Comportement asymptotique des valeurs propres liées à l'équation d'Allen-Cahn

Soutenance de Magister en Mathématiques
Par : Karima MORSLI
Directeur de mémoire : Boubaker-Khaled SADALLAH

École Normale Supérieure
Kouba, Alger

14 octobre 2017

Plan de l'exposé

Introduction

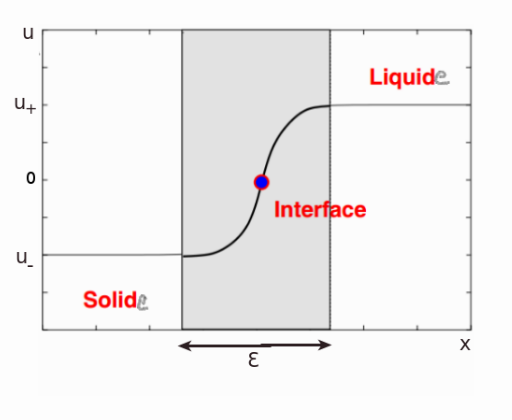
Introduction

Introduction

Samuel Allen et John Cahn en 1979 [1] pour décrire l'évolution d'un matériau polycristallin, ont proposé l'équation de réaction-diffusion

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u) \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty),$$

La présence d'un petit paramètre ε qui définit l'épaisseur des interfaces séparant les différentes phases rend difficile l'analyse des problèmes posés.


u
u+
0
u-
Liquide
Interface
Solide
x
ε

Chapitre 1 : Préliminaires

Chapitre 1 : Préliminaires

Pour traiter l'équation d'Allen-Cahn on a besoin des intégrales elliptiques.

Définition :[Intégrale elliptique complète]

Soient $k \in [0,1)$ et $\nu \in \mathbb{C}$. Les trois intégrales elliptiques complètes sont définies respectivement par :

$$K(k) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\mathrm{d}s, \tag{1}$$

$$E(k) := \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}}\mathrm{d}s, \tag{2}$$

et

$$\Pi(\nu,k) := \int_0^1 \frac{1}{(1+\nu s^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\mathrm{d}s. \tag{3}$$

Chapitre 1 : Préliminaires

Définition : [Fonction de Jacobi sn]

La fonction elliptique de Jacobi : $\mathbf{sn}t$ s'obtient par l'inversion de l'intégrale :

$$t = \int_0^s \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(1-r^2)(1-k^2r^2)}}, \quad 0 \leq k < 1.$$

D'où $s = \mathbf{sn}t = \mathbf{sn}(t,k)$.

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

✍ Considérons le problème aux limites non linéaire stationnaire d'Allen-Cahn suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0 \quad x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

où $\varepsilon > 0$ (petit) et f est assez régulière. On note $F(u) := \int_0^u f(s)ds$,

et on suppose que f est impaire et possède une non-linéarité bistable équilibrée. i.e. ayant uniquement trois zéros $u_- < 0 < u_+$ tels que

$$f_u(0) > 0, \qquad f_u(u_\pm) < 0. \tag{5}$$

Cela implique que $F(u_-) = F(u_+)$.

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

✍ Considérons le problème aux limites non linéaire stationnaire d'Allen-Cahn suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0 \quad x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

où $\varepsilon > 0$ (petit) et f est assez régulière. On note $F(u) := \int_0^u f(s)ds$,

et on suppose que f est impaire et possède une non-linéarité bistable équilibrée. i.e. ayant uniquement trois zéros $u_- < 0 < u_+$ tels que

$$f_u(0) > 0, \qquad f_u(u_\pm) < 0. \tag{5}$$

Cela implique que $F(u_-) = F(u_+)$.

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

✍ Considérons le problème aux limites non linéaire stationnaire d'Allen-Cahn suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0 \quad x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

où $\varepsilon > 0$ (petit) et f est assez régulière. On note $F(u) := \int_0^u f(s)ds$,

et on suppose que f est impaire et possède une non-linéarité bistable équilibrée. i.e. ayant uniquement trois zéros $u_- < 0 < u_+$ tels que

$$f_u(0) > 0, \qquad f_u(u_\pm) < 0. \tag{5}$$

Cela implique que $F(u_-) = F(u_+)$.

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

☞ Pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, (4) admet deux n-mode solutions $\pm u_{n,\varepsilon}(x)$ lorsque ε est petit.

✍ Le problème aux valeurs propres linéarisé de (4) associé à $u_{n,\varepsilon}$ est

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \quad \text{dans} \quad (0,1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$\lambda_j^{n,\varepsilon}$ et $\varphi_j^{n,\varepsilon}$ désignent respectivement la valeur propre et fonction propre de (6).

Wakasa et Yotsutani en 2015 ont ramené le problème (6) (grâce à un changement d'échelle et à des considérations physiques) à l'étude du problème

$$\begin{cases} \Phi_{zz}(z) + f_u(U(z))\Phi(z) + \Lambda\Phi(z) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}, \\ \Phi \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{7}$$

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

☞ Pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, (4) admet deux n-mode solutions $\pm u_{n,\varepsilon}(x)$ lorsque ε est petit.
✍ Le problème aux valeurs propres linéarisé de (4) associé à $u_{n,\varepsilon}$ est

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \quad \text{dans} \quad (0,1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$\lambda_j^{n,\varepsilon}$ et $\varphi_j^{n,\varepsilon}$ désignent respectivement la valeur propre et fonction propre de (6).
Wakasa et Yotsutani en 2015 ont ramené le problème (6) (grâce à un changement d'échelle et à des considérations physiques) à l'étude du problème

$$\begin{cases} \Phi_{zz}(z) + f_u(U(z))\Phi(z) + \Lambda\Phi(z) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}, \\ \Phi \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{7}$$

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

☞ Pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, (4) admet deux n-mode solutions $\pm u_{n,\varepsilon}(x)$ lorsque ε est petit.

✍ Le problème aux valeurs propres linéarisé de (4) associé à $u_{n,\varepsilon}$ est

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \quad \text{dans} \quad (0,1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$\lambda_j^{n,\varepsilon}$ et $\varphi_j^{n,\varepsilon}$ désignent respectivement la valeur propre et fonction propre de (6).

Wakasa et Yotsutani en 2015 ont ramené le problème (6) (grâce à un changement d'échelle et à des considérations physiques) à l'étude du problème

$$\begin{cases} \Phi_{zz}(z) + f_u(U(z))\Phi(z) + \Lambda\Phi(z) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}, \\ \Phi \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{7}$$

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

Ils ont proposé la conjecture suivante relativement aux éléments propres de (6) pour une fonction f assez générale :

Conjecture de Wakasa et Yotsutani en 2015-2016

Toutes les valeurs propres et fonctions propres de (6) sont classées en plusieurs groupes en fonction de la structure de (7) et il y a une propriété asymptotique universelle dans chacun des groupes.

Cette conjecture a été résolue par ces auteurs dans le cas $f(u) = u - u^3$ en 2015-2016.

Les principaux résultats de ces travaux sont :

Chapitre 2 : Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn

Ils ont proposé la conjecture suivante relativement aux éléments propres de (6) pour une fonction f assez générale :

Conjecture de Wakasa et Yotsutani en 2015-2016

Toutes les valeurs propres et fonctions propres de (6) sont classées en plusieurs groupes en fonction de la structure de (7) et il y a une propriété asymptotique universelle dans chacun des groupes.

Cette conjecture a été résolue par ces auteurs dans le cas $f(u) = u - u^3$ en 2015-2016.
Les principaux résultats de ces travaux sont :

Théorème 1

Supposons que $f(u) = u - u^3$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$, *dans* (6) *on obtient*

1. $\lambda_0^{n,\varepsilon} = -96 \exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}) + o(\exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}))$,
2. $\lambda_n^{n,\varepsilon} = \frac{3}{2} - 12 \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}n\varepsilon}) + o(\exp(-\frac{1}{\sqrt{2}n\varepsilon}))$,
3. $\lambda_{2n}^{n,\varepsilon} = 2 + 96 \exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}) + o(\exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}))$.

Théorème 2

Supposons que $f(u) = u - u^3$. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *fixé et* $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$, *dans* (6) *on obtient*

1. *Pour* $0 < j < n$,

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = -96 \cos^2 \frac{j\pi}{2n} . \exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon}) + o(\exp(-\frac{\sqrt{2}}{n\varepsilon})),$$

2. *Pour* $n < j < 2n$,

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = \frac{3}{2} - 12 \cos \frac{(j-n)\pi}{n} \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}n\varepsilon}) + o(\exp(-\frac{1}{\sqrt{2}n\varepsilon})),$$

3. *Pour* $j > 2n$,

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = 2 + (j-2n)^2 \pi^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Chapitre :3
L'équation de représentation

Chapitre 3 :L'équation de représentation

Soit $u(x) = u_{n,\varepsilon}(x)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. et $\alpha = \alpha_{n,\varepsilon} = u_{n,\varepsilon}(0)$.

- On remplace φ par $\mathcal{P}(u(x))$, $\mathcal{P} \in C^2([u_-, u_+])$. Grâce à (4) l'équation (6) devient

$$2(F(\alpha)-F(u))\mathcal{P}_{uu}(u)-f(u)\mathcal{P}_u(u)+(f_u(u)+\lambda)\mathcal{P}(u) = 0,\ u \in (-\alpha, \alpha). \quad (8)$$

On dit que (8) est l'équation de représentation de deuxième ordre de (6).

Chapitre 3 :L'équation de représentation

Soit $u(x) = u_{n,\varepsilon}(x)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. et $\alpha = \alpha_{n,\varepsilon} = u_{n,\varepsilon}(0)$.

- On remplace φ par $\mathcal{P}(u(x))$, $\mathcal{P} \in C^2([u_-, u_+])$. Grâce à (4) l'équation (6) devient

$$2(F(\alpha)-F(u))\mathcal{P}_{uu}(u)-f(u)\mathcal{P}_u(u)+(f_u(u)+\lambda)\mathcal{P}(u) = 0,\ u \in (-\alpha, \alpha). \tag{8}$$

On dit que (8) est l'équation de représentation de deuxième ordre de (6).

Chapitre 3 :L'équation de représentation

✍ Soit $u(x) = u_{n,\varepsilon}(x)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. et $\alpha = \alpha_{n,\varepsilon} = u_{n,\varepsilon}(0)$.

- On remplace φ par $\mathcal{P}(u(x))$, $\mathcal{P} \in C^2([u_-, u_+])$. Grâce à (4) l'équation (6) devient

$$2(F(\alpha)-F(u))\mathcal{P}_{uu}(u)-f(u)\mathcal{P}_u(u)+(f_u(u)+\lambda)\mathcal{P}(u) = 0,\ u \in (-\alpha, \alpha). \tag{8}$$

On dit que (8) est l'équation de représentation de deuxième ordre de (6).

Afin de donner une classe plus large de fonctions propres liées à l'équation (6), on utilise

- l'équation de représentation du troisième ordre

$$2(F(\alpha)-F(u))\mathcal{Q}_{uuu}(u)-3f(u).\mathcal{Q}_{uu}(u)+(3f_u(u)+4\lambda)\mathcal{Q}_u(u)$$
$$+2f_{uu}(u)\mathcal{Q}(u)=0, \quad (9)$$

où $\varphi^2(x)=\mathcal{Q}(u,\lambda;\alpha)$, $\mathcal{Q}\in C^3$. On pose maintenant

$$\rho(\lambda;\alpha):=\frac{\mathcal{Q}(\alpha,\lambda;\alpha)}{2}\left[-f(\alpha)\mathcal{Q}_u(\alpha,\lambda;\alpha)+2(f_u(\alpha)+\lambda)\mathcal{Q}(\alpha,\lambda;\alpha)\right].$$

Afin de donner une classe plus large de fonctions propres liées à l'équation (6), on utilise

- l'équation de représentation du troisième ordre

$$2(F(\alpha) - F(u))\mathcal{Q}_{uuu}(u) - 3f(u).\mathcal{Q}_{uu}(u) + (3f_u(u) + 4\lambda)\mathcal{Q}_u(u) + 2f_{uu}(u)\mathcal{Q}(u) = 0, \quad (9)$$

où $\varphi^2(x) = \mathcal{Q}(u, \lambda; \alpha)$, $\mathcal{Q} \in C^3$. On pose maintenant

$$\rho(\lambda; \alpha) := \frac{\mathcal{Q}(\alpha, \lambda; \alpha)}{2}\left[-f(\alpha)\mathcal{Q}_u(\alpha, \lambda; \alpha) + 2(f_u(\alpha) + \lambda)\mathcal{Q}(\alpha, \lambda; \alpha)\right].$$

Afin de donner une classe plus large de fonctions propres liées à l'équation (6), on utilise

- l'équation de représentation du troisième ordre

$$2(F(\alpha)-F(u))\mathcal{Q}_{uuu}(u)-3f(u).\mathcal{Q}_{uu}(u)+(3f_u(u)+4\lambda)\mathcal{Q}_u(u) + 2f_{uu}(u)\mathcal{Q}(u)=0, \quad (9)$$

où $\varphi^2(x)=\mathcal{Q}(u,\lambda;\alpha)$, $\mathcal{Q}\in C^3$. On pose maintenant

$$\rho(\lambda;\alpha):=\frac{\mathcal{Q}(\alpha,\lambda;\alpha)}{2}\left[-f(\alpha)\mathcal{Q}_u(\alpha,\lambda;\alpha)+2(f_u(\alpha)+\lambda)\mathcal{Q}(\alpha,\lambda;\alpha)\right].$$

Chapitre 3 :L'équation de représentation

Proposition 1

Soit f *une fonction impaire de classe* C^2 *qui satisfait* (5)*. Supposons que* (9) *admet une solution particulière* $\mathcal{Q}(u, \lambda; \alpha_{n,\varepsilon})$ *avec* $\rho(\lambda, \alpha_{n,\varepsilon}) > 0$*. Alors*

$$\varphi(x;\lambda) = \sqrt{|\ \mathcal{Q}(u_{n,\varepsilon}(x), \lambda; \alpha_{n,\varepsilon})\ |}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{\sqrt{\rho(\lambda, \alpha_{n,\varepsilon})}}{|\ \mathcal{Q}(u_{n,\varepsilon}(\xi), \lambda; \alpha_{n,\varepsilon})\ |}d\xi\right),$$

et

$$\tilde{\varphi}(x;\lambda) = \sqrt{|\ \mathcal{Q}(u_{n,\varepsilon}(x), \lambda; \alpha_{n,\varepsilon})\ |}\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{\sqrt{\rho(\lambda, \alpha_{n,\varepsilon})}}{|\ \mathcal{Q}(u_{n,\varepsilon}(\xi), \lambda; \alpha_{n,\varepsilon})\ |}d\xi\right)$$

sont les deux solutions linéairement indépendantes de

$$\varepsilon^2\varphi_{xx}(x) + f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0. \qquad (10)$$

Chapitre 4 :
Expressions des fonctions propres

Chapitre 4 : Expressions des fonctions propres

Soit $\mathcal{A}_0(k) := \sqrt{1+k^2}K(k)$ pour tout $k \in (0,1)$, on a la

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $f(u) = u - u^3$. L'équation (4) admet deux n-mode solutions $\pm u_{n,\varepsilon}(x)$ si et seulement si $\varepsilon \in (0, 1/(n\pi))$. En outre, $u_{n,\varepsilon}$ est donnée par

$$\begin{aligned} u_{n,\varepsilon}(x) &= \sqrt{\frac{2k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\operatorname{sn}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\left(x+\frac{1}{2n}\right), k_{n,\varepsilon}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\operatorname{sn}\left(2nK(k_{n,\varepsilon})\left(x+\frac{1}{2n}\right), k_{n,\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

où $k_{n,\varepsilon}$ est la solution unique de $\mathcal{A}_0(k) = \frac{1}{2n\varepsilon}$, $k \in (0,1)$.

Chapitre 4 : Expressions des fonctions propres

Soit $\mathcal{A}_0(k) := \sqrt{1+k^2}K(k)$ pour tout $k \in (0,1)$, on a la

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $f(u) = u - u^3$. L'équation (4) admet deux n-mode solutions $\pm u_{n,\varepsilon}(x)$ si et seulement si $\varepsilon \in (0, 1/(n\pi))$. En outre, $u_{n,\varepsilon}$ est donnée par

$$\begin{aligned} u_{n,\varepsilon}(x) &= \sqrt{\frac{2k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\mathrm{sn}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\left(x+\frac{1}{2n}\right), k_{n,\varepsilon}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}}\mathrm{sn}\left(2nK(k_{n,\varepsilon})\left(x+\frac{1}{2n}\right), k_{n,\varepsilon}\right), \qquad (11) \end{aligned}$$

où $k_{n,\varepsilon}$ est la solution unique de $\mathcal{A}_0(k) = \frac{1}{2n\varepsilon}$, $k \in (0,1)$.

Chapitre 4 : Expressions des fonctions propres

Théorème 3 (Fonctions propres spéciales)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in (0, 1/(n\pi))$ fixés. On pose $f(u) = u - u^3$. Soient $k_{n,\varepsilon}$ et $u_{n,\varepsilon}$ donnés par la Proposition 2. Alors (6) admet les valeurs propres et fonctions propres suivantes :

$$
\textbf{(i)} \begin{cases} \lambda_0^{n,\varepsilon} = \dfrac{1 + k_{n,\varepsilon}^2 - 2\sqrt{1 - k_{n,\varepsilon}^2 + k_{n,\varepsilon}^4}}{1 + k_{n,\varepsilon}^2}, \\[2ex] \varphi_0^{n,\varepsilon}(x) = 1 - \dfrac{(1 + k_{n,\varepsilon}^2)(1 + k_{n,\varepsilon}^2 - \sqrt{1 - k_{n,\varepsilon}^2 + k_{n,\varepsilon}^4})}{2k_{n,\varepsilon}^2} u_{n,\varepsilon}(x)^2. \end{cases}
$$

Chapitre 4 : Expressions des fonctions propres

$$
\textbf{(ii)} \begin{cases} \lambda_n^{n,\varepsilon} = \dfrac{3k_{n,\varepsilon}^2}{1+k_{n,\varepsilon}^2}, \\[2em] \varphi_n^{n,\varepsilon}(x) = 2u_{n,\varepsilon}(x)\sqrt{\dfrac{2}{1+k_{n,\varepsilon}^2} - u_{n,\varepsilon}(x)^2}. \end{cases}
$$

$$
\textbf{(iii)} \begin{cases} \lambda_{2n}^{n,\varepsilon} = \dfrac{1+k_{n,\varepsilon}^2 + 2\sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4}}{1+k_{n,\varepsilon}^2}, \\[2em] \varphi_{2n}^{n,\varepsilon}(x) = \dfrac{1}{2}[-1 + \dfrac{(1+k_{n,\varepsilon}^2)(1+k_{n,\varepsilon}^2 - \sqrt{1-k_{n,\varepsilon}^2+k_{n,\varepsilon}^4})}{2k_{n,\varepsilon}^2} u_{n,\varepsilon}(x)^2]. \end{cases}
$$

Chapitre 4 : Expressions des fonctions propres

✍ Pour donner les autres expressions des fonctions propres de (6) on utilise la fonction caractéristique $\mathcal{A}_1$ avec $f(u) = u - u^3$ et $k \in (0,1)$:

$$\mathcal{A}_1(k,\mu) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mathcal{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{3}k^2}(\nu_+\Pi(\nu_+,k) - \nu_-\Pi(\nu_-,k)) & \text{si } \mu \in (\mu_-(k), 0), \\ \frac{\sqrt{\mathcal{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{3}k^2}(\nu_-\Pi(\nu_-,k) - \nu_+\Pi(\nu_+,k)) & \text{si } \mu \in (3k^2, 3), \\ \frac{\sqrt{-\mathcal{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{-3}k^2}(\nu_+\Pi(\nu_+,k) - \nu_-\Pi(\nu_-,k)) & \text{si } \mu \in (\mu_+(k), +\infty), \end{cases}$$

où

$$\mathcal{R}(k,\mu) := -\mu(\mu-3)(\mu-3k^2), \tag{12}$$

$$\mu_\pm(k) := 1 + k^2 \pm 2\sqrt{1-k^2+k^4}, \tag{13}$$

$$\nu_\pm(k,\mu) := \frac{3k^2[\mu - 3(1+k^2) \pm \sqrt{-3(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_+(k))}]}{2(\mu-3)(\mu-3k^2)}. \tag{14}$$

Chapitre 4 : Expressions des fonctions propres

Théorème 4 (Fonctions propres générales)

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $\varepsilon \in (0, 1/n\pi))$ *fixés. On pose* $f(u) = u - u^3$*. Soient* $k_{n,\varepsilon}$ *et* $u_{n,\varepsilon}$ *donnés dans la Proposition 2. Supposons que* $j \neq 0, n, 2n$*, et soit* $\mu_j^n(k)$ *la solution unique de* $\mathcal{A}_1(k,\mu) = \dfrac{j\pi}{2n}$*.*
Alors (6) admet les valeurs propres et fonctions propres suivantes :

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = \frac{1}{1+k_{n,\varepsilon}^2}\mu_j^n(k_{n,\varepsilon}) \quad (j \neq 0, n, 2n),$$

et

$$\varphi_j^{n,\varepsilon}(x) = \sqrt{\mid \mathcal{Q}_{k_{n,\varepsilon}}(u_{n,\varepsilon}(x), \mu_j^n(k_{n,\varepsilon})) \mid}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{\sqrt{\rho_{k_{n,\varepsilon}}(\mu_j^n(k_{n,\varepsilon}))}}{\mid \mathcal{Q}_{k_{n,\varepsilon}}(u_{n,\varepsilon}(\xi), \mu_j^n(k_{n,\varepsilon})) \mid}d\xi\right),$$

Chapitre 4 : Expressions des fonctions propres

où

$$\mathcal{Q}_k(u,\mu) := \mathcal{Q}(u, \frac{\mu}{1+k^2}; \frac{2k^2}{1+k^2}) \quad \text{et} \quad \rho_k(\mu) := \rho(\frac{\mu}{1+k^2}; \frac{2k^2}{1+k^2}). \tag{15}$$

Chapitre :5

Démonstration des résultats principaux

Chapitre 5 : Démonstration des résultats principaux

On va donner une idée de démonstration pour le Théorème 1 et le Théorème 2. Pour cela nous utiliserons on particulier les théorèmes 3 et 4, en plus de la Proposition suivante

Proposition 3

Soient $n \in \mathbb{N}$ arbitraire et $k_{n,\varepsilon}$ donné par la Proposition 2. On a

$$1 - k_{n,\varepsilon}^2 = 16 \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}n\varepsilon}\right) + o\left(-\frac{1}{\sqrt{2}n\varepsilon}\right) \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

Chapitre 5 : Démonstration des résultats principaux

On va donner une idée de démonstration pour le Théorème 1 et le Théorème 2. Pour cela nous utiliserons on particulier les théorèmes 3 et 4, en plus de la Proposition suivante

Proposition 3

Soient $n \in \mathbb{N}$ arbitraire et $k_{n,\varepsilon}$ donné par la Proposition 2. On a

$$1 - k_{n,\varepsilon}^2 = 16 \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2} n \varepsilon}\right) + o\left(-\frac{1}{\sqrt{2} n \varepsilon}\right) \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

Idée de la démonstration du Théorème 1 :

1. On utilise le Théorème 3.
2. On pose $h(x) = \lambda_j^{n,\varepsilon}(j = 0, n, 2n)$ et on fait le changement de variable $x = 1 - k_{n,\varepsilon}^2$.
3. On utilise le développement de h (au voisinage de 0) d'ordre 2.
4. En appliquant la Proposition 3 on obtient alors les résultats du théorème 1.

Idée de la démonstration du Théorème 1 :

1. On utilise le Théorème 3.
2. On pose $h(x) = \lambda_j^{n,\varepsilon} (j = 0, n, 2n)$ et on fait le changement de variable $x = 1 - k_{n,\varepsilon}^2$.
3. On utilise le développement de h (au voisinage de 0) d'ordre 2.
4. En appliquant la Proposition 3 on obtient alors les résultats du théorème 1.

Idée de la démonstration du Théorème 1 :

1. On utilise le Théorème 3.
2. On pose $h(x) = \lambda_j^{n,\varepsilon}(j = 0, n, 2n)$ et on fait le changement de variable $x = 1 - k_{n,\varepsilon}^2$.
3. On utilise le développement de h (au voisinage de 0) d'ordre 2.
4. En appliquant la Proposition 3 on obtient alors les résultats du théorème 1.

Idée de la démonstration du Théorème 1 :

1. On utilise le Théorème 3.
2. On pose $h(x) = \lambda_j^{n,\varepsilon} (j = 0, n, 2n)$ et on fait le changement de variable $x = 1 - k_{n,\varepsilon}^2$.
3. On utilise le développement de h (au voisinage de 0) d'ordre 2.
4. En appliquant la Proposition 3 on obtient alors les résultats du théorème 1.

chapitre 5 : Démonstration des résultats principaux

Proposition 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitraire et soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \neq 0, n, 2n$. Soit $\mu_j^n(k)$ donné par le Théorème 4. Quand $k \to 1$, on a

1. *Si $0 < j < n$, alors*
$$\mu_j^n(k) = -\tfrac{3}{4}\cos^2 \frac{j\pi}{2n}.(1-k^2)^2 + o\left((1-k^2)^2\right).$$
2. *Si $n < j < 2n$, alors*
$$\mu_j^n(k) = 3 - 3\cos^2 \frac{(j-n)\pi}{2n}.(1-k^2) + o(1-k^2).$$
3. *Si $j > 2n$, alors*
$$\mu_j^n(k) = 4 + \left(\frac{j-2n}{2n}\right)^2 \pi^2 K(k)^{-2} + o\left(K(k)^{-2}\right).$$

chapitre 5 : Démonstration des résultats principaux

Idée de la démonstration du Théorème 2 :

1. Pour $j \neq 0, n, 2n,$ le Théorème 4 implique
$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = \frac{1}{1+{k^2}_{n,\,\varepsilon}}\mu\left(k_{n,\varepsilon}; \frac{j\pi}{2n}\right).$$
2. On a $\frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}(1-k^2)\right) + o(1-k^2) \quad \text{quand} \quad k \to 1.$
3. En utilisant les Propositions 3 et 4 on obtient les résultats du théorème 2.

chapitre 5 : Démonstration des résultats principaux

Idée de la démonstration du Théorème 2 :

1. Pour $j \neq 0, n, 2n,$ le Théorème 4 implique

$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = \frac{1}{1 + {k^2}_{n,\,\varepsilon}} \mu\left(k_{n,\varepsilon}; \frac{j\pi}{2n}\right).$$

2. On a $\dfrac{1}{1+k^2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}(1-k^2)\right) + o(1-k^2) \quad \text{quand} \quad k \to 1.$

3. En utilisant les Propositions 3 et 4 on obtient les résultats du théorème 2.

chapitre 5 : Démonstration des résultats principaux

Idée de la démonstration du Théorème 2 :

1. Pour $j \neq 0, n, 2n,$ le Théorème 4 implique
$$\lambda_j^{n,\varepsilon} = \frac{1}{1 + {k^2}_{n,\,\varepsilon}} \mu \left(k_{n,\varepsilon}; \frac{j\pi}{2n} \right).$$
2. On a $\dfrac{1}{1+k^2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}(1-k^2)\right) + o(1-k^2) \quad \text{quand} \quad k \to 1.$
3. En utilisant les Propositions 3 et 4 on obtient les résultats du théorème 2.

Perspectives
et
Bibliographique

Perspectives

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter l'équation d'Allen-Cahn. Les études effectuées jusqu'à maintenant ont touché divers aspects relatifs aux propriétés des solutions de l'équation d'Allen-Cahn. On peut voir de nombreux développements à ces études, par exemple :

1. Choix d'autres termes non linéaires dans l'équation d'Allen-Cahn.
2. Étude du cas où les conditions aux limites sont non linéaires.
3. Étude de ce problème avec un autre terme stochastique.
4. Étude des approximations numériques de l'équation d'Allen-Cahn.
5. Étude de ce type de problèmes en utilisant d'autres méthodes.
6. Étude de ce type d'équations dans un espace à plusieurs dimensions.
7. Étude du problème non stationnaire

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) & x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Perspectives

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter l'équation d'Allen-Cahn. Les études effectuées jusqu'à maintenant ont touché divers aspects relatifs aux propriétés des solutions de l'équation d'Allen-Cahn. On peut voir de nombreux développements à ces études, par exemple :

1. Choix d'autres termes non linéaires dans l'équation d'Allen-Cahn.
2. Étude du cas où les conditions aux limites sont non linéaires.
3. Étude de ce problème avec un autre terme stochastique.
4. Étude des approximations numériques de l'équation d'Allen-Cahn.
5. Étude de ce type de problèmes en utilisant d'autres méthodes.
6. Étude de ce type d'équations dans un espace à plusieurs dimensions.
7. Étude du problème non stationnaire

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) \quad x \in (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Perspectives

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter l'équation d'Allen-Cahn. Les études effectuées jusqu'à maintenant ont touché divers aspects relatifs aux propriétés des solutions de l'équation d'Allen-Cahn. On peut voir de nombreux développements à ces études, par exemple :

1. Choix d'autres termes non linéaires dans l'équation d'Allen-Cahn.
2. Étude du cas où les conditions aux limites sont non linéaires.
3. Étude de ce problème avec un autre terme stochastique.
4. Étude des approximations numériques de l'équation d'Allen-Cahn.
5. Étude de ce type de problèmes en utilisant d'autres méthodes.
6. Étude de ce type d'équations dans un espace à plusieurs dimensions.
7. Étude du problème non stationnaire

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) & x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Perspectives

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter l'équation d'Allen-Cahn. Les études effectuées jusqu'à maintenant ont touché divers aspects relatifs aux propriétés des solutions de l'équation d'Allen-Cahn. On peut voir de nombreux développements à ces études, par exemple :

1. Choix d'autres termes non linéaires dans l'équation d'Allen-Cahn.
2. Étude du cas où les conditions aux limites sont non linéaires.
3. Étude de ce problème avec un autre terme stochastique.
4. Étude des approximations numériques de l'équation d'Allen-Cahn.
5. Étude de ce type de problèmes en utilisant d'autres méthodes.
6. Étude de ce type d'équations dans un espace à plusieurs dimensions.
7. Étude du problème non stationnaire

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) & x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Perspectives

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter l'équation d'Allen-Cahn. Les études effectuées jusqu'à maintenant ont touché divers aspects relatifs aux propriétés des solutions de l'équation d'Allen-Cahn. On peut voir de nombreux développements à ces études, par exemple :

1. Choix d'autres termes non linéaires dans l'équation d'Allen-Cahn.
2. Étude du cas où les conditions aux limites sont non linéaires.
3. Étude de ce problème avec un autre terme stochastique.
4. Étude des approximations numériques de l'équation d'Allen-Cahn.
5. Étude de ce type de problèmes en utilisant d'autres méthodes.
6. Étude de ce type d'équations dans un espace à plusieurs dimensions.
7. Étude du problème non stationnaire

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) \quad x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Perspectives

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter l'équation d'Allen-Cahn. Les études effectuées jusqu'à maintenant ont touché divers aspects relatifs aux propriétés des solutions de l'équation d'Allen-Cahn. On peut voir de nombreux développements à ces études, par exemple :

1. Choix d'autres termes non linéaires dans l'équation d'Allen-Cahn.
2. Étude du cas où les conditions aux limites sont non linéaires.
3. Étude de ce problème avec un autre terme stochastique.
4. Étude des approximations numériques de l'équation d'Allen-Cahn.
5. Étude de ce type de problèmes en utilisant d'autres méthodes.
6. Étude de ce type d'équations dans un espace à plusieurs dimensions.
7. Étude du problème non stationnaire

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) & x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Perspectives

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter l'équation d'Allen-Cahn. Les études effectuées jusqu'à maintenant ont touché divers aspects relatifs aux propriétés des solutions de l'équation d'Allen-Cahn. On peut voir de nombreux développements à ces études, par exemple :

1. Choix d'autres termes non linéaires dans l'équation d'Allen-Cahn.
2. Étude du cas où les conditions aux limites sont non linéaires.
3. Étude de ce problème avec un autre terme stochastique.
4. Étude des approximations numériques de l'équation d'Allen-Cahn.
5. Étude de ce type de problèmes en utilisant d'autres méthodes.
6. Étude de ce type d'équations dans un espace à plusieurs dimensions.
7. Étude du problème non stationnaire

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) & x \in (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Perspectives

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter l'équation d'Allen-Cahn. Les études effectuées jusqu'à maintenant ont touché divers aspects relatifs aux propriétés des solutions de l'équation d'Allen-Cahn. On peut voir de nombreux développements à ces études, par exemple :

1. Choix d'autres termes non linéaires dans l'équation d'Allen-Cahn.
2. Étude du cas où les conditions aux limites sont non linéaires.
3. Étude de ce problème avec un autre terme stochastique.
4. Étude des approximations numériques de l'équation d'Allen-Cahn.
5. Étude de ce type de problèmes en utilisant d'autres méthodes.
6. Étude de ce type d'équations dans un espace à plusieurs dimensions.
7. Étude du problème non stationnaire

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) & x \in \ (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Bibliographie I

- **Allen S. M. and Cahn J. W. :** A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening, Acta Metall, 27, 1979,pp. 1085-1095.
- **Brunovský P., Fiedler B. :** Connecting orbits in scalar reaction diffusion equations. II. The complete solution, J. Differential Equations 81 (1),1989,pp. 106–135
- **Carr J., Pego R.L. :** Metastable patterns in solutions of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. 42 (5),1989,pp. 523–576.
- **Chafee N., Infante E.F. :** A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, Appl. Anal. 4, 1974/75, pp.17–37.

Bibliographie II

- **Wakasa T.,Yotsutani S. :** Limiting classification on linearized eigenvalue problem for 1-dimensional Allen–Cahn equation I — asymptotic formulas of eigenvalues, J. Differential Equations 258, 2015, pp. 3960–4006.
- **Wakasa T., Yotsutani S. :** Limiting classifications on linearized eigenvalue problem for 1-dimensional Allen–Cahn equation II—asymptotic profiles of eigenfunctions,J. Differential Equations 261, 2016 pp. 5465–5498 .
- **Whittaker E.T., Watson G.N. :** A course of modern analysis, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions ; with an account of the principal transcendental functions, reprint of the fourth (1927) edition.

Comportement asymptotique des valeurs propres liées à l'équation d'Allen-Cahn

Merci pour votre attention !