

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de Magister

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Modélisation mathématique et analyse numérique**

Présenté par : **Karima MORSLI**

Comportement asymptotique des valeurs propres liées à l'équation d'Allen-Cahn

Soutenu le : 14/10/2017

Devant le jury

Mr. Abdelhafid MOKRANE	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. Abdelaziz CHOUTRI	Professeur	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. Toufik MOUSSAOUI	Professeur	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. Boubaker-Khaled SADALLAH	Professeur	E.N.S-Kouba	Directeur de mémoire.

Table des matières

1	Préliminaires	10
1.1	Résultats fondamentaux sur les intégrales elliptiques complètes	10
1.2	Fonction de Jacobi sn	19
1.3	Problème de Sturm Liouville	20
1.4	Quelques remarques sur le spectre de Weyl	23
2	Linéarisation de l'équation d'Allen-Cahn	25
2.1	Problème	25
2.2	Résultats principaux	33
3	Méthode utilisant l'équation de représentation	34
3.1	Expression de la n-mode solution	34
3.2	Méthode de l'équation de représentation	36
4	Expressions des fonctions propres (I)	47
5	Démonstration des résultats principaux	52
6	Expressions des fonctions propres (II)	56
7	Démonstration des Propositions 4.2, 4.3 et 5.2	63
7.1	Propriétés fondamentales de $v_{\pm}(k, \mu)$ et $\mathcal{R}(k, \mu)$	63
7.2	Démonstration de la Proposition 4.2	66
7.3	Démonstration de la Proposition 4.3	68
7.4	Démonstration de la Proposition 5.2	72
	Bibliographie	78

Notation

u_x	$= \frac{\partial u}{\partial x}$.
u_{xx}	$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
u_t	$= \frac{\partial u}{\partial t}$.
$K(k)$	Intégrale elliptique du premier type.
$E(k)$	Intégrale elliptique du deuxième type.
$\Pi(v, k)$	Intégrale elliptique du troisième type.
$\text{sn}(t, k)$	Fonction de Jacobi.
$\text{sech}(z)$	$= \frac{2}{e^z - e^{-z}}$ Sécante hyperbolique.
$\tanh(h)$	$= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ Tangente hyperbolique.
$\text{arctanh}(z)$	Inverse de tangente hyperbolique.
$\sigma(A)$	Spectre de l'opérateur A.
$\sigma_{ess}(A)$	Spectre essentiel de l'opérateur A.
$L^2(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions de carré intégrable.

Liste des figures

Fig.1.	Variable phase u varie en douceur d'une valeur $u = 1$ à $u = -1$.	6
Fig.2.	Double puits potentiel avec la même profondeur $F(s)$ et sa dérivée $f(s)$.	8
Fig.1.1.	Tracés de \mathbf{sn} pour différentes valeurs de k .	22
Fig.2.1.	Profils de $u_{3,\varepsilon}(x)$ et $f(u) = \sin u$.	29
Fig.2.2.	Profils de $u_{3,\varepsilon}(x)$ et $f(u) = u - u^3$.	29
Fig.2.3.	Profils de $\varphi_j^{3,\varepsilon} (j = 0, \dots, 8)$ pour $f(u) = \sin u$.	31
Fig.2.4.	Profils de $\varphi_j^{3,\varepsilon}$ pour $j = 0, 1, 2$ et $f(u) = u - u^3$.	36
Fig.2.5.	Profils de $\varphi_j^{3,\varepsilon}$ pour $j = 3, 4, 5$ et $f(u) = u - u^3$.	36
Fig.4.1.	Profils de $\varphi_j^{3,\varepsilon}$ pour $j = 6, 7, 8$ et $f(u) = u - u^3$.	36
Fig.4.2.	Graphique de $\mathcal{A}_1(k, \mu)$.	53

Résumé

On considère des solutions stationnaires non triviales d'un problème aux limites non linéaire (lié à un petit paramètre $\varepsilon > 0$), à savoir l'équation de Allen-Cahn, et on étudie le problème aux valeurs propres linéarisé correspondant.

En utilisant une solution particulière d'une équation différentielle ordinaire linéaire du troisième ordre, on donne l'expression de toutes les valeurs propres et les fonctions propres du problème linéarisé. Elles sont entièrement déterminées par une fonction caractéristique qui fait appel aux intégrales elliptiques.

On montre aussi des formules asymptotiques concernant les valeurs propres. Ces résultats donnent des informations importantes pour ceux qui s'intéressent au comportement des fonctions propres de ce type de problèmes.

المخلص

في هذه المذكرة نعتبر الحلول المستقرة غير التافهة لمسألة حدية غير خطية (مرتبطة بوسيط صغير $\varepsilon > 0$)، وهي معادلة ألين – كاهن Allen-Cahn . و نتناول المسألة الذاتية الخطية الموافقة للمسألة السابقة.

باستخدام حل معين لمعادلة تفاضلية خطية عادية من الدرجة الثالثة، نقدم عبارة جميع القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة الخطية. يتم تحديدها تمامًا باستعمال دالة تعتمد على التكمالات الناقصية. كما نعرض أيضًا صيغًا تقاربية للقيم الذاتية. توفر هذه النتائج معلومات هامة للمهتمين بسلوك الدوال الذاتية لهذا النوع من المسائل.

Abstract

In this thesis, we consider non-trivial stationary solutions of a nonlinear boundary problem (having a small parameter $\varepsilon > 0$), namely the Allen-Cahn equation, and we study the corresponding linearized eigenvalue problem.

Using a particular solution of a third-order ordinary linear differential equation, one gives the expression of all the eigenvalues and the eigenfunctions of the linearized problem. They are entirely determined by a characteristic function which makes use of the elliptic integrals.

We also show asymptotic formulas concerning the eigenvalues. These results provide important results for those interested in the behavior of the eigenfunctions of this type of problem.