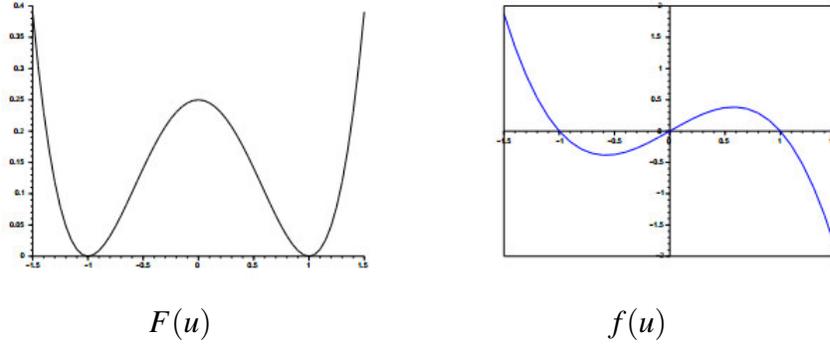


FIGURE 2 – Double puits potentiel avec la même profondeur $F(u)$ et sa dérivée $f(u)$.

Depuis les travaux pionniers de Chafee et Infante [8], les propriétés des solutions de (4) ont été largement étudiées par de nombreux auteurs (voir par exemple, Henry [16], Smoller-Wasserman [28]).

L'ensemble des solutions de (1) a des propriétés de bifurcation assez riches : Quand ε est assez petit, le problème (3) admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, deux solutions dites " n -mode solution" $u_{n,\varepsilon}$ et $-u_{n,\varepsilon}$ (car si u est solution de (1) alors $-u$ est aussi solution vu que f est impaire). Une propriété caractéristique de la solution $u_{n,\varepsilon}$ est qu'elle a exactement n zéros $\{z_l\}_{l=1,\dots,n}$ et vérifie $u_{n,\varepsilon}(0) > 0$.

Le but de ce mémoire est de donner des informations précises sur les valeurs propres et les fonctions propres de (4) dans le cas particulier où

$$f(u) = u - u^3.$$

Cette fonction est l'exemple type de la non-linéarité bistable équilibrée (voir §2.2, Résultats Principaux, p. 33-34). Il convient de noter que toute solution non triviale de (4) peut être exprimée explicitement à l'aide de la fonction elliptique de Jacobi.

On va donner l'expression de toutes les valeurs propres et les fonctions propres de (4) (voir Shoji Yotsutani et Tohru Wakasa [35]). Supposons que $u(x)$ est une n -mode solution de (3). À partir de (4), on exhibera une équation de représentation, i.e, une équation différentielle linéaire dont la variable indépendante est $u = u(x)$ qui ne dépend pas de n et ε .

Ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : On donne des définitions et des résultats fondamentaux relatifs aux

intégrales elliptiques complètes.

Chapitre 2 : On linéarise l'équation d'Allen-Cahn en donnant les résultats fondamentaux concernant le comportement asymptotique des valeurs propres.

Chapitre 3 : On introduira l'équation de représentation pour résoudre l'équation suivante

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi(x) + \lambda \varphi(x) = 0 & x \in (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Chapitre 4 : On étudiera les éléments propres de (6).

Chapitre 5 : Démonstration des théorèmes principaux à l'aide d'une caractérisation des valeurs propres.

Chapitre 6 : Représentation des fonctions propres dans le cas où $f(u) = u - u^3$.

Chapitre 7 : Démonstration des principales propositions à l'aide de la théorie des intégrales elliptiques [22, 23, 40, 37].