Chapitre 5

Phénomène d'extinction pour une équation semi-linéaire de réaction-diffusion-convection

(D'après l'article de Zhou Q., Nie Y., Zhou X. et Guo W. : *Quenching of a semi-linear diffusion equation with convection and reaction*. Electronic journal of differential equations., 2015-(208), 1-7, 2015. [17])

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on définit l'équation suivante

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + b(x)u_x(t,x) = f(u(t,x)),\ (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[,$$

on associe à l'équation précédente des conditions aux bords de type Dirichlet

$$u(t,0) = 0 = u(t,l),\ t \in]0,+\infty[,$$

et la condition initiale

$$u(0,x) = 0,\ x \in]0,l[$$

où $l > 0$, $b \in C^1([0,+\infty[) \cap L^\infty([0,+\infty[)$ et $f \in C^1([0,c[)$ satisfait à

$$f(0) > 0,\ f'(s) > 0 \text{ pour } 0 < s < c,\ \lim_{s \to c^-} f(s) = +\infty. \tag{5.1}$$

Donc, le problème à étudier est le suivant

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + b(x)u_x(t,x) = f(u(t,x)),\ (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[, \\ u(t,0) = 0 = u(t,l),\ t \in]0,+\infty[, \\ u(0,x) = 0,\ x \in]0,l[. \end{cases} \tag{5.2}$$

On pose comme d'habitude

$$T^*(l) = \sup \Big\{ T > 0 : \text{le Problème (5.2) admet une solution}$$
$$u \in C^{1,2}(]0,T[\times]0,l[) \cap C([0,T] \times [0,l]) \text{ et } \sup_{(t,x) \in]0,T[\times]0,l[} u(t,x) < c \Big\}.$$

5.2 Propriétés de la solution

Proposition 5.1. *(Voir [17], Proposition 2.1, p.2). La solution du Problème (5.2) est strictement croissante par rapport à t dans $]0,T^*(l)[\times]0,l[$ et satisfait à $u > 0$ dans $]0,T^*(l)[\times]0,l[$.*

Démonstration. (Voir [17]). On pose

$$v(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x),\ (t,x) \in [0,T^*(l)[\times[0,l].$$

Alors v résout

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u(t,x))v,\ (t,x) \in]0,T^*(l)[\times]0,l[, \\ v(t,0) = 0 = v(t,l),\ t \in]0,T^*(l)[, \\ v(0,x) = f(0),\ x \in]0,l[. \end{cases}$$

Le principe du maximum fort conduit à $v > 0$ et $u > 0$ dans $]0,T^*(l)[\times]0,l[$. □

Lemme 5.1. *Si $l_1 < l_2$, alors $T^*(l_2) \leq T^*(l_1)$.*

Démonstration. Elle est similaire à la preuve du Lemme 3.8. □

5.3 Longueur critique

Lemme 5.2. *(Voir [17], Lemma 2.2, p.3). Si l est assez petit, alors $T^*(l) = +\infty$ et*

$$\sup_{(t,x)\in]0,+\infty[\times]0,l[} u(t,x) < c.$$

Démonstration. (Voir [17]). On fixe $0 < c_0 < c$ et on choisit l tel que

$$0 < l \leq \min\Big\{\Big(\frac{4c_0}{f(c_0)}\Big)^{1/2}, \frac{1}{\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)} + 1}\Big\}.$$

On pose

$$\bar{u}_l(t,x) = f(c_0)x(l-x),\ (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[.$$

Remarquons que

$$f(c_0)b(x)(l-2x) \geq -f(c_0)b(x)l \geq -f(c_0)b(x)\frac{1}{\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)} + 1} \geq -f(c_0).$$

Par ailleurs

$$0 \leq \bar{u}_l(t,x) \leq \frac{1}{4}f(c_0)l^2 \leq c_0,\ (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[.$$

Ainsi, on obtient

$$\bar{u}_{lt} - \bar{u}_{lxx} + b(x)\bar{u}_{lx} = 2f(c_0) + f(c_0)b(x)(l-2x) \geq f(c_0) \geq f(\bar{u}_l),$$
$$(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[.$$

D'où

$$\begin{cases} \bar{u}_{lt} - \bar{u}_{lxx} + b(x)\bar{u}_{lx} \geq f(\bar{u}_l),\ (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[, \\ \bar{u}_l(0,x) = f(c_0)x(l-x) \geq 0 = u_l(0,x),\ x \in]0,l[, \\ \bar{u}_l(t,0) = 0 = u_l(t,0) = \bar{u}_l(t,l) = 0 = u_l(t,0),\ t \in]0,+\infty[, \end{cases}$$

on déduit que $\bar{u}_l$ est une sur solution du Problème (5.2). Comme $\underline{u} \equiv 0$ est une sous solution de (5.2), on a alors $0 \leq u_l \leq \bar{u}_l$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$. Par conséquent, $u_l \leq \bar{u}_l \leq c_0 < c$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$, d'où

$$\sup_{(t,x)\in]0,+\infty[\times]0,l[} u(t,x) < c.$$

Donc $T^*(l) = +\infty$. □

Lemme 5.3. *(Voir [17], Lemma 2.3, p.3). Si l est assez grand, alors $T^*(l) < +\infty$.*

Démonstration. Soit l assez grand. On pose

$$\underline{u}_l(t,x) = \frac{tf(0)}{2}\sin(\frac{\pi x}{l}),\ (t,x) \in [0,T] \times [0,l]$$

avec

$$T = \begin{cases} \min\{\frac{l^2}{2\pi^2}, \frac{l}{2\pi\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)}}\}, \text{ si } \|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)} \neq 0, \\ \frac{l^2}{2\pi^2}, \text{ si } \|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)} = 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \underline{u}_{lt} - \underline{u}_{lxx} + b(x)\underline{u}_{lx} &= \frac{f(0)}{2}\left[\sin(\frac{\pi x}{l}) + t\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin(\frac{\pi x}{l}) + tb(x)\frac{\pi}{l}\cos(\frac{\pi x}{l})\right], \\ (t,x) &\in \ ]0,T[\times]0,l[, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{f(0)}{2}\left[\sin(\frac{\pi x}{l}) + t\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin(\frac{\pi x}{l}) + tb(x)\frac{\pi}{l}\cos(\frac{\pi x}{l})\right] &\leq \frac{f(0)}{2}\left[1 + T\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{\pi T}{l}\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)}\right] \\ &\leq \frac{f(0)}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \\ &\leq f(0). \end{aligned}$$

Donc

$$\underline{u}_{lt} - \underline{u}_{lxx} + b(x)\underline{u}_{lx} \leq f(0).$$

Nous avons

$$\begin{cases} \underline{u}_{lt} - \underline{u}_{lxx} + b(x)\underline{u}_{lx} \leq f(0) \leq f(\underline{u}_l),\ (t,x) \in]0,T[\times]0,l[, \\ \underline{u}_l(t,0) = 0 \leq u_l(t,0),\ \underline{u}_l(t,l) = 0 \leq u_l(t,l),\ t \in]0,T[, \\ \underline{u}_l(0,x) = 0 \leq u_l(0,x),\ x \in]0,l[. \end{cases}$$

La solution w du problème

$$\begin{cases} w_t = f(w),\ t \in]0,T[, \\ w(0) = 0, \end{cases}$$

est une sur solution de (5.2), on déduit $u_l \geq \underline{u}_l$ dans $[0,T[\times[0,l]$. On sait que $\lim\limits_{t\to T} u_l(t,\frac{l}{2}) \leq c$. Si $\lim\limits_{t\to T} u_l(t,\frac{l}{2}) < c$, alors

1) Si $\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)} \neq 0$.

a) Si $\min\{\frac{l^2}{2\pi^2}, \frac{l}{2\pi\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)}}\} = \frac{l^2}{2\pi^2}$, on a $c > \lim\limits_{t\to T} u_l(t,\frac{l}{2}) \geq \frac{f(0)}{2}\frac{l^2}{2\pi^2}$. Par suite $l \leq$

$\frac{2\pi\sqrt{c}}{\sqrt{f(0)}}$. Ce qui contredit le fait que l est assez grand.
b) Si $\min\{\frac{l^2}{2\pi^2}, \frac{l}{2\pi\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)}}\} = \frac{l}{2\pi\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)}}$, on a $c > \lim_{t\to T} u_l(t, \frac{l}{2}) \geq \frac{f(0)}{2}\frac{l}{2\pi\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)}}$.
Par suite $l \leq \frac{4\pi\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)}}{f(0)}$. Ce qui contredit le fait que l est assez grand.
2) Si $\|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)} = 0$, on a $c > \lim_{t\to T} u_l(t, \frac{l}{2}) \geq \frac{f(0)}{2}\frac{l^2}{2\pi^2}$. Par suite $l \leq \frac{2\pi\sqrt{c}}{\sqrt{f(0)}}$. Ce qui contredit le fait que l est assez grand.
Donc u atteint la valeur c au point $(T, \frac{l}{2})$. D'après la définition de $T^*(l)$ (rappelons que u est croissante par rapport à t), $T^*(l) = T < +\infty$. □

Lemme 5.4. *(Voir [20], Lemma 3.2, p.1131). On note u_l la solution du Problème (5.2), alors $u_{l+\alpha}(t,x) > u_l(t,x)$ dans $]0, T^*(l)[\times]0, l[$ pour tout $\alpha \geq 0$.*

Démonstration. Elle est analogue à celle du Lemme 4.6. □

Théorème 5.3.1. *(Voir [20], Theorem 3.6, p.1133). Il existe une unique longueur critique l^* du Problème (5.2).*

Démonstration. C'est une conséquence des trois Lemmes 5.2-5.4. □

5.4 Extinction en temps fini de la solution

Dans cette section, on donne quelques résultats sur l'explosion en temps fini de la dérivée par rapport à t de la solution du Problème (5.2). On montrera que sous certaines conditions sur le terme non linéaire du Problème (5.2), le temps d'existence $T^*(l)$ de la solution est fini. Nous dirons alors que la solution s'éteint en temps fini $T^*(l)$.

Lemme 5.5. *(Voir [17], Lemma 2.4, p.3). Soient l_1 et l_2 tels que $0 < l_1 < l_2$. On a $u_{l_1} < u_{l_2}$ dans $]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[$ et $u_{l_1 x}(.,0) < u_{l_2 x}(.,0)$ dans $]0, T^*(l_2)[$.*

Démonstration. (Voir [17]). D'après le Lemme 5.1, on a $T^*(l_1) \geq T^*(l_2)$ et $u_{l_2}(t, l_1) > 0$ pour tout $t \in]0, T^*(l_2)[$. On pose

$$w = u_{l_1} - u_{l_2}, \text{ dans } [0, T^*(l_2)[\times[0, l_1].$$

Alors w satisfait à

$$\begin{cases} w_t(t,x) - w_{xx}(t,x) + b(x)w_x(t,x) = h(t,x)w(t,x), \ (t,x) \in]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[, \\ w(t,0) = 0, \ w(t,l_1) = -u_{l_2}(t,l_1) < 0, \ t \in]0, T^*(l_2)[, \\ w(x,0) = 0, \ x \in]0, l_1[, \end{cases}$$

où

$$h(t,x) = \int_0^1 f'(\sigma u_{l_1}(t,x) + (1-\sigma)u_{l_2}(t,x))d\sigma, \ (t,x) \in]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[.$$

D'après le Théorème 1.4.4, on a $w < 0$ dans $]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[$. De la même façon, on obtient $w_x(.,0) < 0$ dans $]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[$. □

Lemme 5.6. *(Voir [17], Lemma 2.5, p.4). Soit u_l la solution du Problème (5.2) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$. Il existe au plus un l tel que u_l atteint la valeur c en temps infini.*

Démonstration. (Voir [17]). Soit l et l_0 deux nombres positifs tels que $l \neq l_0$. Supposons que (par l'absurde) u_{l_0} et u_l atteignent la valeur c en temps infini, i.e, $T^*(l_0) = T^*(l) = +\infty$.

1. Cas où $l > l_0$.

   Comme u_l est croissante par rapport à t, on a

   $$u_l(t,l_0) > u_l(1,l_0) > 0, \ t \in]1, +\infty[, \tag{5.3}$$

   Le Lemme 5.5, alors que

   $$u_l(1,x) > u_{l_0}(1,x), \ x \in]0, l_0[\text{ et } u_{lx}(t,0) > u_{l_0x}(t,0), \ t \in]1, +\infty[. \tag{5.4}$$

   Soit

   $$\underline{u}_l(t,x) = u_{l_0}(t,x) + \delta \int_0^x \exp\Big\{\int_0^y b(s)ds\Big\}dy, \ (t,x) \in [1, +\infty[\times[0, l_0].$$

   Alors il existe $\delta > 0$ tel que

   $$u_l(t,l_0) > \underline{u}_l(t,l_0), \ t \in]1, +\infty[, \tag{5.5}$$

et

$$u_l(1,x) > \underline{u}_l(1,x),\ x \in]0,l_0[. \tag{5.6}$$

En effet, supposons que pour tout $\delta > 0$ on a $u_l(t,l_0) - \underline{u}_l(t,l_0) \leq 0$, $t \in]1,+\infty[$, i.e,

$$u_l(t,l_0) - \delta \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y b(s)ds \Big\} dy \leq 0,\ t \in]1,+\infty[.$$

Mais pour $\delta \leq \frac{u_l(1,l_0)}{l_0 \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y \|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)} ds \Big\} dy}$, on a

$$\begin{aligned} \delta \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y b(s)ds \Big\} dy &\leq \frac{u_l(1,l_0)}{l_0} \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y \{b(s) - \parallel b \parallel_{L^\infty([0,+\infty[)}\} ds \Big\} dy \\ &\leq \frac{u_l(1,l_0)}{l_0} \int_0^{l_0} dy \\ &\leq u_l(1,l_0). \end{aligned}$$

Par (5.4), on obtient

$$u_l(1,l_0) < u_l(t,l_0) \leq \delta \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y b(s)ds \Big\} dy \leq u_l(1,l_0)$$

c'est une contradiction. D'où (5.5).

Par ailleurs, supposons que pour tout $\delta > 0$ on a $u_l(1,x) - \underline{u}_l(1,x) \leq 0$, i.e,

$$u_l(1,x) - u_{l_0}(1,x) \leq \delta \int_0^x \exp\Big\{ \int_0^y b(s)ds \Big\} dy.$$

Mais pour $\delta < \frac{\min_{x\in]0,l_0[} \{u_l(1,x) - u_{l_0}(1,x)\}}{l_0 \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y \|b\|_{L^\infty([0,+\infty[)} ds \Big\} dy}$, on a

$$\begin{aligned} \delta \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y b(s)ds \Big\} dy &< \frac{\min_{x\in]0,l_0[} \{u_l(1,x) - u_{l_0}(1,x)\}}{l_0} \times \\ &\quad \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y \{b(s) - \parallel b \parallel_{L^\infty([0,+\infty[)}\} ds \Big\} dy \\ &< \frac{\min_{x\in]0,l_0[} \{u_l(1,x) - u_{l_0}(1,x)\}}{l_0} \int_0^{l_0} dy \\ &< \min_{x\in]0,l_0[} \{u_l(1,x) - u_{l_0}(1,x)\}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$u_l(1,x) - u_{l_0}(1,x) \leq \delta \int_0^{l_0} \exp\Big\{ \int_0^y b(s)ds \Big\} dy < \min_{x\in]0,l_0[} \{u_l(1,x) - u_{l_0}(1,x)\},$$

c'est une contradiction. qui prouve (5.6)

On voit que $\underline{u}_l$ satisfait à

$$\underline{u}_{lt} - \underline{u}_{lxx} + b(x)\underline{u}_{lx} = f(u_{l_0}) < f(\underline{u}_l), \text{ dans }]1,+\infty[\times]0,l_0[. \tag{5.7}$$

Les Relations (5.6), (5.5) et (5.7) conduisent à

$$u_l(t,x) \geq \underline{u}_l(t,x) = u_{l_0}(t,x) + \delta \int_0^x \exp\left\{ \int_0^y b(s)ds \right\} dy,\ (t,x) \in [1,+\infty[\times]0,l_0[.$$

Le passage à la limite $(t \to +\infty)$ dans cette relation monte que u_l prend des valeurs strictement supérieures à c. Ceci contredit $u_l \leq c$.

2. Cas où $l < l_0$.

   Il suffit d'intervertir les rôles de l et l_0 dans le cas précédent.

□

Théorème 5.4.1. *(Voir [17], Theorem 2.6, p.4). On suppose que $f \in C^1([0,c[)$. Soient*

$$l^* = \sup\{l > 0 : T^*(l) = +\infty \textit{ et } \sup_{]0,+\infty[\times]0,l[} u_l < c\}$$

et u_l la solution du Problème (5.2) dans $[0,T^*(l)[\times[0,l]$. Alors

1) Si $l \leq l^*$ on a $T^*(l) = +\infty$ et $\sup_{]0,+\infty[\times]0,l[} u_l(t,x) < c$,

2) Si $l > l^*$ on a $T^*(l) < +\infty$.

Démonstration. (Voir [17]).

1) Si $l < l^*$, d'après le Lemme 5.1, on a $T^*(l^*) \leq T^*(l)$. Comme $T^*(l^*) = +\infty$, $T^*(l) = +\infty$. Par le Lemme 5.5, on a

$$u_l(t,x) < u_{l^*}(t,x), \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,l[,$$

donc

$$\sup_{(t,x)\in]0,+\infty[\times]0,l[} u_l(t,x) \leq \sup_{(t,x)\in]0,+\infty[\times]0,l^*[} u_{l^*}(t,x) < c.$$

2) Si $l > l^*$, on obtient $T^*(l) < +\infty$ ou bien u_l atteint la valeur c en temps infini. Si u_l atteint la valeur c en temps $T^*(l)$ infini, on a pour tout $\tilde{l} \in]l^*,l[$,

$$T^*(l) \leq T^*(\tilde{l}) \leq T^*(l^*).$$

Comme la solution u_l est globale, et s'éteint en temps infini (car u_l atteint la valeur c en temps $T^*(l)$ infini, i.e., $T^*(l) = +\infty$), alors $T^*(\tilde{l}) = +\infty$. D'aprés le Lemme 5.5 et vu que $\tilde{l} > l^*$, on a $u_{\tilde{l}} > u_{l^*}$ dans $]0, +\infty[\times]0, l^*[$. Alors $u_{\tilde{l}}$ atteint la valeur c en temps infini. Ce qui contredit le Lemme 5.6. $\square$

Remarque 5.1. *On peut établir que ce théorème reste valable même si $b \in L^\infty([0, +\infty[)$ sans être dans $C^1([0, +\infty[)$.*

Théorème 5.4.2. *([17], Theorem 3.2, p.5). On prend l assez grand pour que $\delta < \frac{l}{2} < l - \delta$. On suppose que $f \in C^1([0, c[)$ et vérifie (5.1), $\lim\limits_{s \to c^-} f(s) = +\infty$ et $M = \int_0^c f(s)ds < \infty$. Si la solution du Problème (5.2) s'éteint en $T^*(l) < \infty$, alors les points d'extinction x appartiennent à l'intervalle $[\delta, l - \delta]$ avec*

$$\delta = \frac{c^2}{2lM} \exp(-\frac{1}{2} \parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)).$$

Démonstration. (Voir [17]). Soit $0 < s < T^*(l)$. On multiple l'équation du Problème (5.2) par u_t et intégrant sur $]0, s[\times]0, l[$, on obtient

$$\int_0^s \int_0^l (u_t)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^l ((u_x)^2)_t dxdt + \int_0^s \int_0^l b(x) u_t u_x dxdt \;\; = \int_0^s \int_0^l (F(u))_t dxdt,$$

où

$$F(w) = \int_0^w f(y)dy, w \geq 0,$$

car

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_0^l ((u_x)^2)_t dxdt \;\; &= \int_0^s \int_0^l 2u_x (u_x)_t dxdt \\ &= 2 \int_0^s u_x u_t \mid_0^l ds - \int_0^s \int_0^l 2u_{xx} u_t dxdt \\ &= - \int_0^s \int_0^l 2u_{xx} u_t dxdt, \end{aligned}$$

et

$$\int_0^s \int_0^l (F(u))_t dxdt \;\; = \int_0^s \int_0^l u_t f(u) dxdt.$$

Comme

$$\int_0^s \int_0^l \{(u_t)^2 + 2(\tfrac{1}{2}) b(x) u_t u_x + (\tfrac{1}{2} b(x) u_x)^2\} dxdt \;\; = \int_0^s \int_0^l (u_t + \tfrac{1}{2} b(x) u_x)^2 dxdt$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^s\int_0^l((u_x)^2)_t dxdt &= \frac{1}{2}\int_0^l(u_x(s,x))^2dx \\
&\leq \int_0^l F(u(s,x)))dxdt + \int_0^s\int_0^l(\frac{1}{2}b(x)u_x)^2dxdt \\
&\leq lM + \frac{1}{4}\int_0^s\int_0^l(b(x))^2(u_x)^2dxdt \\
&\leq lM + \frac{1}{4}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} \int_0^s\int_0^l(u_x)^2dxdt,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\int_0^l(u_x(s,x))^2dx \quad \leq 2lM + \frac{1}{2}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} \int_0^s\int_0^l(u_x)^2dxdt.$$

D'après le Lemme 1.8, on trouve que

$$\int_0^l(u_x(s,x))^2dx \quad \leq 2lM\exp(\frac{1}{2}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)). \tag{5.8}$$

Nous estimons maintenant $u(t,x)$ pour $(t,x)\in]0,T^*(l)[\times]0,\frac{l}{2}[$. On a

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_0^x u_x(t,y)dy \\
&\leq x^{\frac{1}{2}}(\int_0^l(u_x(t,y))^2dy)^{\frac{1}{2}}, \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq x^{\frac{1}{2}}(2lM\exp(\frac{1}{2}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)))^{\frac{1}{2}}, \text{ d'après (5.8)} \\
&\leq (2lMx)^{\frac{1}{2}}\exp(\frac{1}{4}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l))
\end{aligned}$$

Comme il y a un point d'extinction x_0, il y a deux cas possibles

a) $x_0\in]0,\frac{l}{2}[$. Alors il existe $(t_n,x_n)\to(T^*(l)^-,x_0)$ telle que $\lim_{(t_n,x_n)\to(T^*(l)^-,x_0)} u(t,x) = c$. On déduit que

$$c^2 \leq 2lMx_0\exp(\frac{1}{2}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)),$$

c'est-à-dire

$$x_0 \geq \frac{c^2}{2lM}\exp(\frac{-1}{2}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)) = \delta.$$

Alors $x_0\in]\delta,\frac{l}{2}[\subset]\delta,l-\delta[$. D'où $x_0\in[\delta,l-\delta]$.

Nous estimons $u(t,x)$ pour $(t,x)\in]0,T^*(l)[\times]\frac{l}{2},l[$. On a

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= -\int_x^l u_x(t,y)dy \\
&\leq (l-x)^{\frac{1}{2}}(\int_0^l(u_x(t,y))^2dy)^{\frac{1}{2}}, \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq (l-x)^{\frac{1}{2}}(2lM\exp(\frac{1}{2}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)))^{\frac{1}{2}}, \text{ d'après (5.8)} \\
&\leq (2lM(l-x))^{\frac{1}{2}}\exp(\frac{1}{4}\parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)).
\end{aligned}$$

b) $x_0 \in [\frac{l}{2}, l[$. Alors il existe $(t_n, x_n) \to (T^*(l)^-, x_0)$ telle que $\lim\limits_{(t_n,x_n)\to(T^*(l)^-,x_0)} u(t,x) = c$. On trouve que $c^2 \leq 2lM(l - x_0)\exp(\frac{1}{2} \parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l))$, cela veut dire que

$$x_0 \leq l - \frac{c^2}{2Ml}\exp(\frac{-1}{2} \parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)) = l - \delta.$$

D'où $x_0 \in [\frac{l}{2}, l-\delta] \subset [\delta, l-\delta]$. Alors $x_0 \in [\delta, l-\delta]$ □

Théorème 5.4.3. *([17], Theorem 3.3, p.6). On suppose que la solution u du Problème (5.2) dans $[0, T^*(l)[\times[0,l]$ s'éteint en $T^*(l) < +\infty$. Si $f \in C^2([0,c[)$ et satisfait à (5.1), $\int_0^c f(s)ds < +\infty$ et $f'' \geq 0$ dans $]0,c[$, alors u_t explose en temps fini.*

Démonstration. (Voir [17]). D'après le Théorème 5.4.2, il existe $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < l$ tels que $\lim\limits_{t\to T^*(l)^-} \sup\limits_{]x_2,x_3[} u(t,.) = c$, $\sup\limits_{]0,T^*(l)[\times]0,x_2[} u < c$ et $\sup\limits_{]0,T^*(l)[\times]x_3,l[} u < c$. On pose

$$v = u_t, \text{ dans } [0, T^*(l)[\times[0,l].$$

Comme u est strictement croissante par rapport à t dans $]0, T^*(l)[\times]0,l[$,

$$v = u_t > 0, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]0,l[. \tag{5.9}$$

On note que v satisfait à

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} + b(x)v_x = f'(u)v \geq 0, \text{ dans }]\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times]x_1, x_4[, \\ v(t,x_1) > 0, \; v(t,x_4) > 0, \; t \in]\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[, \\ v(\frac{T^*(l)}{2}, x) > \min\limits_{]x_1,x_4[} v(\frac{T^*(l)}{2}, .), \; x \in]x_1, x_4[. \end{cases} \tag{5.10}$$

Soit z la solution du problème linéaire suivant

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} + b(x)z_x = 0, \text{ dans }]\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times]x_1, x_4[, \\ z(t,x_1) = z(t,x_4) = 0, \; t \in]\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[, \\ z(\frac{T^*(l)}{2}, x) = \delta\sin(\frac{\pi(x-x_1)}{x_4-x_1}), \; x \in]x_1, x_4[\end{cases} \tag{5.11}$$

avec $\delta = \min\limits_{x\in]x_1,x_4[} v(\frac{T^*(l)}{2}, x)$. On déduit de (5.10) et (5.9) que v est une sur solution du Problème (5.11). Le Théorème 1.4.4 donne

$$v(t,x) \geq z(t,x) \geq \gamma, \; (t,x) \in]\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times]x_1, x_4[,$$

avec $\gamma > 0$. On pose (k étant une constante strictement positive qu'on choisira)

$$w = v - kf(u), \text{ dans } [\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times[x_2, x_3].$$

Comme u est majorée par une constante strictement inférieure à c dans

$$[\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times\{x_2, x_3\} \cup \{\frac{T^*(l)}{2}\} \times [x_1, x_4],$$

alors il existe une constante positive k_1 telle que

$$f(u) \leq k_1, \text{ sur } [\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times\{x_2, x_3\} \cup \{\frac{T^*(l)}{2}\} \times [x_1, x_4].$$

On choisit $k \leq \frac{\gamma}{k_1}$. Il s'en suit

$$w \geq 0, \text{ dans } [\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times\{x_2, x_3\} \cup \{\frac{T^*(l)}{2}\} \times [x_2, x_3],$$

et

$$w_t - w_{xx} + b(x)w_x - f'(u)w = kf''(u)(w_x)^2 \geq 0, \text{ dans }]\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times]x_2, x_3[.$$

Utilisant le Théorème 1.4.4, on obtient

$$w \geq 0, \text{ dans }]\frac{T^*(l)}{2}, T^*(l)[\times]x_2, x_3[.$$

D'où $\lim\limits_{t \to T^*(l)} \sup\limits_{]x_2, x_3[} u_t(t, .) = +\infty$. □

5.5 Commentaire

Toutes les équations étudiées jusqu'à présent dans ce mémoire étaient des équations semi-linéaires. Nous signalons ici que certains auteurs se sont intéréssés au phénomène d'extinction pour les équations quasi-linéaires comme par exemple Winkler M. (2003, [30]), Yang Y., Jin C. H. & Yin J. X. (2010, [18]) Nie Y. Y., Wang C. P. & Zhou, Q. (2013, [26]). Ce dernier papier a considéré le problème quasi-linéaire et singulier suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + \chi_{\{u>0\}} u^{-\beta} = f(x, u), \text{ dans } Q_T \\ u = 0, \text{ sur } \Gamma_T, \\ u(0, .) = u_0, \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.12)$$

Dans $Q_T =]0,T[\times\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, où $\Gamma_T =]0,T[\times\partial\Omega$ et $\Delta_p u = \mathbf{div}(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u)$. L'exposant β vérifie $0 < \beta < 1$ et la donnée initiale u_0 est telle que :

$$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et } u_0 \geq 0, \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{5.13}$$

Quant à f, elle satisfait aux conditions suivantes :

1. $f : \Omega \times [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est une fonction de Carathéodory, localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable telle que

$$\forall \text{ p.p. } x \in \Omega,\ f(.,0) = 0.$$

2. f possède le comportement asymptotique suivant : il existe $q \geq 1$, $\alpha \geq 0$, $C_\alpha \geq 0$,

$$\forall \text{ p.p. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R},\ 0 \leq f(x,s) \leq \alpha \mid s \mid^{q-1} + C_\alpha. \tag{5.14}$$

   On note $\chi_{\{u>0\}}$, la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{(t,x) \in Q_T, u(t,x) > 0\}$$

   et on pose naturellement que $\chi_{\{u>0\}} u^{-\beta} = 0$ dès que $u = 0$.

L'espace dans lequel on cherchera les solutions de (5.12) est

$$U = \{v \in L^\infty(0,T,W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \backslash v_t \in L^2(Q_T)\}.$$

Une fonction $u \in U$ sera appelée solution faible du Problème (5.12) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. $u \geq 0$, p.p. dans Q_T.
2. Pour toute fonction test $\varphi \in U$, $\chi_{\{u>0\}} u^{-\beta}\varphi \in L^1(Q_T)$ et

$$\int_{Q_T} u_t \varphi dtdx + \int_{Q_T} \mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dtdx + \int_{Q_T} \chi_{\{u>0\}} u^{-\beta}\varphi dtdx = \int_{Q_T} f(x,u)\varphi dtdx, \tag{5.15}$$

3. $u(0,.) = u_0$ p.p. dans Ω.

Notons que $U \hookrightarrow C(0,T,L^2(\Omega))$, ce qui donne un sens à la Condition 3.

Les auteurs se sont posés les questions suivantes :

1. Existe-t-il une solution faible du Problème **(**5.12**)** ?
2. Que peut-on dire du comportement asymptotique des éventuelles solutions ?
3. Que peut-on dire sur la régularité des éventuelles solutions ?

Les deux théorèmes suivants donnent quelques éléments de réponse à ces interrogations.

Théorème 5.5.1. *(Voir [16], Theorem 2.1, p. 609). (**L'existence locale de la solution faible**). Soient u_0 satisfaisant à (5.13). Alors*
$\exists T^* > 0, \forall T < T^*$, le Problème (5.12) admet au moins une solution faible $u \in U$. Cette solution vérifie : Pour tous $t_1, t_2 \in [0,T]$

$$\frac{1}{2}\|u(t_2)\|_{2,\Omega} - \frac{1}{2}\|u(t_1)\|_{2,\Omega} + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \mid \nabla u \mid^p dz + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u^{1-\beta} dz = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega f(x,u)u dz \tag{5.16}$$

et pour tout $t \in]0,T[$,

$$\begin{aligned}\|u_t\|_{2,Q_T} + \tfrac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{p,\Omega} + \tfrac{1}{1-\beta}\int_\Omega u^{1-\beta}dx \quad & - \int_0^{u(t)} f(x,s)dsdx \leq \tfrac{1}{p}\|\nabla u_0\|^p_{p,\Omega} \\ & + \tfrac{1}{1-\beta}\int_\Omega u_0^{1-\beta}dx - \int_0^{u_0} f(x,s)dsdx,\end{aligned} \tag{5.17}$$

où $u(t) = u(t,.)$ p.p. dans Ω et $Q_t =]0,t[\times\Omega$.

Théorème 5.5.2. *(Voir [16], Theorem 2.2, p. 609). (**L'existence globale de la solution faible**). On suppose (5.13) et $q \leq p$. Si $\alpha < \lambda_1$, le Problème (5.12) admet une solution faible $u \in U$, globale et bornée.*
De plus, si α et C_α vérifient

$$\alpha + C_\alpha < \min\{1, \lambda_1\},$$

où λ_1 est la 1^{ere} valeur propre du p-Laplacien caractérisée par

$$\lambda_1 = \inf\{\int_\Omega \mid \nabla v \mid^p dx \in \mathbb{R}^+ \setminus v \in W_0^{1,p}(\Omega) \int_\Omega \mid v \mid^p dx = 1\},$$

alors pour tout $u \in U$ *il existe* $T^* > 0$ *qui dépend de* p, d, $\mid \Omega \mid = mes(\Omega), \alpha, \lambda_1, \| u_0 \|_{L^2(\Omega)}$ *et* $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ *tel que pour tout* $t \geq T^*$, $u(t) = 0$ *p.p. dans* Ω.