Chapitre 7

Démonstration des Propositions 4.2, 4.3 et 5.2

7.1 Propriétés fondamentales de $\nu_{\pm}(k,\mu)$ et $\mathscr{R}(k,\mu)$

En se rappelant les équations (4.2)-(4.6), on remarque que les quantités $\nu_{\pm}(k,\mu)$ sont caractérisées par

$$\begin{cases} \nu_+(k,\mu)+\nu_-(k,\mu) = \dfrac{3k^2(\mu-3(1+k^2))}{(\mu-3)(\mu-3k^2)}, \\ \nu_+(k,\mu)\nu_-(k,\mu) = \dfrac{9k^4}{(\mu-3)(\mu-3k^2)}. \end{cases} \tag{7.1}$$

En fait,ν_+ et ν_- sont les deux racines de

$$(\mu-3)(\mu-3k^2)\nu^2 - 3k^2[\nu-3(1+k^2)]\nu + 9k^4 = 0, \tag{7.2}$$

elles sont réelles si et seulement si

$$(\nu-\nu_-(k))(\nu-\nu_+(k)) \leq 0. \tag{7.3}$$

Donnons quelques propriétés élémentaires de $\nu_{\pm}(k,\mu)$. À partir de (7.2) on déduit

$$(1+\nu_+(k,\mu))(1+\nu_-(k,\mu)) = \frac{\mu}{\mu-3k^2}, \tag{7.4}$$

et

$$(k^2+\nu_+(k,\mu))(k^2+\nu_-(k,\mu)) = \frac{\mu k^4}{\mu-3}. \tag{7.5}$$

De plus, on a le lemme élémentaire suivant qui joue un rôle important dans notre analyse.

Lemme 7.1.1. *Soient* $\nu_{\pm}(k,\mu)$ *définie par* (4.5) *et* $\mathscr{R}(k,\mu)$ *définie par* (4.6)*. Alors pour tous* $k \in (0,1)$ *et* $\mu \neq 3, 3k^2$ *on a*

$$\mathscr{R}(k,\mu)\nu_{\pm}(k,\mu)^3 = 27k^4(1+\nu_{\pm}(k,\mu))(k^2+\nu_{\pm}(k,\mu)).$$

Démonstration. À partir de (7.2) on a

$$\begin{aligned}
(1+\nu_{\pm})(k^2+\nu_{\pm}) &= \nu_{\pm}^2 + (1+k^2)\nu_{\pm} + k^2 \\
&= \frac{3k^2[\mu-3(1+k^2)]\nu_{\pm} - 9k^2}{(\mu-3)(\mu-3k^2)} + (1+k^2)\nu_{\pm} + k^2 \\
&= \frac{\mu[(1+k^2)\mu - 3(1+k^2+k^4)]\nu_{\pm} + \mu k^2[\mu-3(1+k^2)]}{(\mu-3)(\mu-3k^2)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}\nu_{\pm}^3 &= -\mu\nu_{\pm}.(\mu-3)(\mu-3k^2)\nu_{\pm}^2 \\
&= -\mu\nu_{\pm}.[3k^2[\mu-3(1+k^2)]\nu_{\pm} - 9k^4] \\
&= -3k^2\mu[\mu-3(1+k^2)].\frac{3k^2[\mu-3(1+k^2)]\nu_{\pm} - 9k^4}{(\mu-3)(\mu-3k^2)} + 9k^4\mu\nu_{\pm} \\
&= \frac{27k^4\mu}{(\mu-3)(\mu-3k^2)}.[[(1+k^2)\mu - 3(1+k^2+k^4)]\nu_{\pm} + \mu k^2[\mu-3(1+k^2)]].
\end{aligned}$$

La comparaison de ces deux identités achève la démonstration. □

Proposition 7.1. *Soient* $\Sigma_i (i=0,1,2)$ *et* $\nu_{\pm} = \nu_{\pm}(k,\mu)$ *données par* (4.2) *et* (4.5) *respectivement. On a*

(**i**) *Si* $(k,\mu) \in \Sigma_0$*, alors* $-1 < \nu_-(k,\mu) < \nu_+(k,\mu) < -k^2$,

$$\lim_{\mu \to \mu_-(k)} \nu_{\pm}(k,\mu) = \nu_{\pm}(k,\mu_-(k)) \in (-1,-k^2), \tag{7.6}$$

et

$$\lim_{\mu\to 0} \nu_+(k,\mu) = -k^2, \quad \lim_{\mu\to 0} \nu_-(k,\mu) = -1. \tag{7.7}$$

(**ii**) *Si* $(k,\mu)\in\Sigma_1$, *alors* $-1<\nu_+(k,\mu)<-k^2$, $0<\nu_-(k,\mu)$,

$$\lim_{\mu\to 3k^2} \nu_+(k,\mu) = -k^2, \quad \lim_{\mu\to 3k^2} \nu_-(k,\mu) = +\infty, \tag{7.8}$$

et

$$\lim_{\mu\to 3} \nu_+(k,\mu) = -1, \quad \lim_{\mu\to 3} \nu_-(k,\mu) = +\infty. \tag{7.9}$$

(**iii**) *Si* $(k,\mu)\in\Sigma_2$, *alors* $\nu_\pm\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $k\in(0,1)$ arbitraire fixé

(**i**) Supposons $\mu\in(\mu_-(k),0)$. les relations (7.1) et (7.3) impliquent $\mu_-(k,\mu)<\mu_+(k,\mu)<0$. Alors, le Lemme 7.1.1 implique

$$(1+\nu_\pm(k,\mu))(k^2+\nu_\pm(k,\mu)) = \frac{1}{27k^4}\nu_\pm(k,\mu)^3\mathscr{R}(k,\mu)<0.$$

Donc si $\mu\in(\mu_-(k),0)$ on obtient $-1<\nu_-(k,\mu)<\nu_+(k,\mu)<-k^2$ et $-1<\nu_-(k,\mu)=\nu_+(k,\mu)<-k^2$. Par un argument de continuité on trouve (7.6) et (7.7).

(**ii**) Supposons $\mu\in(3k^2,3)$. Par (4.5) et (7.1) on a $\nu_+(k,\mu)<0<\nu_-(k,\mu)$. De la même manière on obtient, à partir de (7.4) et (7.5),

$$(1+\nu_+(k,\mu))(k^2+\nu_-(k,\mu))<0,$$

cela implique $-1<\nu_+(k,\mu)<-k^2$. On peut voir grâce à (4.5) que

$$\nu_\pm(k,\mu) = \frac{6k^2}{\mu-3(1+k^2)\mp\sqrt{-3\mu^2+6(1+k^2)\mu+9(1-k^2)^2}}.$$

D'où (7.8) et (7.9).

(**iii**) Supposons $\mu\in(\mu_+(k),+\infty)$. Dans ce cas le résultat s'obtient à partir de (7.3).

$\square$

7.2 Démonstration de la Proposition 4.2

Dans cette section on prouve la Proposition 4.2. On va appliquer quelques résultats algébriques élémentaires.

Le Lemme 7.1.1, permet d'exprimer $\mathscr{A}_1$ en fonction de k et $\nu_\pm$. Plus précisément, si $(k,\mu)\in\Sigma_0$ on a

$$\mathscr{A}_1(k,\mu)=\sqrt{\frac{(1+\nu_-)(k^2+\nu_-)}{\nu_-}}\Pi(\nu_-,k)-\sqrt{\frac{(1+\nu_+)(k^2+\nu_+)}{\nu_+}}\Pi(\nu_+,k), \tag{7.10}$$

et si $(k,\mu)\in\Sigma_1$,

$$\mathscr{A}_1(k,\mu)=\sqrt{\frac{(1+\nu_-)(k^2+\nu_-)}{\nu_-}}\Pi(\nu_-,k)+\sqrt{\frac{(1+\nu_+)(k^2+\nu_+)}{\nu_+}}\Pi(\nu_+,k). \tag{7.11}$$

En outre, on donne l'expression de $\mathscr{A}_1(k,\mu)$ pour $(k,\mu)\in\Sigma_2$. Soit

$$a(k,\mu)=\frac{(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_-(k))}{12k^4},\quad b(k,\mu)=\frac{3(1+k^2)-\mu}{6k^2}. \tag{7.12}$$

On a

$$\tilde{\mathscr{Q}}_k(s,\mu)=9k^4[a(k,\mu)+(s^2-b(k,\mu))^2].$$

Alors

$$\mathscr{A}_1(k,\mu)=\frac{2\sqrt{-\mathscr{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{3}k^2}.\sqrt{a(k,\mu)}\;\tilde{\Pi}(a(k,\mu),b(k,\mu),k), \tag{7.13}$$

où $\tilde{\Pi}(a,b,k)$ est défini par (1.18). De plus,

$$\lim_{\mu\to\mu_-(k)}a(k,\mu)=0,\qquad \lim_{\mu\to\mu_-(k)}B(k,\mu)=b(k,\mu_+(k))\in(0,1). \tag{7.14}$$

Dans le cas particulier $\mu=\mu_+(k)$, on a

$$\frac{1}{\nu_\pm(k,\mu_+(k))}=-b(k,\mu_+(k)).$$

Par conséquent le Lemme 7.1.1 implique le

Corollaire 7.2. *Soit $k\in(0,1)$. On définit $\mathscr{R}$ et $b(k,\mu)$ par (4.6) et (7.12) respectivement.*

Alors,

$$-\mathscr{R}(k,\mu_+(k)) = 27k^4 b(k,\mu_+(k))(1-b(k,\mu_+(k))(1-k^2 b(k,\mu_+(k)).$$

Démonstration de la Proposition 4.2.

(**i**) Utilisant l'expression (7.10). on obtient $\lim_{\mu\to\mu_-(k)} \mathscr{A}_1(k,\mu) = 0$ grâce (7.6). De plus, le Lemme 1.1.4 et (7.7) donnent

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to 0} \mathscr{A}_1(k,\mu) &= \lim_{\nu_-\to -1} \sqrt{\frac{k^2+\nu_-}{\nu_-}} \lim_{\nu_-\to -1} \sqrt{1+\nu_-}\Pi(\nu_-,k) \\ &\quad - \lim_{\nu_+\to -k^2} \sqrt{\frac{(1+\nu_+)(k^2+\nu_+)}{\nu_+}}\Pi(\nu_+,k) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(**ii**) Utilisant (7.11), on obtient grâce à (7.8) et (7.9)

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to 3k^2} \mathscr{A}_1(k,\mu) &= \lim_{\nu_-\to +\infty} \sqrt{\frac{k^2+\nu_-}{\nu_-}} \lim_{\nu_-\to +\infty} \sqrt{1+\nu_-}\Pi(\nu_-,k) \\ &\quad + \lim_{\nu_+\to -k^2} \sqrt{\frac{(1+\nu_+)(k^2+\nu_+)}{\nu_+}}\Pi(\nu_+,k) \\ &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to 3} \mathscr{A}_1(k,\mu) &= \lim_{\nu_-\to +\infty} \sqrt{\frac{k^2+\nu_-}{\nu_-}} \lim_{\nu_-\to +\infty} \sqrt{1+\nu_-}\Pi(\nu_-,k) \\ &\quad + \lim_{\nu_+\to -1} \sqrt{\frac{k^2+\nu_+}{\nu_+}} \lim_{\nu_+\to -1} \sqrt{1+\nu_+}\Pi(\nu_+,k) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

(**iii**) Posons $b(k,\mu_+(k)) = b_+(k)$. Alors, on applique le Lemme 1.1.7 à (7.13) pour calculer la limite

$$\lim_{\mu\to\mu_+(k)} \mathscr{A}_1(k,\mu) = \lim_{\mu\to\mu_+(k)} \frac{2\sqrt{-\mathscr{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{3}k^2} \cdot \lim_{a\to 0, b\to b_+(k)} \sqrt{a}\Pi(a,b,k)$$
$$= \frac{\sqrt{-\mathscr{R}(k,\mu)}}{3\sqrt{3}k^2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{b_+(1-b_+(k))(1-k^2 b_+(k))}}.$$

Par conséquent, le Corollaire 7.2 donne $\lim_{\mu\to\mu_+} \mathscr{A}_1(k,\mu) = \pi$. Ce qui achève la démonstration.

□

7.3 Démonstration de la Proposition 4.3

Dans cette section on prouve la Proposition 4.3. On a besoin du lemme suivant.

Lemme 7.3.1. *Supposons que* $(k,\mu) \in \Sigma_i$ *pour* $i = 0,1,2$. *Alors*

$$\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial \mu}(k,\mu) = (-1)^i \frac{(\mu^2 - 3k^2\mu - 3)K(k) - 3(\mu - k^2 - 1)E(k)}{2\sqrt{\mathscr{R}}\sqrt{-(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_-(k))}}. \tag{7.15}$$

Démonstration. Un calcul direct donne en s'appuyant sur l'assertion (iv) du Lemme 1.1.1 (lorsque $(k,\mu) \in \Sigma_0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial \mu}(k,\mu) &= \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{\mathscr{R}}{3\sqrt{3}k^2}(\nu_+\Pi(\nu_+,k) - \nu_-\Pi(\nu_-,k)\right] \\
&= -\frac{\sqrt{\mathscr{R}}}{3\sqrt{3}k^2}\left[\frac{1}{2(1+\nu_+)}\frac{\partial \nu_+}{\partial \mu} - \frac{1}{2(1+\nu_-)}\frac{\partial \nu_-}{\partial \mu}\right]K(k) \\
&+ \frac{\sqrt{\mathscr{R}}}{3\sqrt{3}k^2}\left[\frac{\nu_+}{2(1+\nu_+)(k^2+\nu_+)}\frac{\partial \nu_+}{\partial \mu} - \frac{\nu_-}{2(1+\nu_-)(k^2+\nu_-)}\frac{\partial \nu_-}{\partial \mu}\right]E(k) \\
&+ \frac{1}{6\sqrt{3}k^2\sqrt{\mathscr{R}}}\left[\nu_+\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \mu} + \left(2\mathscr{R} + \frac{\mathscr{R}(k^2-\nu_+^2)}{(1+\nu_+)(k^2+\nu_+)}\right)\frac{\partial \nu_+}{\partial \mu}\right]\Pi(\nu_+,k) \\
&+ \frac{1}{6\sqrt{3}k^2\sqrt{\mathscr{R}}}\left[\nu_-\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \mu} + \left(2\mathscr{R} + \frac{\mathscr{R}(k^2-\nu_-^2)}{(1+\nu_-)(k^2+\nu_-)}\right)\frac{\partial \nu_-}{\partial \mu}\right]\Pi(\nu_-,k),
\end{aligned} \tag{7.16}$$

où $\mathscr{R} = \mathscr{R}(k,\mu)$ et $\nu_\pm = \nu_\pm(k,\mu)$. On obtient des résultats similaires pour les cas $i = 1,2$. On donnera la démonstration de ce lemme seulement dans le cas $(k,\mu) \in \Sigma_0$.

Étape 1 : Premièrement, on montre que

$$\nu_\pm \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \mu} + \left(2\mathscr{R} + \frac{\mathscr{R}(k^2 - \nu_\pm^2)}{(1+\nu_\pm)(k^2+\nu_\pm)}\right)\frac{\partial \nu_\pm}{\partial \mu} = 0.$$

On a le résultat suivant pour les fonctions régulières $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mu)$ et $\nu_\pm = \nu_\pm(\mu)$

$$\nu \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \mu} + \left(2\mathscr{R} + \frac{\mathscr{R}(k^2 - \nu^2)}{(1+\nu)(k^2+\nu)}\right)\frac{\partial \nu}{\partial \mu} = -\frac{\mathscr{R}^2\nu^4}{(1+\nu)(k^2+\nu)} . \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{\nu^2+(1+k^2)\nu+k^2}{\mathscr{R}\nu^3}\right].$$

Par conséquent, le Lemme 7.1.1 implique

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{\nu_\pm^2+(1+k^2)\nu_\pm+k^2}{\mathscr{R}\nu_\pm^3}\right] = \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{1}{27k^4}\right] = 0,$$

ainsi l'assertion est montrée.

Étape 2 : Dans cette étape on donne des expressions de $\mathscr{A}_1$ on déduit de l'Étape 1 et (7.16)

$$\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial \mu}(k,\mu) = \frac{\sqrt{\mathscr{R}}(S_1K(k)+S_2E(k))}{6\sqrt{3}k^2S_0}, \tag{7.17}$$

où

$$\begin{aligned}
S_0 &:= (1+\nu_+)(1+\nu_-)(k^2+\nu_+)(k^2+\nu_-),\\
S_1 &:= (k^2+\nu_+)(k^2+\nu_-)\left[-(1+\nu_-)\frac{\partial \nu_+}{\partial \mu} + (1+\nu_+)\frac{\partial \nu_-}{\partial \mu}\right],\\
S_2 &:= \nu_+(1+\nu_-)(k^2+\nu_-)\frac{\partial \nu_+}{\partial \mu} - \nu_-(1+\nu_+)(k^2+\nu_+)\frac{\partial \nu_-}{\partial \mu}.
\end{aligned}$$

On observe à partir de (7.1)-(7.5) que

$$S_0 = \frac{\mu^2k^4}{(\mu-3)(\mu-3k^2)}. \tag{7.18}$$

De même,

$$S_1 = \frac{\mu k^4}{(\mu-3)}\left[-\frac{\partial}{\partial \mu}(\nu_+ - \nu_-) - \left(\frac{\partial \nu_+}{\partial \mu}\nu_- - \frac{\partial \nu_-}{\partial \mu}\nu_+\right)\right]. \tag{7.19}$$

De plus, on voit à partir du Lemme 7.1.1,(7.1) et (7.2) que

$$\begin{aligned}
\nu_\pm(1+\nu_\mp)(k^2+\nu_\mp) &= \frac{\mathscr{R}\nu_\pm.\nu_\mp}{27k^4}.\nu_\mp^2 \\
&= -\frac{\mu}{3}.\frac{-9k^4+3k^2(\mu-3(1+k^2))\nu_\pm}{(\mu-3)(\mu-3k^2)} \\
&= \frac{k^2\mu[3k^2-(\mu-3(1+k^2))\nu_\mp]}{(\mu-3)(\mu-3k^2)},
\end{aligned}$$

d'où

$$S_2 = \frac{k^2\mu}{(\mu-3)(\mu-3k^2)}\left[3k^2\frac{\partial}{\partial\mu}(\nu_+-\nu_-)-(\mu-3(1+k^2))\left(\frac{\partial\nu_+}{\partial\mu}\nu_- - \nu_+\frac{\partial\nu_+}{\partial\mu}\right)\right]. \tag{7.20}$$

Ici, on utilise les formules suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mu}(\nu_+-\nu_-) &= 3k^2\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\sqrt{-3\mu^2+6\mu+9(1+k^2)^2}}{(\mu-3)(\mu-3k^2)}\right) \\
&= \frac{9k^2[\mu^3-3(1+k^2)\mu^2-3(1-3k^2+k^4)\mu+9(1+k^6)]}{(\mu-3)^2(\mu-3k^2)^2\sqrt{-3\mu^2+6\mu+9(1-k^2)^2}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\nu_+}{\partial\mu}\nu_- - \nu_+\frac{\partial\nu_-}{\partial\mu} &= \frac{(\nu_++\nu_-)^2}{2}.\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\nu_+-\nu_-}{\nu_++\nu_-}\right) \\
&= \frac{9k^4(\mu-3(1+k^2))^2}{2(\mu-3)^2(\mu-3k^2)^2}.\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\sqrt{-3\mu^2+6\mu+9(1-k^2)^2}}{\mu-3(1+k^2)}\right) \\
&= \frac{27k^4[(1+k^2)\mu-3(1+k^4)]}{(\mu-3)^2(\mu-3k^2)^2\sqrt{-3\mu^2+6\mu+9(1-k^2)^2}}.
\end{aligned}$$

En appliquant cette dernière formule à (7.19) et (7.20) on obtient

$$S_1 = \frac{-9k^6\mu(\mu^2-3k^2\mu+3k^2-3)}{(\mu-3)^2(\mu-3k^2)^2\sqrt{-3(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_-(k))}}, \tag{7.21}$$

et

$$S_2 = \frac{27k^6\mu(\mu-k^2-1)}{(\mu-3)^2(\mu-3k^2)^2\sqrt{-3(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_-(k))}}. \tag{7.22}$$

Par conséquent, en combinant (7.17) avec (7.18),(7.21) et (7.22) on déduit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial \mu}(k,\mu) &= \frac{3\sqrt{\mathscr{R}}[-(\mu^2-3k^2\mu+3k^2-3)K(k)+3(\mu-k^2-1)E(k)]}{2\sqrt{3}\mu(\mu-3)(\mu-3k^2)\sqrt{-3(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_-(k))}}\\ &= \frac{(\mu^2-3k^2\mu+3k^2-3)K(k)-3(\mu-k^2-1)E(k)}{2\sqrt{\mathscr{R}}\sqrt{-(\mu-\mu_+(k))(\mu-\mu_-(k))}}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. □

Preuve de la Proposition 4.3. Soit $\mathscr{B}(k,\mu) := (\mu^2-3k^2\mu+3k^2-3)K(k)-3(\mu-k^2-1)E(k)$. Pour $k\in(0,1)$ arbitraire fixé, $\mathscr{B}(k,.)$ a au plus deux zéros par rapport à μ. On va prouver que

$$\mathscr{B}_1(k) := \mathscr{B}(k,0) = 3(k^2-1)K(k)+3(k^2+1)E(k) > 0, \tag{7.23}$$

$$\mathscr{B}_2(k) := \mathscr{B}(k,\mu) = 3(k^2-1)K(k)-3(2k^2-1)E(k) > 0, \tag{7.24}$$

$$\mathscr{B}_3(k) := \mathscr{B}(k,3) = 6(1-k^2)K(k)-3(2-k^2)E(k) > 0, \tag{7.25}$$

et

$$\mathscr{B}_4(k) := \frac{\mathscr{B}(k,\mu_+(k)))}{2\sqrt{1-k^2+k^4}} = (2-k^2+\sqrt{1-k^2+k^4})K(k)-3E(k) > 0, \tag{7.26}$$

pour $k\in(0,1)$.

On prouve les inégalités (7.23) et (7.26) en utilisant le Lemme 1.1.2. On a

$$3(k^2-1)K(k)+3(k^2+1)E(k) > 3k^2E(k) \geq 0,$$

et

$$\begin{aligned}(2-k^2+\sqrt{1-k^2+k^4})K(k)-3E(k) &> \left[(2-k^2+\sqrt{1-k^2+k^4})-3\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)\right]K(k)\\ &= \frac{3k^4K(k)}{4[\sqrt{1-k^2+k^4}+(1-\frac{1}{2})]} > 0.\end{aligned}$$

L'inégalité (7.25) provient de la relation $\lim_{k\to 0}\mathscr{B}_3(k) = 0$ et de

$$\frac{d}{dk}\mathscr{B}_3(k) = -9k(K(k)-E(k)) < 0.$$

Pour voir (7.24), on remarque que

$$\lim_{k\to 0} \mathscr{B}_2(0) = 0. \quad \lim_{k\to 1} \mathscr{B}_2(k) = -\frac{3\pi}{2} < 0,$$

et

$$\frac{d}{dk}\mathscr{B}_2(k) = 9k(K(k) - 2E(k)).$$

On peut montrer que si $(d/dk)\mathscr{B}_2(k_0) = 0$ pour $k_0 \in (0,1)$, alors

$$\mathscr{B}_2(k_0) = 6(k_0^2 - 1)E(k_0) - 3(2k_0^2 - 1)E(k_0) = -3E(k_0) < 0.$$

Cela implique que $\mathscr{B}_2$ ne possède que la valeur critique négative. Cela prouve (7.24). Par conséquent, on déduit des relations (7.23)-(7.26) que pour chaque $i = 0,1,2$, on a

$$(-1)^i \mathscr{B}(k,\mu) > 0$$

si $(k,\mu) \in \Sigma_i$. En combinant ce fait avec le Lemme 7.3.1, on obtient le résultat souhaité. Ainsi, la démonstration de la Proposition 4.3 est achevée. □

7.4 Démonstration de la Proposition 5.2

On utilise les formules asymptotiques de Π et $\tilde{\Pi}$ pour démontrer la Proposition 5.2.

Démonstration de la Proposition 5.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitraire fixé. Pour simplifier on note $\mu_j^n(k)$ par $\mu_j(k)$.

(i) $0 < j < 1$ arbitraire fixé. À partir de l'assertion (i) de la Proposition 4.2 on a $\mu_-(k) < \mu_j(k) < 0$ pour $k \in (0,1)$. On note que

$$\mu_-(k) = -\frac{3(1-k^2)^2}{1+k^2+2\sqrt{1-k^2+k^4}} = -\frac{3}{4}(1-k^2)^2 + o((1-k^2)^2, \tag{7.27}$$

quand $k \longrightarrow 1$. Soit

$$r_j(k) := \frac{\mu_j(k)}{\mu_-(k)} \in (0,1).$$

Alors il existe $r_j^\star \in [0,1]$ tel que

$$\lim_{m\to\infty} r_j(k_m) = r_j^\star,$$

où $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ est une suite croissante satisfaisant à $k_m \to 1$ quand $m \to \infty$.
D'autre part, le point (i) du Lemme 7.1.1, implique pour $k \in (0,1)$

$$-1 < \nu_-(k,\mu_j(k)) < \nu_+(k,\mu_j(k)) < -k^2.$$

Soit

$$\tilde{\nu}_{\pm,j}(k) = \frac{1+\nu_\pm(k,\mu_j(k))}{1-k^2}.$$

Il résulte de (7.2) que $\tilde{\nu}_\pm(k)$ sont les deux solutions de

$$\begin{aligned}&(\mu_j(k)-3)(\mu_j(k)-3k^2)((1-k^2)\tilde{\nu}-1)^2\\ &\quad -3k^2\left[\mu_j(k)-3(1+k^2)\right]((1-k^2)\tilde{\nu}-1)+9k^4=0.\end{aligned}$$

Un calcul simple nous ramène à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{9}(r_j(k)\mu_-(k)-3)(r_j(k)\mu_-(k)-3k^2)\tilde{\nu}^2\\ &-\frac{2r_j(k)^2\mu_-(k)^2-3(k^2+2)r_j(k)\mu_-(k)+9k^2(1-k^2)}{9(1-k^2)}\tilde{\nu}\\ &+\frac{r_j(k)\mu_-(k)(r_j(k)\mu_-(k)-3)}{9(1-k^2)^2}=0.\end{aligned}\tag{7.28}$$

En posant $k=k_m$ et $m\to\infty$ dans (7.28) et (7.27), on obtient

$$(\nu^\star)^2-\nu^\star+\frac{r^\star}{4}=0.$$

Cela implique

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{\nu}_{\pm,j}(k_m)=\frac{1\pm\sqrt{1-r_j^\star}}{2}.$$

Par conséquent, le Lemme 1.1.5 s'applique à (7.10), de sorte que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \mathscr{A}_1(k_m,\mu_j(k_m))\\
&\quad = \lim_{m\to\infty}\sqrt{-\frac{1}{\nu_{-,j}^{(m)}}}\cdot\lim_{m\to\infty}\sqrt{-(1+\nu_{-,j}^{(m)})(k_m^2+\nu_{-,j}^{(m)})}\Pi(\nu_{-,j}^{(m)},k_m)\\
&\quad\quad -\lim_{m\to\infty}\sqrt{-\frac{1}{\nu_{+,j}^{(m)}}}\cdot\lim_{m\to\infty}\sqrt{-(1+\nu_{+,j}^{(m)})(k_m^2+\nu_{+,j}^{(m)})}\Pi(\nu_{+,j}^{(m)},k_m)\\
&\quad = \left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-r_j^\star}}{1+\sqrt{1-r_j^\star}}}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-r_j^\star}}{1-\sqrt{1-r_j^\star}}}\right)\\
&\quad = 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-r_j^\star}}{1-\sqrt{1-r_j^\star}}}-\frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

où $\nu_{\pm,j}^{(m)}=\nu_\pm(k_m,\mu_j(k_m))$. Par la résolution de l'équation

$$
2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-r_j^\star}}{1-\sqrt{1-r_j^\star}}}-\frac{\pi}{2}=\frac{j\pi}{2n},
$$

on obtient, $r_j^\star=\cos^2 j\pi/(2n)$. Ainsi

$$
\lim_{k\to 1} r_j(k)=\cos^2\frac{j\pi}{2n}.
$$

D'où l'assertion (i) de (7.27).

(ii) Pour $n<j<2n$. L'assertion (ii) de la Proposition 4.2 donne $3-3(1-k^2)<\mu_j(k)<3$ pour $k\in(0,1)$. Soit

$$
r_j(k):=\frac{3-\mu_j(k)}{3(1-k^2)}\in(0,1).
$$

Alors il existe $r^\star\in[0,1]$ tel que $\lim_{m\to 0} r_j(k_m)=r_j^\star$, où $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ est une suite croissante vérifiant $k_m\to 1$ quand $m\to\infty$. À partir du Lemme 7.1.1 et du fait que $\nu_-(k,\mu_j(k))>0$ on trouve

$$
\lim_{m\to\infty}\nu_-(k_m,\mu_j(k_m))=+\infty.
$$

D'autre part, (ii) du Lemme 7.1.1 implique que $-1<\nu_-<-k^2$ pour $k\in(0,1)$.

Soit
$$\tilde{\nu}_{+,j}(k) = \frac{1+\nu_+(k,\mu_j(k))}{1-k^2} \in (0,1).$$

On raisonne comme dans la preuve de (i) : On a l'équation suivante pour $\tilde{\nu}_+$ lorsque $m \to \infty$

$$\begin{aligned}
&(1-k^2)^3 r_j(k)(r_j(k)-1)\tilde{\nu}^2 - [2(1-k^2)^2 r_j(k)^2 - (1-k^2)(2-k^2) - k^4]\tilde{\nu} \\
&+ r_j(k)[(1-k^2)r_j(k)-1] = 0,
\end{aligned} \tag{7.29}$$

et
$$\nu^\star - r_j^\star = 0.$$

Cela implique que
$$\lim_{m\to\infty} \tilde{\nu}_{+,j}(k_m) = r_j^\star. \tag{7.30}$$

On note $\nu_{\pm,j}^{(m)} = \nu_\pm(k_m,\mu_j(k_m))$. Par suite à partir de (7.4) et (7.30) on a

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(1+\nu_{-,j}^{(m)})(1-k_m^2)^2} &= \frac{1+\nu_{+,j}^{(m)}}{(1+\nu_{-,j}^{(m)})(1+\nu_{+,j}^{(m)})(1-k_m^2)^2} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{3(1-r_j(k_m))(1-k_m^2)}{3-3r_j(k_m)(1-k_m^2)} . \frac{1+\nu_{+,j}^{(m)}}{1-k_m^2} . \frac{1}{1-k_m^2} \\
&= r_j^\star(1-r_j^\star).
\end{aligned} \tag{7.31}$$

En appliquant les Lemmes 1.1.3, 1.1.5,1.1.6 et (7.30), (7.31) à (7.11) on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \mathscr{A}_1(k_m,\mu_j(k_m)) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{k_m^2+\nu_{-,j}^{(m)}}{\nu_{-,j}^{(m)}}} . \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\nu_{-,j}^{(m)}(1-k_m^2)}} . (1-k_m^2)K(k_m) + J(\nu_{+,j}^{(m)},k_m) \right) \\
&+ \lim_{m\to\infty} \sqrt{-\frac{1}{\nu_{+,j}^{(m)}}} . \lim_{m\to\infty} \sqrt{-(1+\nu_{+,j}^{(m)})(k_m^2+\nu_{+,j}^{(m)})} \Pi(\nu_{+,j}^{(m)},k_m) \\
&= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{r^\star}{1-r^\star}} \right) \\
&= \pi - \tan^{-1}\sqrt{\frac{r^\star}{1-r^\star}}.
\end{aligned}$$

La résolution de l'équation

$$\pi - \tan^{-1}\sqrt{\frac{r^\star}{1-r^\star}} = \frac{j\pi}{2n}$$

donne $r_j^\star = \cos^2(j-n)\pi/(2n)$. D'où

$$\lim_{k\to 1} r_j(k) = \cos^2\frac{(j-n)\pi}{2n},$$

ce qui montre l'assertion (ii).

(iii) Supposons $j > 2n$. À partir du point (iii) de la Proposition 4.2 on a $\mu_j(k) > \mu_+(k)$ pour $k \in (0,1)$. On note que $\mu_+ : (0,1) \longrightarrow \mathscr{R}$ est croissante en k, et

$$\lim_{k\to 0}\mu_+(k) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to 1}\mu_+(k) = 4.$$

Pour $a > 0,\ b \in (0,1), k \in (0,1)$ et

$$\tilde{\Pi}(a,b,k) \geq \min\{\frac{1}{a+b^2}, \frac{1}{a+(1-b^2)}\}K(k),$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{j\pi}{2n} &= \frac{2\sqrt{-\mathscr{R}(k,\mu_j(k))}}{3\sqrt{3}k^2}\sqrt{a(k,\mu_j(k))}\tilde{\Pi}(a(k,\mu_j(k)), b(k,\mu_j(k)), k) \\
&> \frac{2\sqrt{-\mathscr{R}(k,\mu_j(k))}}{3\sqrt{3}k^2}.\frac{\sqrt{a(k,\mu_j(k))}}{\mu_j(k)(\mu_j(k)-3)}K(k) \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}k^2}.\sqrt{\frac{\mu_j(k)-3k^2}{\mu_j(k)-3}}.\sqrt{\frac{\mu_j(k)-\mu_-(k)}{\mu_j(k)}}.\frac{\sqrt{\mu_j(k)-\mu_+(k)}}{2\sqrt{3}k^2}K(k) \\
&> \frac{1}{9k^4}\sqrt{\mu_j(k)-\mu_+(k)}K(k).
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{k\to 1}(\mu_j(k) - \mu_+(k)) = 0,$$

et en particulier, $\lim_{k\longrightarrow 1}\mu_j(k) = 4$,

$$\lim_{k\longrightarrow 1} a(k,\mu_j(k)) = 0, \quad \lim_{k\longrightarrow 1} b(k,\mu_j(k)) = \frac{1}{3}.$$

Le Lemme 1.1.8 implique alors

$$\frac{j\pi}{2n} = \frac{2\sqrt{-\mathscr{R}(k,\mu_j(k))}}{3\sqrt{3}k^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{a(k,\mu_j(k))}}{a(k,\mu_j(k))+(1-b(k,\mu_j(k)))^2}K(k)+\tilde{J}(a(k,\mu_j(k)),b(k,\mu_j(k)),k)\right],$$

cela conduit à

$$\sqrt{\mu_j(k)-\mu_-(k)}K(k) = \left(-\tilde{J}(a(k,\mu_j(k)),b(k,\mu_j(k)),k)+\frac{3\sqrt{3}k^2}{2\sqrt{-\mathscr{R}(k,\mu_j(k))}}.\frac{j\pi}{2n}\right) \cdot \frac{2\sqrt{3}k^2[a(k,\mu_j(k))+(1-b(k,\mu_j(k)))^2]}{\sqrt{\mu_j(k)-\mu_-(k)}}.$$

En faisant $k \longrightarrow 1$, on obtient

$$\lim_{k\longrightarrow 1}\sqrt{\mu_j(k)-\mu_+(k)}K(k) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}.\frac{j\pi}{2n}\right).\frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{(j-2n)\pi}{2n}.$$

Ainsi

$$\lim_{k\longrightarrow 1}\sqrt{\mu_j(k)-\mu_+(k)}K(k) = \frac{(j-2n)\pi}{2n}.$$

D'où l'assertion (iii). Ceci achève la démonstration.

$\square$