Chapitre 4

Phénomène d'extinction pour une équation parabolique semi-linéaire dégénérée

(D'après l'article de L. Ke et S. Ning : *Quenching for degenerate parabolic equations*. Nonlinear Analysis., 34 : 1123- 1135, 1998. [20])

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la détermination des conditions suffisantes d'extinction de la solution en temps fini pour le problème parabolique semi-linéaire dégénéré suivant

$$\begin{cases} u_t - (p(x)u_x)_x = f(u), \text{ dans }]0,T[\times]0,l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ t \in]0,T[, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in]0,l[\end{cases} \tag{4.1}$$

où $0 < T \leq +\infty$ et

(1) $p(0) = 0$, $p \in C^1(]0,+\infty[)$, $p(x) > 0$ dans $]0,+\infty[$, $\frac{1}{p} \in L^1([0,l])$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$.

(2) $f(0) > 0$, $f \in C^2(]0,1[)$, $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$, $\lim\limits_{s \to 1^-} f(s) = +\infty$ et $\int_0^1 f(s)ds < \infty$.

(3) $u_0 \in C^{2+\alpha}(]0,l[) \cap C([0,l])$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$ avec $0 \leq u_0 < 1$, $u_0(0) =$

$u_0(l) = 0$ et $\int_0^l p(x)u_0'^2(x)dx < \infty$.

Comme exemples de fonctions f, p et u_0 on peut donner les fonctions définies par

$$f(s) = \frac{1}{(1-s)^{\frac{1}{2}}},\ s \in]0,1[,$$

$$p(x) = x^{\frac{1}{2}},\ x \in]0,l[,$$

et

$$u_0(x) = Ax(l-x),\ A < \left(\frac{2}{l}\right)^2.$$

Notre but ici est d'illustrer le cas d'une équation dégénérée où apparait le phénomène d'extinction.

4.2 Existence et unicité de la solution

On condidère le problème suivant

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,t} - (p(x)u_{\varepsilon,x})_x = f(u_\varepsilon), \text{ dans }]0,T[\times]\varepsilon,l[, \\ u_\varepsilon(t,\varepsilon) = u_\varepsilon(t,l) = 0,\ t \in]0,T[, \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x),\ x \in]\varepsilon,l[, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\varepsilon \in]0,l[$. On note par $u_{\varepsilon,x}$ (resp. $u_{\varepsilon,t}$, $u_{\varepsilon,x,t}$) la dérivée de u_ε par rapport à x (resp. t, x et t).

Remarque 4.1. *On sait que ce problème admet une solution $u_\varepsilon \in C^{1,2}$ dans un certain domaine $]0,t_0[\times]\varepsilon,l[$ qui est continue sur $[0,t_0[\times]\varepsilon,l]$ et sur $]0,t_0[\times[\varepsilon,l]$ (voir [14]).*

Lemme 4.1. *Soit u_0 définie dans (4.1). on a*

1) $u \equiv 0$ est sous solution du Problème (4.2).

2) Il existe $t_0 \in]0,T[$ telle que la solution du problème

$$\begin{cases} w'(t) = f(w),\ t \in]0,t_0[\\ w(0) = \max\limits_{x \in]0,l[} u_0(x) \end{cases} \tag{4.3}$$

soit sur solution du Problème (4.2).

Lemme 4.2. *(Voir [20], Lemma 2.2, p.1125). Soit u_ε la solution du Problème (4.2) dans $]0,t_0[\times]\varepsilon,l[$. Si $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<l$, alors $u_{\varepsilon_1}>u_{\varepsilon_2}$ dans $]0,t_0[\times]\varepsilon_2,l[$.*

Démonstration. (Voir [20]). On a $f(0)>0$, alors $u_{\varepsilon,t}-(p(x)u_{\varepsilon,x})_x > f(u_\varepsilon)-f(0)$, d'où

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,t}-(p(x)u_{\varepsilon,x})_x > f(\eta)u_\varepsilon, \text{ dans }]0,t_0[\times]\varepsilon,l[,\\ u_\varepsilon(t,\varepsilon)=u_\varepsilon(t,l)=0,\ t\in]0,t_0[,\\ u_\varepsilon(0,x)=u_0(x),\ x\in]\varepsilon,l[,\end{cases}$$

où η est entre $u_\varepsilon(t,x)$ et 0. Par le Théorème 1.4.4, $u_\varepsilon>0$ dans $]0,t_0[\times]\varepsilon,l[$. On pose $w=u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2}$ dans $[0,t_0[\times[\varepsilon_2,l]$. On a

$$\begin{cases} w_t-(p(x)w_x)_x = f'(\eta)w, \text{ dans }]0,t_0[\times]\varepsilon_2,l[,\\ w(t,\varepsilon_2)=u_{\varepsilon_1}(t,\varepsilon_2)>0,\ w(t,l)=0,\ t\in]0,t_0[,\\ w(0,x)=0,\ x\in]\varepsilon_2,l[,\end{cases}$$

et η est entre $u_{\varepsilon_1}(t,x)$ et $u_{\varepsilon_2}(t,x)$. Le Théorème 1.4.4, implique que $u_{\varepsilon_1}>u_{\varepsilon_2}$. □

Lemme 4.3. *(Voir [20], Lemma 2.3, p.1126). Soit u_ε la solution du Problème (4.2). Il existe une constante b telle que $\int_\varepsilon^l p(x)(u_{\varepsilon,x}(t,x))^2dx<b$, $t\in]0,t_0[$.*

Démonstration. (Voir [20]). Soit

$$E(t,\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_\varepsilon^l p(x)(u_{\varepsilon,x}(t,x))^2dx-\int_\varepsilon^l\int_0^{u_\varepsilon} f(s)dsdx,\ t\in]0,t_0[.$$

Alors

$$\begin{aligned} E_t(t,\varepsilon) &= \textstyle\int_\varepsilon^l p(x)u_{\varepsilon,x}(t,x)u_{\varepsilon,x,t}(t,x)dx-\int_\varepsilon^l f(u_\varepsilon(t,x))u_{\varepsilon,t}(t,x)dx\\ &= p(x)u_{\varepsilon,x}(t,x)u_{\varepsilon,t}(t,x)\ |_0^l-\textstyle\int_\varepsilon^l(p(x)u_{\varepsilon,x}(t,x))_x u_{\varepsilon,t}(t,x)dx\\ &-\textstyle\int_\varepsilon^l f(u_\varepsilon(t,x))u_{\varepsilon,t}(t,x)dx\\ &=-\textstyle\int_\varepsilon^l(u_{\varepsilon,t}(t,x))^2dx\le 0,\end{aligned}$$

car $u_{\varepsilon,t}(t,0)=u_{\varepsilon,t}(t,l)=0$, $t\in]0,t_0[$. Ainsi, on trouve que pour $t\in]0,t_0[$

$$E(t,\varepsilon)\le E(0,\varepsilon),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{l} p(x)(u_{\varepsilon,x}(t,x))^2dx-\int_{\varepsilon}^{l}\int_{0}^{u_\varepsilon} f(s)dsdx \leq \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{l} p(x)(u_0'(x))^2dx-\int_{0}^{l}\int_{0}^{u_0} f(s)dsdx.$$

Par suite

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{l} p(x)(u_{\varepsilon,x}(t,x))^2dx \leq \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{l} p(x)(u_0'(x))^2dx-\int_{\varepsilon}^{l}\int_{0}^{u_0} f(s)dsdx+\int_{\varepsilon}^{l}\int_{0}^{u_\varepsilon} f(s)dsdx.$$

D'où

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{l} p(x)(u_{\varepsilon,x}(t,x))^2dx \leq \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{l} p(x)(u_0'(x))^2dx+\int_{\varepsilon}^{l}\int_{u_0}^{u_\varepsilon} f(s)dsdx.$$

Comme $f' \geq 0$, $f(0) > 0$ et $p(x) > 0$, on a

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{l} p(x)(u_{\varepsilon,x}(t,x))^2dx < \frac{1}{2}\int_{0}^{l} p(x)(u_0'(x))^2dx+l\int_{0}^{1} f(s)ds.$$

On peut donc poser $b=\int_0^l p(x)(u_0'(x))^2dx+2l\int_0^1 f(s)ds$. □

Théorème 4.2.1. *(Voir [20], Theorem 2.4, p.1127). On définit la fonction u par* $u(t,x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t,x)$, u_ε *étant la solution du Problème (4.2). Alors* $u(t,x)$ *est solution du Problème (4.1) et vérifie à* $u\in C^{1,2}(]0,t_0[\times]0,l[)\cap C([0,t_0[\times[0,l])$.

Cette démonstration utilise le lemme précédent et le Lemme 4.2 qui prouve l'existence de la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$. Voir les details dans ([20], p.1127).

Rappelons, pour la suite de ce chapitre, que

$$\begin{aligned} T^*(l)= \quad & \sup\Big\{T>0 : \text{le Problème (4.1) admet une solution} \\ & u\in C^{1,2}(]0,T[\times]0,l[)\cap C([0,T]\times[0,l]) \text{ et } \sup_{]0,T[\times]0,l[} u<1\Big\}. \end{aligned}$$

4.3 Résultats principaux

Théorème 4.3.1. *(Voir [20], Theorem 2.6, p.1128). Soit u la solution du Problème (4.1). Si* $T^*(l)<\infty$, *alors il existe un* $x^*\in]0,l[$ *tel que*

$$\lim_{(t,x)\to(T^*(l),x^*)} u(t,x)=1.$$

Démonstration. D'après le Théorème 4.2.1, la fonction définie par $u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t,x)$ où u_ε satisfaisant à

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,t} - (p(x)u_{\varepsilon,x})_x = f(u_\varepsilon), \text{ dans }]T^*(l), T^*_\varepsilon(l)[\times]\varepsilon, l[, \\ u_\varepsilon(t,\varepsilon) = u_\varepsilon(t,l) = 0, \ t \in]T^*(l), T^*_\varepsilon(l)[, \\ u_\varepsilon(T^*(l), x) = u(T^*(l), x), \ x \in]\varepsilon, l[\end{cases} \tag{4.4}$$

où u est la solution du Problème (4.1).

Pour la preuve de ce théorème, on raisonne par l'absurde : il existe c_0 telle que

$$u \leq c_0 < 1, \text{ dans } [0, T^*(l)[\times[0,l]. \tag{4.5}$$

Soit

$$\overline{u} = c_0 \exp\left(f(c_1)(\frac{t - T^*(l)}{c_0})\right), \ (t,x) \in]T^*(l), T_1[\times]\varepsilon, l[$$

où $c_1 = \frac{c_0+1}{2}$, $T_1 = T^*(l) + \frac{c_0(\ln c_1 - \ln c_0)}{f(c_1)}$. D'après la Relation (4.5), on a $\lim_{t\to T^*(l)} u(t,x) \leq c_0$. $\overline{u}$ satisfait à

$$\begin{cases} \overline{u}_t - \overline{u}_{xx} = f(c_1)\exp(f(c_1)(\frac{t-T^*(l)}{c_0}) \geq f(c_1) \geq f(\overline{u}) \\ \overline{u}(t,\varepsilon) \geq u_\varepsilon(t,\varepsilon), \ \overline{u}(t,l) = u_\varepsilon(t,l) = 0, \\ \overline{u}(T^*(l), x) = c_0 \geq u_\varepsilon(T^*(l), x), \end{cases}$$

et $\overline{u}(T_1, x) = c_1 < 1$. Alors $\overline{u}$ est une sur solution du Problème (4.4) dans $[T^*(l), T_1] \times [0,l]$, i.e, $0 \leq u_\varepsilon \leq \overline{u} \leq \overline{u}(T_1,x) = c_1 < 1$ dans $[0,T_1] \times [\varepsilon, l]$. Par suite u_ε existe dans $[0,T_1] \times [\varepsilon, l]$. Donc $u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t,x) \leq c_1 < 1$. Par conséquent, u existe dans $[0,T_1] \times [0,l]$. Ce qui contredit le fait que $T^*(l) \geq T_1$. $\square$

Lemme 4.4. *(Voir [20], Lemma 2.7, p.1129). Soit u la solution du Problème (4.1). Si $-(p(x)u_0'(x))' \leq f(u_0(x))$ pour $x \in]0,l[$, alors la solution du Problème (4.1) est croissante par rapport à t. De plus, si*

$$-(p(x)u_0')' < f(u_0)$$

sur une partie de $]0,l[$, alors $u_t > 0$ sur $]0, T^*(l)[\times]0,l[$.

Démonstration. (Voir [20]) On pose $w = u(t+h,x) - u(t,x)$ dans $[0, T^*(l) - h] \times [0, l]$, $h \in]0, T^*(l)[$. Comme $-(p(x)u_0'(x))' \leq f(u_0(x))$ pour $x \in]0, l[$ et $u(0) = u(l) = 0$, u_0 est une sous solution du Problème (4.1), i.e., $u(t,x) \geq u_0(x)$ dans $]0, T^*(l)[\times]0, l[$. w satisfait à

$$\begin{cases} w_t - (p(x)w_x)_x = f'(\eta)w, \text{ dans }]0, T^*(l) - h[\times]0, l[, \\ w(t,0) = w(t,l) = 0, \ t \in]0, T^*(l) - h[, \\ w(0,x) = u(h,x) - u_0(x) \geq 0, \ x \in]0, l[\end{cases} \tag{4.6}$$

où η est entre $u(t+h,x)$ et $u(t,x)$. Par le Théorème 1.4.4, on a $w \geq 0$ dans $[0, T^*(l) - h] \times [0, l]$. Soient $t_1, t_2 \in [0, T^*(l)[$ tels que $t_1 < t_2$. En choisissant $h = t_2 - t_1$ et $t = t_1$ on trouve que

$$u(t+h,x) - u(t,x) = u(t_2,x) - u(t_1,x).$$

Comme $u(t+h,x) - u(t,x) \geq 0$, on a $u(t_2,x) - u(t_1,x) \geq 0$, i.e., $u(t_1,x) \leq u(t_2,x)$. Ce qui implique que u est croissante par rapport à t dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$. Par suite $u_t \geq 0$ dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$.

Par ailleurs, si en plus, $(p(x)u_0')' < f(u_0)$ sur une partie D de $]0, l[$, on a $u(h,x) - u_0(x) > 0$ sur D. D'aprés le résultat précédent, on a $w \geq 0$ dans $[0, T^*(l) - h] \times [0, l]$. S'il existe $(t_0, x_0) \in]0, T^*(l)[\times]0, l[$ tel que $w(t_0, x_0) = 0$, alors $w \equiv 0$ dans $[0, t_0] \times [0, l]$. Cela contredit le fait que $w(h,x) = u(h,x) - u_0(x) > 0$ sur D. □

Lemme 4.5. *(Voir [20], Lemma 2.8, p.1129). Soit u la solution du Problème (4.1). Si $(p(x)u_0')' \leq f(u_0)$ dans $]0, l[$ et $-(p(x)u_0')' < f(u_0)$ sur une partie de $]0, l[$, alors pour tout sous ensemble $[t_0, T^*(l)[\times]x_0, x_1[\subset]0, T^*(l)[\times]0, l[$ il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $u_t \geq c_1 > 0$ dans $[t_0, T^*(l)[\times[x_0, x_1]$.*

Démonstration. (Voir [20]) On considère le problème suivant

$$\begin{cases} v_t - (p(x)v_x)_x = f(u_0), \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ v(t,0) = v(t,l) = 0, \ t \in]0, +\infty[, \\ v(0,x) = u_0(x), \ x \in]0, l[. \end{cases} \tag{4.7}$$

Il admet une solution unique v dans $[0,+\infty[\times[0,l]$. La méthode de démonstration du lemme précédent conduit à $v_t > 0$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$. D'autre part, on a $u \geq u_0$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$, car $-(p(x)u_0'(x))' \leq f(u_0(x))$ pour $x \in]0,l[$ et $u(0) = u(l) = 0$, impliquent que u_0 est une sous solution du Problème (4.1). Comme $f' \geq 0$, alors $f(u) > f(u_0)$.

Ainsi, (4.7) et le Théorème 1.4.4 donnent $u > v$ dans $]0,T^*(l)[\times]0,l[$. Soit $w = u - v$ dans $[0,T^*(l)[\times[0,l]$. Comme $v_t > 0$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$ alors $w_t < u_t$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$. On sait que $f' \geq 0$, alors

$$\begin{cases} (w_t)_t - (p(x)(w_t)_x)_x = f'(u)u_t \geq f'(u)w_t, \text{ dans }]0,T^*(l)[\times]0,l[, \\ w_t(t,0) = w_t(t,l) = 0, \; t \in]0,T[, \\ w_t(0,x) = 0, \; x \in]0,l[. \end{cases}$$

Par le Théorème 1.4.4, on a $w_t \geq 0$ dans $[0,T^*(l)[\times[0,l]$. Donc $u_t \geq v_t$ dans $[0,T^*(l)[\times[0,l]$. Soit $c_1 = \min\limits_{(t,x)\in[t_0,T^*(l)[\times]x_0,x_1[} v_t(t,x) > 0$, alors $u_t \geq v_t > c_1$ dans $[t_0,T^*(l)[\times[x_0,x_1]$. La preuve est terminée. □

4.4 Longueur critique

Dans cette section, on suppose que $u_0 \equiv 0$ dans $]0,l[$.

Théorème 4.4.1. *(Voir [20], Theorem 3.1, p.1130). Soit u la solution du Problème (4.1). On suppose que $T^*(l) = +\infty$ et qu'il existe une constante $c \in]0,1[$ telle que $u \leq c$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$.*

Alors $u(t,x)$ converge vers $U(x)$ quand $t \to +\infty$, solution du problème suivant

$$\begin{cases} -(p(x)U_x)_x = f(U), \text{ dans }]0,l[, \\ U(0) = U(l) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

De plus, $u(t,x) < U(x)$ pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[$.

Démonstration. (Voir [20]). Le raisonnement est similaire à la démonstration du Théorème 3.2.1. Ainsi, si $-(p(x)U_x)_x = 0$ dans $]0,l[$, alors $p(x)U_x = c_1$ dans $]0,l[$ où c_1

est une constante.

Il existe une constante c_2 telle que

$$U(x) = c_1 \int_0^x (p(s))^{-1} ds + c_2.$$

Comme $U(0) = U(l) = 0$, $c_1 = c_2 = 0$. Par suite $U \equiv 0$. Alors le noyau de Green associé au Problème (4.8) existe. Soit

$$F(t,x) = \int_0^l G(x,y) u(t,y) dy,\ (t,x) \in [0,+\infty[\times[0,l].$$

On note que F est bornée dans $[0,+\infty[\times[0,l]$, car G et u sont bornées sur $[0,l]^2$ et dans $[0,+\infty[\times[0,l]$ respectivement. Pour $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[$, on a (d'après (4.8))

$$\begin{aligned} F_t(t,x) &= \int_0^l G(x,y) u_t(t,y) dy \\ &= -\int_0^l G(x,y)(Lu(t,y) + f(u(t,y))dy \\ &= -\int_0^l G(x,y) Lu(t,y) dy + \int_0^l G(x,y) f(u(t,y)) dy \\ &= -\int_0^l u(t,y) LG(x,y) dy + \int_0^l G(x,y) f(u(t,y)) dy \\ &= u(t,x) + \int_0^l G(x,y) f(u(t,y))) dy \end{aligned}$$

où $Lu(t,x) = -(p(x)u_x(t,x))_x$, $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[$. Comme $u_t \geq 0$ dans $[0,+\infty[\times[0,l]$ et f est continue, on déduit

$$\lim_{t\to+\infty} F_t(t,x) = -\lim_{t\to+\infty} u(t,x) + \int_0^l G(x,y) f(\lim_{t\to+\infty} u(t,y)) dy,\ x \in]0,l[.$$

On en déduit que $F_t \geq 0$ dans $[0,+\infty[\times[0,l]$, car $G \geq 0$ et $u_t \geq 0$ dans $[0,l]^2$ et dans $[0,+\infty[\times[0,l]$ respectivement. Alors

$$\lim_{t\to+\infty} F_t(t,x) = 0,\ x \in [0,l],$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = \int_0^l G(x,y) f(\lim_{t\to+\infty} u(t,y)) dy,\ x \in]0,l[.$$

Donc

$$U(x) = \int_0^l G(x,y) f(U(y)) dy,\ x \in]0,l[.$$

D'où

$$-(p(x)U_x)_x = \int_0^l LG(x,y)f(U(y)))dy = f(U(x)),\ x \in]0,l[\text{ et } U(0) = U(l) = 0.$$

Comme $U(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$, $x \in [0,l]$ et u est strictement croissante, alors $U(x) > u(t,x)$ pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[$, ce qui termine la preuve. $\square$

Lemme 4.6. *(Voir [20], Lemma 3.2, p.1131). On note u_l la solution du Problème (4.1) dans $[0,T^*(l)[\times[0,l]$, alors $u_{l+\alpha}(t,x) > u_l(t,x,l)$, $(t,x) \in [0,T^*(l)[\times[0,l]$ pour tout $\alpha \geq 0$.*

Démonstration. (Voir [20]). On pose $w(t,x) = u_{l+\alpha}(t,x) - u_l(t,x)$, $(t,x) \in [0,T^*(l)[\times[0,l]$. La fonction w est solution du problème suivant

$$\begin{cases} w_t - (p(x)w_x)_x = f'(\eta)w, \text{ dans }]0,T^*(l)[\times]0,l[, \\ w(t,0) = 0,\ t \in]0,T^*(l)[, \\ w(t,l) = u_{l+\alpha}(t,l) > 0,\ t \in]0,T^*(l)[, \\ w(0,x) = 0,\ x \in]0,l[, \end{cases}$$

où η est entre $u_{l+\alpha}(t,x)$ et $u_l(t,x)$. Par le Théorème 1.4.4, on a $w > 0$. $\square$

Considérons maintenant le problème suivant

$$\begin{cases} -(p(x)\psi')' = f(0), \text{ dans }]0,l[, \\ \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

La solution de ce problème est

$$\psi(x) = -f(0)[\int_0^x y(p(y))^{-1}dy - \frac{\int_0^l y(p(y))^{-1}dy}{\int_0^l (p(y))^{-1}dy}\int_0^x (p(y))^{-1}dy],\ x \in [0,l], \tag{4.10}$$

avec

$$\max_{x\in[0,l]} \psi(x) = \psi(x_M) \tag{4.11}$$

où $x_M = \frac{\int_0^l x(p(x))^{-1}dx}{\int_0^l (p(x))^{-1}dx}$.

Lemme 4.7. *(Voir [20], Lemma 3.3, p.1132). Soit φ la solution du Problème (4.8), alors $\varphi \geq \psi$ sur $[0,l]$.*

Démonstration. (Voir [20]). Comme $\varphi \geq 0$ et $f' \geq 0$, alors $f(\varphi) \geq f(0)$. On a $-(p(x)(\varphi - \psi)')' = f(\varphi) - f(0) \geq 0$ et $(\varphi - \psi)(0) = (\varphi - \psi)(l) = 0$, Le Corollaire 1.3.2 implique $\varphi \geq \psi$ sur $[0, l]$. □

Lemme 4.8. *(Voir [20], Lemma 3.4, p.1132). Si l est assez grand, il n'existe pas de solution globale pour le Problème (4.1).*

Démonstration. (Voir [20]). On a $\int_0^{+\infty}(p(x))^{-1}dx = \infty$ et $x_M = \frac{\int_0^l x(p(x))^{-1}dx}{\int_0^l (p(x))^{-1}dx} \to \infty$ pour $l \to +\infty$. De (4.11) et (4.10), on obtient

$$\psi(x_M) = -f(0)(\int_0^{x_M} x(p(x))^{-1}dx - x_M\int_0^{x_M}(p(x))^{-1}dx)$$

et

$$\frac{d\psi}{dx_M}(x_M) = f(0)\int_0^{x_M}(p(x))^{-1}dx \to \infty \text{ pour } l \to +\infty.$$

On a $\psi(x_M) = \int_0^{x_M} \frac{d\psi}{dx_M}(x)dx \to \infty$ pour $l \to +\infty$. Donc il existe l assez grand tel que $\psi(x_M) > 1$. Comme $\varphi \geq \psi$, le Théorème 4.4.1 montre que la solution du Problème (4.8) est non globale pour ce l, car si la solution du Problème (4.8) était globale alors $\varphi(x) = \lim_{t\to+\infty} u(t,x) < 1$, $x \in [0, l]$. Ce qui contredit le fait que $\varphi \geq \psi(x_M) > 1$. □

Lemme 4.9. *(Voir [20], Lemma 3.5, p.1132). Il existe une solution globale du Problème (4.1) si l est assez petit.*

Démonstration. (Voir [20]). Pour tout $M > f(0)$, on considère le Problème suivant

$$\begin{cases} -(p(x)\varphi')' = M, \text{ dans }]0, l[, \\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{l\to 0}\varphi(x_M) = -M\lim_{l\to 0}(\int_0^{x_M} x(p(x))^{-1}dx - x_M\int_0^{x_M}(p(x))^{-1}dx) = 0.$$

Alors il existe $l > 0$ tel que $M \geq f(\varphi(x_M))$ quand l est voisin de 0, puisque $\varphi(x_M) \to 0$ lorsque $l \to 0$ et $M > f(0)$. On choisira l voisin de 0 de sorte que $M \geq f(\varphi(x_M))$ et $\varphi(x_M) < 1$. Ainsi, φ est une sur solution de (4.1) dans $[0, +\infty[\times[0, l]$ en prenant

$u_0 \equiv 0$. Comme 0 est une sous solution de (4.1), alors il existe une solution u telle que $0 \leq u \leq \varphi(x_M) < 1$. Donc $\sup_{]0,+\infty[\times]0,l[} u < 1$. D'où la solution du Problème (4.1) est globale. □

D'après les lemmes précédents, on a

Théorème 4.4.2. *(Voir [20], Theorem 3.6, p.1133). Il existe une unique longueur critique l^* du Problème (4.1).*

4.5 Extinction en temps fini

Théorème 4.5.1. *(Voir [20], Theorem 4.1, p.1133). Soit u la solution du Problème (4.1). Pour toute constante positive $c_0 < 1$, il existe x_0 et x_1 avec $0 < x_0 < x_1 < l$ tels que $u < c_0$ dans $[0, T^*(l)[\times([0, x_0] \cup [x_1, l])$.*

Démonstration. (Voir [20]). (faire $\varepsilon \to 0$ dans le Lemme 4.3) Il existe une constante positive b telle que

$$\int_0^l p(x)(u_x(t,x))^2 dx \leq b.$$

Comme $\int_0^x p(x)(u_x(t,x))^2 dx < \infty$ et $\int_0^x (p(x))^{-1} dx < \infty$ pour $x \in [0,l]$ (car $p \in L^1([0,l])$), alors on a

$$\int_0^x p(x)(u_x(t,x))^2 dx \to 0, \text{ quand } x \to 0,$$

et

$$\int_0^x (p(x))^{-1} dx \to 0, \text{ quand } x \to 0.$$

Alors pour toute constante positive $c_0 < 1$, il existe $x_0 \in]0, \frac{l}{2}[$ tel que pour tout $x \in]0, x_0[$ et pour tout $t \in [0, T^*(l)[$

$$\left(\int_0^x p(x)(u_x(t,x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (p(x))^{-1} dx\right)^{\frac{1}{2}} < c_0.$$

Notons aussi que

$$\int_x^a p(x)(u_x(t,x))^2 dx \to 0 \text{ quand } x \to a,$$

et

$$\int_x^a (p(x))^{-1}dx \to 0 \text{ quand } x \to a.$$

Alors pour toute constante positive $c_0 < 1$, il existe $x_0 \in]\frac{l}{2}, l[$ tel que pour tout $x \in]x_0, l[$ et pour tout $t \in [0, T^*(l)[$

$$\left(\int_x^l p(x)(u_x(t,x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^l (p(x))^{-1}dx\right)^{\frac{1}{2}} < c_0.$$

On a pour tout $(t,x) \in]0, T^*(l)[\times]0, x_0[$, $x_0 \in [0, \frac{l}{2}]$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \textstyle\int_0^x u_x(t,x)dx \\ &= \textstyle\int_0^x p(x)^{\frac{1}{2}}(p(x))^{\frac{-1}{2}}u_x(t,x)dx \\ &\leq \left(\textstyle\int_0^x (p(x))^{-1}dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\textstyle\int_0^x p(x)(u_x(t,x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_0, \end{aligned}$$

et pour tout $(t,x) \in]0, T^*(l)[\times]x_1, l[$, $x_1 \in [\frac{l}{2}, l]$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \textstyle\int_a^x u_x(t,x)dx \\ &= -\textstyle\int_x^a (p(x))^{\frac{-1}{2}}p(x)^{\frac{1}{2}}u_x(t,x)dx \\ &\leq \left(\textstyle\int_x^a (p(x))^{-1}dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\textstyle\int_x^a p(x)(u_x(t,x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in]0, T^*(l)[$, $u < c_0$ dans $]0, T^*(l)[\times([0, x_0] \cup [x_1, l])$. □

Théorème 4.5.2. *(Voir [20], Theorem 4.2, p.1134). Soit u la solution du Problème (4.1). Supposons que $(p(x)u_0')' \leq f(u_0)$ dans $]0, l[$ et $(p(x)u_0')' < f(u_0)$ sur une partie de $]0, l[$. Si $\max\{u(t,x), x \in [0, l]\} \to 1$ pour $t \to T^*(l)^- < \infty$, alors la solution u s'éteint.*

Démonstration. (Voir [20]). Soit $0 < \delta$. On pose $w = u_t - \delta f(u)$, dans $]0, +\infty[\times]0, l[$. On a

$$w_t = u_{tt} - \delta f'(u)u_t, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]0, l[,$$

$$w_x = u_{tx} - \delta f'(u)u_x, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]0, l[,$$

$$\begin{aligned}(p(x)w_x)_x &= (p(x)(u_t - \delta f(u))_x)_x \\ &= (p(x)(u_t))_x - (\delta p(x)(f(u))_x)_x \\ &= (p(x)(u_t))_x - (\delta p(x)u_x f'(u))_x \\ &= (p(x)(u_t))_x - \delta(p(x)u_x)_x f'(u) - \delta p(x)u_x^2 f''(u),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}w_t - (p(x)w_x)_x &= u_{tt} - \delta f'(u)u_t - (p(x)(u_t))_x + \delta(p(x)u_x)_x f'(u) + \delta p(x)u_x^2 f''(u), \\ &= (u_{tt} - (p(x)(u_t))_x) - (\delta f'(u)u_t - \delta(p(x)u_x)_x f'(u)) + \delta p(x)u_x^2 f''(u), \\ &= (u_t - (p(x)u)_x)_t - \delta f'(u)(u_t - (p(x)u_x)_x) + \delta p(x)u_x^2 f''(u), \\ &= f'(u)u_t - \delta f'(u)f(u) + \delta p(x)u_x^2 f''(u), \\ &= f'(u)w + \delta p(x)u_x^2 f''(u).\end{aligned}$$

Alors

$$w_t - (p(x)w_x)_x - f'(u)w = \delta p(x)u_x^2 f''(u) \geq 0, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]0, l[. \tag{4.12}$$

Soit $t_0 \in]0, T^*(l)[$ loin de $T^*(l)$ et $c_0 \in]0, 1[$. D'après le Théorème 4.5.1, il existe x_0 et x_1, avec $0 < x_0 < x_1 < l$, tels que $u < c_0$ dans $[0, T^*(l)[\times([0, x_0] \cup [x_1, l])$. Comme t_0 est loin de $T^*(l)$, il existe une constante $c_1 < 1$ telle que $u < c_1$ dans $\{t_0\} \times [x_0, x_1]$. Alors

$$u < c = \max\{c_0, c_1\}, \text{ dans } [t_0, T^*(l)[\times\{x_0, x_1\} \cup \{t_0\} \times [x_0, x_1].$$

Comme $(p(x)u_0')' \leq f(u_0)$ dans $]0, l[$ et $(p(x)u_0')' < f(u_0)$ sur une partie de $]0, l[$, il existe $c_2 > 0$ telle que $u_t \geq c_2 > 0$ dans $[t_0, T^*(l)[\times[x_0, x_1]$ (d'après le Lemme 4.5). On sait que f est strictement croissante, donc $f(u) < f(c)$ dans $[t_0, T^*(l)[\times\{x_0, x_1\} \cup \{t_0\} \times [x_0, x_1]$. Notons que $f(c)$ est définie car $0 \leq c < 1$. On choisit $0 < \delta < \frac{c_2}{f(c)}$, alors

$$w = u_t - \delta f(u) > u_t - \frac{c_2}{f(c)} f(u) > u_t - c_2 \geq 0,$$

dans $[t_0, T^*(l)[\times\{x_0, x_1\} \cup \{t_0\} \times [x_0, x_1]$. Alors

$$w \geq 0 \text{ sur } [t_0, T^*(l)[\times\{x_0, x_1\} \cup \{t_0\} \times [x_0, x_1].$$

Par le Théorème 1.4.4 et la Relation (4.12), on obtient $w \geq 0$ dans $[t_0, T^*(l)[\times[x_0, x_1]$. Cela veut dire que $u_t \geq \delta f(u)$ dans $[t_0, T^*(l)[\times[x_0, x_1]$. Le Théorème 4.5.1 conduit à $x^* \in]x_0, x_1[$. Donc

$$\lim_{(t,x)\to(T^*(l)^-,x^*)} u_t \geq \lim_{u\to 1^-} \delta f(u) = +\infty.$$

Ainsi

$$\lim_{t\to T^*(l)^-} \max\{u_t(t,x), x \in [0,l]\} = +\infty.$$

□

Remarque 4.2. *(Voir [20], Remark, p.1135). D'après la démonstration précédente, on peut voir que* $u(t,x) \to 1$ *implique* $u_t(t,x) \to \infty$, $(t,x) \in [0, T^*(l)[\times[0,l]$.