Chapitre 3

Phénomène d'extinction pour des équations semi-linéaires singulières paraboliques

(D'après l'articles de Chan C. Y. et Kwong M. K. : *Qenching phenomena for singular nonlinear parabolic equations*. Nonlinear Analysis, Theory. Methods & Applications, Vol. 12, No. 12, pp. 1377-1383. 1988, [8])

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le Problème (2.2) dans un cadre plus général. Nous distinguons deux cas

— **1^er^ cas**, l'Équation (2.1) où $\Omega =]0, l[$ et f satisfait à

$$\begin{cases} f \in C^2([0,c[),\ f(0) > 0, \\ \quad \lim\limits_{s \to c^-} f(s) = +\infty, \\ \quad \int_0^c f(s) ds = \infty, \\ \quad f' > 0 \text{ sur } [0, c[, \\ \quad f'' > 0 \text{ sur } [0, c[. \end{cases} \tag{3.1}$$

On associera à ce problème une condition de Dirichlet homogène ou une condition de Neumann non homogène

— **2$^{\text{ème}}$ cas**, on considère l'équation suivante

$$u_t = u_{xx} + f(u, u_x), \text{ dans }]0, T[\times]0, l[,$$

où f satisfait à

$$\begin{cases} f \in C^1([0, c[\times\mathbb{R}), \ f(0,0) > 0, \\ \lim\limits_{s \to c^-} f(s,p) = \infty \text{ uniforme, pour tout } p \text{ appartenant à un intervalle borné,} \\ \forall \rho > 0\,, \exists \psi_\rho(u) \text{ telle que } \psi_\rho \leq f(u,p), \ \forall \mid p \mid \leq \rho \text{ et } \psi_\rho(u) \to \infty \text{ quand } u \to c^-, \\ f \text{ est croissante par rapport à la première variable.} \end{cases} \tag{3.2}$$

De même, on distingue deux problèmes dans ce cas, l'un associé à une condition de Dirichlet homogène et l'autre associé à une condition de Neumann non homogène, en plus d'une condition initiale $u(0,x) = 0$, $x \in]0, l[$.

3.2 Étude du 1$^{\text{er}}$ cas

3.2.1 Conditions de Dirichlet

Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0, l[\end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$f : \quad [0, c[\quad \to \quad \mathbb{R}.$$

Soient $T^*(l)$ et l^* définis par

$$\begin{aligned} T^*(l) = \ & \sup\{T > 0 : \text{le Problème (3.3) admet une solution} \\ & u \in C([0,T] \times [0,l]) \cap C^{1,2}(]0,T[\times]0,l[) \text{ et } \sup_{(t,x)\in]0,T[\times]0,l[} u_l(t,x) < c\}, \end{aligned}$$

et on notera u_l la solution de (3.3) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$

$$l^* = \sup\{l > 0 : T^*(l) = +\infty \text{ et } \sup_{(t,x)\in]0,T^*(l)[\times]0,l[} u_l(t, x) < c\}$$

l^* est appelé longueur critique du Problème (3.3).

Lemme 3.1. *(Voir [24], Lemma 1(a), p.844). Soit u la solution du Problème (3.3) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$. Alors les dérivées u_{tt}, u_{txx} et u_{xxx} sont continues sur $]0, T^*(l)[\times]0, l[$.*

Lemme 3.2. *(Voir [24], Lemma 1(b), p.844). Soit u la solution du Problème (3.3) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$. Alors u est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$.*

Démonstration. Elle est similaire à la preuve du Lemme 2.3. □

Lemme 3.3. *(Voir [1], Lemma 4, p.503). Soit u_l la solution du Problème (3.3). Si $l < l^*$, alors il existe une constante B telle que $u_l(t, x) \leq B < c$ pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times[0, l]$.*

Démonstration. Soit $l < l^*$. On suppose qu'il existe $x \in [0, l]$ tel que $\lim_{t\to+\infty} u(t, x) = c$. Autrement dit

$$\exists x \in [0, l],\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists t_0 > 0,\ \forall t \in [t_0, +\infty[\Longrightarrow\mid u(t, x) - c \mid< \varepsilon.$$

Nous avons donc

$$u(t, x) > c - \varepsilon,\ (t, x) \in [t_0, +\infty[\times]0, l[. \tag{3.4}$$

On choisit $\delta \in]0, l[$ tel que $\frac{\delta^2}{4} + 8\frac{\varepsilon}{\delta^2} \leq f(c - \varepsilon)$. Donc $f(s) \geq \frac{\delta^2}{4} + 8\frac{\varepsilon}{\delta^2}$, $s \in]c - \varepsilon, c[$. On pose $w(t, x) = c - \varepsilon + (t - t_0)(\frac{\delta^2}{4} - (x - \frac{\delta}{2})^2)$, $t_0 > 0$ et on vérifie $w_t \leq w_{xx} + f(w)$ dans $S =]t_0, t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}[\times]0, l[$. En effet, comme $w_t > 0$ dans $]t_0, t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}[\times]0, l[$, $w_x > 0$ dans $]t_0, t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}[\times]0, \frac{\delta}{2}[$ et $w_x < 0$ dans $]t_0, t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}[\times]\frac{\delta}{2}, l[$, alors

$$w(t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}, x) = \sup_{t\in[t_0,t_0+\frac{4\varepsilon}{\delta^2}]} w(t, x),$$

$$w(t, \frac{\delta}{2}) = \sup_{x\in]0,l[} w(t, x),$$

$$w(t_0, x) = \inf_{t\in[t_0,t_0+\frac{4\varepsilon}{l^2}]} w(t, x),$$

et

$$w(t,0) = \inf_{x\in]0,l[} w(t,x).$$

Ainsi, $w(t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}, \frac{\delta}{2}) = c$ et $v(t_0, 0) = c - \varepsilon$, $v \in]c-\varepsilon, c[$. En plus, $w_t - w_{xx} \leq \frac{l^2}{4} \leq f(w)$. Par conséquent,

$$\begin{cases} w_t \leq w_{xx} + f(w), \text{ dans } S \\ w(t,0) = w(t,l) = c - \varepsilon,\ t \in]t_0, t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}[\\ w(t_0, x) = c - \varepsilon,\ x \in]0, l[. \end{cases}$$

D'après le Théorème 1.5.1 et l'Inégalité (3.4), on a

$$w \leq u, \text{ dans } [t_0, t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}] \times [0, l].$$

Or,

$$w(t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}, \frac{\delta}{2}) = c \leq u(t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}, \frac{\delta}{2}).$$

Par conséquent $u(t_0 + \frac{4\varepsilon}{\delta^2}, \frac{\delta}{2}) = c$. Ceci est en contradiction avec $\sup_{]0,+\infty[\times]0,l[} u < c$. □

Théorème 3.2.1. *(Voir [20], Theorem 3.1, p.1130). Soit u la solution du Problème (3.3) dans* $[0, T^*(l)[\times[0,l]$. *Si* $T^*(l) = +\infty$, *alors* $u(t,x)$ *converge vers* $\psi(x)$ *quand* $t \to +\infty$ *où* ψ *est la solution du problème suivant*

$$\begin{cases} \psi''(x) + f(\psi(x)) = 0,\ x \in]0, l[, \\ \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

De plus, $u(t,x) < \psi(x)$ *pour tout* $(t,x) \in]0, +\infty[\times]0, l[$.

Démonstration. (Voir [20]). Elle est similaire à la démonstration du Lemme 2.6.

Si $-\psi''(x) = 0$ et $\psi(0) = \psi(l) = 0$, alors $\psi' = c_1$ où c_1 est une constante. D'où $\psi(x) = c_1 x + c_2$, $x \in [0, l]$ où c_2 est une constante. Comme $\psi(0) = \psi(l) = 0$, alors $c_1 = c_2 = 0$. Par suite $\psi \equiv 0$ dans $[0, l]$. D'où l'existence du noyau de Green associé au Problème (3.5). On pose $F(t,x) = \int_0^l G(x,y) u(t,y) dy$, $(t,x) \in [0, +\infty[\times[0,l]$. Soit

$(t,x) \in [0,+\infty[\times[0,l]$, on obtient de (3.3)

$$\begin{aligned} F_t(t,x) &= \int_0^l G(x,y)u_t(t,y)dy \\ &= -\int_0^l G(x,y)(Lu(t,y)+f(u(t,y))dy \\ &= -\int_0^l G(x,y)Lu(t,y)dy + \int_0^l G(x,y)f(u(t,y))dy \\ &= -\int_0^l u(t,y)LG(x,y)dy + \int_0^l G(x,y)f(u(t,y))dy, \text{ par la formule de Green} \\ &= -u(t,x) + \int_0^l G(x,y)f(u(t,y)))dy \end{aligned}$$

où $Lu(t,x) = -u_{xx}(t,x)$, $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[$. On peut écrire la relation suivante

$$\lim_{t\to+\infty} F_t(t,x) = -\lim_{t\to+\infty} u(t,x) + \int_0^l G(x,y)f(\lim_{t\to+\infty} u(t,y))dy,$$

car $u_t \geq 0$ dans $[0,+\infty[\times[0,l]$, f est continue sur $[0,c[$ et

$$F_t \geq 0$$

car $F_t(t,x) = \int_0^l G(x,y)u_t(t,y)dy$, le noyau de Green associé à l'opérateur L est positif dans $[0,l]^2$. Alors la limite du second membre existe et la limite du dernier membre existe, donc la limite du premier membre existe. Notons que G et u sont bornées (G est continue sur $[0,l]^2$ et $0 \leq u \leq 1$ sur $[0,+\infty[\times[0,l]$). Ceci implique que F est bornée et $F_t \geq 0$ dans $[0,+\infty[\times[0,l]$. Alors le Lemme 2.5 nous donne

$$\lim_{t\to+\infty} F_t(t,x) = 0, \ x \in [0,l].$$

On déduit de ce qui précède que

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = \int_0^l G(x,y)f(\lim_{t\to+\infty} u(t,y))dy.$$

Finalement,

$$\psi(x) = \int_0^l G(x,y)f(\psi(y))dy.$$

On a

$$L\psi(x) = \int_0^l LG(x,y)f(\psi(y))dy,$$

i.e.,

$$-\psi''(x) = \int_0^l LG(x,y)f(\psi(y)))dy = f(\psi(x)), \ \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Comme $\psi(x) = \lim_{t\to+\infty} u(t,y)$ et u est croissante, alors $\psi > u$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$, ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 3.1. *Le problème stationnaire associé au Problème (3.3) est (3.5).*

Notons ψ_l la solution de (3.3) dans $[0, l]$

$$l_0 = \sup\{l > 0 : 0 \leq \psi_l < c\}.$$

Lemme 3.4. *On suppose que (3.3) admet une solution u dans* $[0, +\infty[\times[0, l]$*. Alors*

$$\lim_{t \to +\infty} u_t(t, x) = 0, \ x \in [0, l]. \tag{3.6}$$

Démonstration. On pose $F(t, x) = \int_0^l G(x, y)u(t, y)dy$, $(t, x) \in [0, +\infty[\times[0, l]$. On a

$$F_t(t, x) = \int_0^l G(x, y)u_t(t, y)dy.$$

Comme (voir démonstration du Théorème 3.2.1)

$$\lim_{t \to +\infty} F_t(t, x) = 0, \ x \in [0, l],$$

et $G \geq 0$, $u \geq 0$, on a

$$G(x, y) \lim_{t \to +\infty} u_t(t, y) \equiv 0, \ \forall (x, y) \in [0, l]^2.$$

On en déduit que $\lim_{t \to +\infty} u_t(t, y) = 0$, $\forall y \in]0, l[$ (car $G(x, y) \neq 0$ $\forall (x, y) \in]0, l[^2$). La continuité de u_t implique $\lim_{t \to +\infty} u_t(t, y) = 0$, $\forall y \in [0, l]$. □

Proposition 3.1. *([17], Proposition 2.1, p.2). La solution du Problème (3.3) dans* $[0, T^*(l)[\times[0, l]$ *est strictement positive et strictement croissante par rapport à t dans* $]0, T^*(l)[\times]0, l[$*.*

Démonstration. La preuve du fait que $u > 0$ dans $]0, T^*(l)[\times]0, l[$ est similaire à celle du Lemme 2.1. On pose $v = u(t + h, x) - u(t, x)$ dans $[0, T^*(l) - h] \times [0, l]$, $h \in]0, T^*(l)[$. Nous concluons que v vérifie

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} - f'(\eta)v = 0, \text{ dans }]0, T^*(l) - h[\times]0, l[, \\ v(t, 0) = v(t, l) = 0, \ t \in]0, T^*(l) - h[, \\ v(0, x) = u(h, x) > 0, \ x \in]0, l[\end{cases}$$

où η est entre $u(t+h,x)$ et $u(t,x)$. Le Théorème 1.4.4 conduit à $v>0$ dans $]0,T^*(l)-h[\times]0,l[$. Soient t_1, $t_2\in]0,T^*(l)[$ tels que $t_1<t_2$. En choisissant $h=t_2-t_1$ et $t=t_1$ on trouve que

$$\begin{aligned} u(t+h,x)-u(t,x) &= u(t_1+t_2-t_1,x)-u(t_1,x) \\ &= u(t_2,x)-u(t_1,x). \end{aligned}$$

Comme $u(t+h,x)-u(t,x)>0$, on a $u(t_2,x)-u(t_1,x)>0$, i.e., $u(t_1,x)<u(t_2,x)$. Ce qui implique que u est strictement croissante par rapport à t dans $]0,T^*(l)[\times]0,l[$.

□

Lemme 3.5. *(Voir [17], Lemma 2.2, p.3). Soit $l>0$. Si l est assez petit, alors $T^*(l)=+\infty$ et $\sup\limits_{(t,x)\in]0,T^*(l)[\times]0,l[} u(t,x)<c$.*

Démonstration. (Voir [17]). On fixe $0<c_0<c$ et

$$0<l\leq \min\{\sqrt{\frac{4c_0}{f(c_0)}},1\}. \tag{3.7}$$

On pose

$$\bar{u}_l(t,x)=f(c_0)x(l-x),\ (t,x)\in]0,+\infty[\times]0,l[. \tag{3.8}$$

alors $\bar{u}_l$ satisfait à

$$\begin{gathered} 0\leq \bar{u}_l(t,x)\leq \frac{1}{4}f(c_0)l^2\leq c_0,\ (t,x)\in]0,+\infty[\times]0,l[, \\ \bar{u}_{lt}-\bar{u}_{lxx}=2f(c_0)\geq f(c_0)\geq f(\bar{u}_l),\ (t,x)\in]0,+\infty[\times]0,l[, \end{gathered}$$

d'après (3.7) et (3.8). D'où

$$\begin{cases} \bar{u}_{lt}-\bar{u}_{lxx}\geq f(\bar{u}_l),\ \text{dans }]0,+\infty[\times]0,l[, \\ \bar{u}_l(0,x)=f(c_0)x(l-x)\geq 0=u_l(0,x),\ x\in]0,l[, \\ \bar{u}_l(t,0)=0=u_l(t,0)=\bar{u}_l(t,l)=0=u_l(t,l),\ t\in]0,+\infty[. \end{cases}$$

On déduit que $\bar{u}_l$ est une sur solution du Problème (3.3) et sachant que $\underline{u}\equiv 0$ est une sous solution de (3.3), on a donc $0\leq u_l\leq \bar{u}_l$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$. Alors $u_l\leq \bar{u}_l\leq c_0<c$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$, d'où $T^*(l)=+\infty$ et $\sup\limits_{(t,x)\in]0,T^*(l)[\times]0,l[} u(t,x)<c$. □

Lemme 3.6. *(Voir [17], Lemma 2.3, p.3). Soit $l > 0$. Si l est assez grand, alors $T^*(l) < +\infty$.*

Démonstration. (Voir [17]). Soit $l > 0$ assez grand. On pose

$$\underline{u}_l(t,x) = \frac{tf(0)}{4T}x(l-x),\ (t,x) \in [0,T] \times [0,l]$$

avec $T = \max\{\frac{l^2}{4}, l^2\}$. $\underline{u}_l$ satisfait à

$$\underline{u}_{lt} - \underline{u}_{lxx} = \frac{1}{4T}f(0)x(l-x) + \frac{t}{2T}f(0),\ (t,x) \in]0,T[\times]0,l[.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4T}f(0)x(l-x) + \tfrac{t}{2T}f(0) \quad &\leq f(0)[\tfrac{1}{4T}\tfrac{l^2}{4} + \tfrac{1}{2}] \\ &\leq f(0)[\tfrac{1}{4T}T + \tfrac{1}{2}] \\ &\leq f(0)[\tfrac{3}{4}]. \end{aligned}$$

Donc

$$\tfrac{1}{4T}f(0)x(l-x) + \tfrac{t}{2T}f(0) \quad \leq f(0).$$

De sorte que

$$\begin{cases} \underline{u}_{lt} - \underline{u}_{lxx} \leq f(0) \leq f(\underline{u}_l),\ \text{dans }]0,T[\times]0,l[, \\ \underline{u}_l(t,0) = 0 \leq u_l(t,0),\ \underline{u}_l(t,l) = 0 \leq u_l(t,l),\ t \in]0,T[, \\ \underline{u}_l(0,x) = 0 \leq u_l(0,x),\ x \in]0,l[. \end{cases}$$

Donc $\underline{u}_l$ est une sous solution de (3.3) et comme w définie par $w_t = f(w)$ et $w(0) = 0$ est une sur solution de (3.3), on déduit $w \geq u_l \geq \underline{u}_l$ dans $[0,T[\times[0,l]$. On sait que $\lim\limits_{t\to T} u_l(t,l/2) \leq c$, on suppose que $\lim\limits_{t\to T} u_l(t,l/2) < c$. En particulier, $\lim\limits_{t\to T} u_l(t,l/2) \geq \frac{1}{16}\frac{f(0)}{l^2}$, d'où $l < \sqrt{f(0)}/4\sqrt{c}$. Ce qui contredit $l > 0$ assez grand. Alors u atteint la valeur c en $x = \frac{l}{2}$ en T fini. D'après la définition de $T^*(l)$, on trouve que $T^*(l) \leq T < \infty$ pour $l \geq \sqrt{f(0)}/4\sqrt{c}$. □

Lemme 3.7. *(Voir [20], Lemma 3.2, p.1131). La fonction u_l est croissante par rapport à l.*

Démonstration. (Voir [20]). On pose

$$w(t,x) = u_{l+\alpha}(t,x) - u_l(t,x),\ (t,x) \in [0,T^*(l)[\times[0,l].$$

D'où

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + f'(\eta)w, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]0, l[, \\ w(t,0) = 0 \; t \in]0, T^*(l)[, \\ w(t,l) = u_{l+\alpha}(t,l) > 0, \; t \in]0, T^*(l)[, \\ w(0,x) = 0, \; x \in]0, l[, \end{cases}$$

où η est entre $u_{l+\alpha}(t,x)$ et $u_l(t,x)$. Grâce au Théorème 1.4.4, $w > 0$. □

Théorème 3.2.2. *(Voir [20], Theorem 3.6, p.1133). Il existe une unique longueur critique l^* du Problème (3.3).*

Démonstration. On se référe aux trois Lemmes 3.5-3.7. □

Théorème 3.2.3. *([1], Theorem 5, p.503). On a $l^* = l_0$.*

Démonstration. On a les implications suivantes

$$\begin{aligned} 0 < l \leq l_0 &\Longrightarrow 0 \leq \psi_l < c, \text{ dans }]0, l[, \text{ par définition de } l_0 \\ &\Longrightarrow u_l(t,x) \leq \psi_l < c \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \text{ d'après le Théorème 3.2.1} \\ &\Longrightarrow \sup_{(t,x)\in]0,+\infty[\times]0,l[} u_l(t,x) < c \\ &\Longrightarrow T^*(l) = +\infty \text{ et } \sup_{(t,x)\in]0,T^*(l)[\times]0,l[} u_l(t,x) < c. \\ &\Longrightarrow l \leq l^*. \end{aligned}$$

Cela implique que $[l^*, +\infty[\subset [l_0, +\infty[$. Alors $l_0 \leq l^*$.

De même, on a

$$\begin{aligned} 0 < l \leq l^* &\Longrightarrow u_l(t,x) \leq B < c \text{ dans } [0, +\infty[\times[0, l], \text{ par le Lemme 3.3} \\ &\Longrightarrow \exists \psi_l(x) \leq B < c, \; x \in [0, l], \text{ par passage à la limite } (t \to +\infty) \\ &\Longrightarrow l \leq l_0. \end{aligned}$$

Cela implique que $[l_0, +\infty[\subset [l^*, +\infty[$. Alors $l^* \leq l_0$. Ainsi $l_0 \leq l^* \leq l_0$. D'où $l^* = l_0$. □

Lemme 3.8. *Si $0 < l_1 \leq l_2$, alors $T^*(l_2) \leq T^*(l_1)$.*

Démonstration. Soit u_{l_1} la solution du Problème (3.3) sur $[0, T^*(l_1)[\times[0, l_1]$. On sait que

$$u_{l_1} \in C([0, T^*(l_1)[\times[0, l_1]) \cap C^{1,2}(]0, T^*(l_1)[\times]0, l_1[)$$

et

$$\sup_{]0,T^*(l_1)[\times]0,l_1[} u_{l_1} < c.$$

La solution u_{l_2} du Problème (3.3) sur $[0, T^*(l_2)[\times[0, l_2]$ vérifie aussi

$$u_{l_2} \in C([0, T^*(l_2)[\times[0, l_2]) \cap C^{1,2}(]0, T^*(l_2)[\times]0, l_2[)$$

et

$$\sup_{(t,x)\in]0,T^*(l_2)[\times]0,l_2[} u_{l_2}(t, x) < c.$$

Si $l_1 \leq l_2$, alors u_{l_2} est la solution de (3.3) sur $[0, T^*(l_2)[\times[0, l_1]$ et

$$u_{l_2} \in C([0, T^*(l_2)[\times[0, l_1]) \cap C^{1,2}(]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[$$

de même

$$\sup_{(t,x)\in]0,T^*(l_2)[\times]0,l_1[} u_{l_2}(t, x) < c.$$

D'après l'unicité de la solution, on a $u_{l_1} \equiv u_{l_2}$ dans $[0, T^*(l_2)[\times[0, l_1]$. Par définition de $T^*(l_1)$, on aura $T^*(l_2) \leq T^*(l_1)$. □

Lemme 3.9. *([17], Lemma 2.4, p.3). Soient u_{l_1} la solution du Problème (3.3) sur $[0, T^*(l_1)[\times[0, l_1]$ et u_{l_2} la solution du Problème (3.3) sur $[0, T^*(l_2)[\times[0, l_2]$. Pour tout $0 < l_1 < l_2$, on a $u_{l_1} < u_{l_2}$ dans $]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[$.*

Démonstration. Soit $0 < l_1 < l_2$, on pose $w = u_{l_1} - u_{l_2}$ dans $[0, T^*(l_2)[\times[0, l_1]$. w satisfait à

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + f'(\eta)w, \text{ dans }]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[, \\ w(t, 0) = 0,\ w(t, l_1) = -u_{l_2}(t, l_1) < 0,\ t \in]0, T^*(l_2)[, \\ w(0, x) = 0, x \in]0, l_1[\end{cases}$$

où η est entre $u_{l_1}(t, x)$ et $u_{l_2}(t, x)$. On applique le Théorème 1.4.4 pour avoir $w < 0$ dans $]0, T^*(l_2)[\times]0, l_1[$. □

Lemme 3.10. *Si $T^*(l) = +\infty$, il existe au plus un $l > 0$ où u_l atteint la valeur c en temps infini.*

Démonstration. (Voir [17]). Soit l et l_0 deux nombres positifs tels que $l \neq l_0$. Supposons que (par l'absurde) u_{l_0} et u_l atteingnent la valeur c en temps infini, i.e, $T^*(l_0) = T^*(l) = +\infty$.

1. Cas où $l > l_0$.

   Comme u_l est croissante par rapport à t et d'après le Lemme 3.9, on a

   $$u_l(1, x) > u_{l_0}(1, x),\ x \in]0, l_0[. \tag{3.9}$$

   Soit

   $$\underline{u}_{l_0}(t, x) = u_{l_0}(t, x) + \varepsilon x,\ (t, x) \in [1, +\infty[\times [0, l_0].$$

   De (3.9) et du Lemme 3.9,

   $$u_l(t, l_0) \geq \underline{u}_{l_0}(t, l_0),\ t \in]1, +\infty[,\ u_l(1, x) \geq \underline{u}_l(1, x),\ x \in]0, l_0[. \tag{3.10}$$

   De plus $\underline{u}_{l_0}$ satisfait à

   $$\underline{u}_{l_0 t} - \underline{u}_{l_0 xx} = f(u_{l_0}) \leq f(\underline{u}_{l_0}),\ \text{dans }]1, +\infty[\times]0, l_0[. \tag{3.11}$$

   Les Relations (3.10) et (3.11) conduisent à

   $$u_l(t, x) \geq \underline{u}_{l_0}(t, x) = u_{l_0}(t, x) + \varepsilon x,\ (t, x) \in [1, +\infty[\times]0, l_0[.$$

   Ce qui est en contrediction avec l'extinction de u_{l_0} et u_l en temps infini.

2. Cas où $l < l_0$.

   Il suffit d'intervertir les rôles de l et l_0 dans le cas précédent.

□

Lemme 3.11. *([17], Theorem 2.6, p.4). Soit u_l la solution du Problème (3.3) sur $[0, T^*(l)[\times [0, l]$. Alors*

Si $l \leq l^*$, on a $T^*(l) = +\infty$ et $\sup_{]0,+\infty[\times]0,l[} u_l < c$.

Si $l > l^*$, on a $T^*(l) < +\infty$.

Démonstration. Si $l \leq l^*$, on a $T^*(l^*) \leq T^*(l)$, d'après le Lemme 3.8. Comme $T^*(l^*) = +\infty$, alors $T^*(l) = +\infty$. Grâce au Lemme 3.3, on a

$$u_l(t,x) < u_{l^*}(t,x) < c, \ (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[,$$

d'où

$$\sup_{]0,+\infty[\times]0,l[} u_l(t,x) < c.$$

Si $l > l^*$, on obtient $T^*(l) < +\infty$ ou bien u_l atteint la valeur c en temps infini. On suppose que u_l atteint la valeur c en temps infini. Soit $\widetilde{l} \in]l^*, l[$. D'après le Lemme 3.8, on a

$$T^*(l) \leq T^*(\widetilde{l}) \leq T^*(l^*). \tag{3.12}$$

Il résulte de l'hypothèse que $T^*(l) = +\infty$. On obtient de (3.12) que $T^*(\widetilde{l}) = +\infty$. Comme $\widetilde{l} > l^*$ et d'après la définition de l^*, on trouve que $u_{\widetilde{l}}$ atteint la valeur c en temps infini. Mais ceci est en contradiction avec le Lemme 3.10. □

Remarque 3.2. *Si $l \leq l^*$, on a $T^*(l) = +\infty$. Dans ce cas, on dit que l'existence de la solution du Problème (3.3) est globale.*

Corollaire 3.2.4. *Si $l \leq l^*$, la solution ne s'éteint pas.*

Démonstration. On applique le Théorème 3.2.1, le Lemme 3.11 et le Lemme 3.4. □

Lemme 3.12. *Sous la première hypothèse de (3.1), la solution u du Problème (3.3) vérifie*

$$u_t(t, \frac{l}{2} - x) = u_t(t, \frac{l}{2} + x), \ (t,x) \in [0, T^*(l)[\times[0, \frac{l}{2}],$$

et

$$\max\{u_t(t,x) : 0 \leq x \leq l\} = u_t(t, \frac{l}{2}), \ t \in [0, T^*(l)[.$$

Démonstration. On pose

$$v(t,x) = u_t(t,x), \ (t,x) \in [0, T^*(l)[\times[0, \frac{l}{2}].$$

On sait déjà que u est unique et $u(t, \frac{l}{2} + x) = u(t, \frac{l}{2} - x)$, $(t, x) \in [0, T^*(l)[\times[0, \frac{l}{2}]$. Donc

$$u_t(t, \frac{l}{2} + x) = u_t(t, \frac{l}{2} - x),\ (t, x) \in [0, T^*(l)[\times[0, \frac{l}{2}].$$

En effet, on montre facilement que

$$u_x(t, \frac{l}{2} + x) = -u_x(t, \frac{l}{2} - x),\ (t, x) \in [0, T^*(l)[\times[0, \frac{l}{2}],$$

on en déduit que

$$u_{xx}(t, \frac{l}{2} + x) = u_{xx}(t, \frac{l}{2} - x),\ (t, x) \in [0, T^*(l)[\times[0, \frac{l}{2}]. \tag{3.13}$$

On sait que

$$\begin{cases} u_t(t, \frac{l}{2} + x) - u_{xx}(t, \frac{l}{2} + x) = f(u(t, \frac{l}{2} + x)) \\ u_t(t, \frac{l}{2} - x) - u_{xx}(t, \frac{l}{2} - x) = f(u(t, \frac{l}{2} - x)). \end{cases} \tag{3.14}$$

La symétrie de u par rapport à $x = \frac{l}{2}$ donne moyennant les Relations (3.13) et (3.14)

$$u_t(t, \frac{l}{2} + x) = u_t(t, \frac{l}{2} - x),\ (t, x) \in [0, T^*(l)[\times[0, \frac{l}{2}].$$

Alors on peut déjà déduire que

$$v_x(t, \frac{l}{2}) = 0,\ t \in]0, T^*(l)[. \tag{3.15}$$

Comme $v(t, x) > 0$ sur $]0, T^*(l)[\times[0, l]$ et $v_x(t, 0) = \lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{v(t,h)}{h} \geq 0$, on a $v_x(t, 0) \geq 0$, $t \in]0, T^*(l)[$. Soit $w(t, x) = v(t, x + h) - v(t, x - h)$, $(t, x) \in [0, T^*(l)[\times[h, \frac{l}{2}]$, un calcul simple nous donne

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - f'(t, x + h)w \geq 0,\ \text{dans }]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2}[, \\ w(t, h) = v(t, 2h) > 0,\ w(t, \frac{l}{2}) = 0,\ t \in]0, T^*(l)[, \\ w(0, x) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{u(\Delta t, x+h) - u(\Delta t, x-h)}{\Delta t} \geq 0,\ x \in]h, \frac{l}{2}[. \end{cases}$$

Grâce au Théorème 1.4.4, $w \geq 0$ dans $[0, T^*(l)[\times[h, \frac{l}{2}]$. S'il existe $(t_0, x_0) \in]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2}[$ tel que $w(t_0, x_0) = 0$, $w \equiv 0$ dans $[0, t_0] \times [h, \frac{l}{2}]$. Ce qui contredit $w(t, h) > 0$, $t \in]0, T^*(l)[$. Nous avons donc

$$w(t, x) > 0,\ t \in]0, T^*(l)[,\ x \in]h, \frac{l}{2}[.$$

Soient x_1, $x_2 \in]0, \frac{l}{2}[$ tels que $x_1 < x_2$. En choisissant $h = \frac{x_2 - x_1}{2}$ et $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$, on obtient

$$v(t, x+h) - v(t, x-h) \;= v(t, x_2) - v(t, x_1).$$

Comme $v(t, x+h) - v(t, x-h) > 0$, on a $v(t, x_2) - v(t, x_1) > 0$, i.e., $v(t, x_1) < v(t, x_2)$. Ainsi, v est strictement croissante par rapport à x dans $]0, T^*(l)[\times]0, \frac{l}{2}[$. Combinant ce dernier résultat avec (3.15), on obtient $\max_{[0,l]} v(t,x) = v(t, \frac{l}{2})$, $t \in [0, T^*(l)[$.

□

Théorème 3.2.5. *Sous les hypothèses de (3.1). On suppose que $l > l^*$, alors la solution du Problème (3.3) s'éteint.*

La démonstration de ce théorème utilise le lemme suivant

Lemme 3.13. *Soit u la solution du Problème (3.3) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$, on suppose que $l > l^*$. Alors u atteint la valeur c pour $x = \frac{l}{2}$ en $T^*(l)$ fini.*

Démonstration. On distinguera deux étapes

Étape 1 : On montre que si $l > l^*$ alors u atteint la valeur c en un temps fini.

On a

1- Si $l > l^*$, alors $T^*(l) < \infty$ (d'après le Lemme 3.11).

2- Si $T^*(l) < \infty$, alors $\lim_{t \to T^*(l)^-} \sup_{x \in]0,l[} u(t,x) = c$. En effet, Nous raisonnons par l'absurde : il existe c_0 telle que

$$u \leq c_0 < c, \text{ dans } [0, T^*(l)[\times[0, l].$$

Soit

$$\overline{u} = c_0 \exp\left(f(c_1)(\frac{t - T^*(l)}{c_0})\right), \; (t, x) \in]T^*(l), T_1[\times]0, l[$$

où $c_1 = \frac{c_0 + c}{2}$, $T_1 = T^*(l) + \frac{c_0(\ln c_1 - \ln c_0)}{f(c_1)}$. On a $\overline{u}(T_1, x) \leq c_1 < c$ et

$$\begin{cases} \overline{u}_t - \overline{u}_{xx} = f(c_1)\exp(f(c_1)(\frac{t - T^*(l)}{c_0}) \geq f(c_1) \geq f(\overline{u}) \\ \overline{u}(t, 0) = \overline{u}(t, l) = u(t, 0) = u(t, l), \\ \overline{u}(T^*(l), x) = c_0 \geq u(T^*(l), x). \end{cases}$$

Alors $\overline{u}$ est une sur solution du Problème (3.3) dans $]T^*(l), T_1[\times]0, l[$. On en déduit alors $u(T_1, x) \leq \overline{u}(T_1, x) < c$ ($\underline{u} \equiv 0$ est une sous solution de u dans $[T^*(l), T_1[\times[0, l]$). D'où u est solution du Problème (3.3) dans $[0, T_1[\times[0, l]$. Ce qui contredit le fait que $T_1 > T^*(l)$ et $u(T_1, x) < c$.

Étape 2 : On montre que $\max\limits_{x\in[0,l]} u(t,x) = u(t, \frac{l}{2})$, $t \in [0, T^*(l)[$.

Notons que u satisfait à

(i) $u_x(t, \frac{l}{2}) = 0$, car u est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$.

(ii) On pose $\pi = u(t, x+h) - u(t, x-h)$ dans $[0, T^*(l)[\times[h, \frac{l}{2}]$, $h > 0$. On voit que

$$\begin{cases} \pi_t(t,x) - \pi_{xx}(t,x) - f'(u(t,x+h))\pi(t,x) \geq 0, \ (t,x) \in]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2}[, \\ \pi(t,h) = u(t,2h) > 0, \pi(t, \frac{l}{2}) = 0, \ t \in]0, T^*(l)[, \\ \pi(0,x) = 0, \ x \in]h, \frac{l}{2} - h[\end{cases}$$

où η est entre $u(t, x+h)$ et $u(t, x-h)$. Par le Théorème 1.4.4, on a

$$\pi(t,x) \geq 0, \ t \in [0, T^*(l)[, \ x \in [h, \frac{l}{2}].$$

S'il existait $(t_0, x_0) \in]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2}[$ tel que $\pi(t_0, x_0) = 0$, on aurait $\pi \equiv 0$ dans $[0, t_0]\times]h, \frac{l}{2}[$. Ce qui contredit $\pi(t,h) > 0$, $t \in]0, T^*(l)[$. On trouve alors

$$\pi(t,x) > 0, \ t \in]0, T^*(l)[, \ x \in]h, \frac{l}{2}[. \tag{3.16}$$

Soient x_1, $x_2 \in]0, \frac{l}{2}[$ tels que $x_1 < x_2$. En choisissant $h = \frac{x_2 - x_1}{2}$ et $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$, on trouve que

$$u(t, x+h) - u(t, x-h) \ = u(t, x_2) - u(t, x_1).$$

Comme $u(t, x+h) - u(t, x-h) > 0$, on a $u(t, x_2) - u(t, x_1) > 0$, i.e., $u(t, x_1) < u(t, x_2)$. Ainsi, u est strictement croissante par rapport à x dans $]0, T^*(l)[\times]0, \frac{l}{2}[$. Par (i) et le dernier résultat, on obtient $\max\limits_{[0,l]} u(t,x) = u(t, \frac{l}{2})$, $t \in]0, T^*(l)[$.

□

Démonstration du Théorème 3.2.5. On pose $v = u_t$ dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$. Comme $l > l^*$, le Lemme 3.13 indique que $\lim_{t \to T^*(l)^-} u(t, \frac{l}{2}) = c$. Supposons que v est bornée. Puisque $f' > 0$ sur $[0, c[$ et $f(0) > 0$, on obtient

$$\forall k > 0,\ f(u) > -k.$$

On peut alors écrire

$$\exists M \geq 0,\ v(t,x) < M - k,\ c \leq \frac{l^2}{32} M,\ (t,x) \in [0, T^*(l)[\times[\frac{l}{2}, l]. \tag{3.17}$$

Soient $(t, x) \in [0, T^*(l)[\times[\frac{l}{2}, l]$, $\beta \in]\frac{3c}{4}, c[$ teles que $f(u) > 2M$ pour $u \in [\beta, c[$, τ près de l'instant $T^*(l)$ tel que $u(\tau, \frac{l}{2}) > \beta$ et x_1 est la première valeur de x telle que $u(\tau, x_1) = \beta$. Comme $k > 0$ et $f(u) > 2M$, on a

$$\begin{aligned} v(t,x) < M - k &\implies u_{xx}(t,x) < M - k - f(u(t,x)) \\ &\implies u_{xx}(t,x) < \tfrac{f(u(t,x))}{2} - k - f(u(t,x)) \\ &\implies u_{xx}(t,x) < -\tfrac{f(u(t,x))}{2} - k. \end{aligned}$$

Comme $k > 0$, alors

$$u_{xx}(t,x) < -\frac{f(u(t,x))}{2}. \tag{3.18}$$

Fixons $t \in [0, T^*(l)[$, on voit que $u_x(t,x) \leq 0$, $x \in [\frac{l}{2}, l]$. On pose $\alpha = u(\tau, \frac{l}{2})$. L'Inégalité (3.18) nous donne

$$u_x^2(\tau, x_1) > -\int_{\frac{l}{2}}^{x_1} f(u) u_x dx = -\int_{u(\tau, \frac{l}{2})}^{u(\tau, x_1)} f(u) du = -\int_{u(\tau, \frac{l}{2})}^{\beta} f(u) du = \int_{\beta}^{\alpha} f(u) du.$$

Comme β est fixé, et la dernière intégrale tend vers $+\infty$ quand α tend vers c^-, on obtient alors

$$u_x(\tau, x_1) \to -\infty, \text{ pour } \tau \to T^*(l)^-. \tag{3.19}$$

On a

$$\begin{aligned} u_{xx}(t,x) < M - k - f(u(t,x)) &\implies u_{xx} < M - k - 2M \\ &\implies u_{xx} < -k - M. \end{aligned}$$

Comme $M > 0$, d'où

$$u_{xx} < -M. \tag{3.20}$$

Intégrant (3.20) deux fois par rapport à x sur $[\frac{l}{2}, x]$, on trouve que

$$u(\tau, x) < u(\tau, \frac{l}{2}) - \frac{M}{2}(x - \frac{l}{2})^2. \tag{3.21}$$

En particulier, $\beta \leq c - \frac{M}{2}(x_1 - \frac{l}{2})^2$, d'après l'Inégalité (3.21). On en déduit que grâce à (3.17), $x_1 - \frac{l}{2} \leq \sqrt{\frac{2(c-\beta)}{M}}$, i.e., $x_1 \leq \sqrt{\frac{2(c-\beta)}{M}} + \frac{l}{2} \leq \sqrt{\frac{2c}{M}} + \frac{l}{2} \leq \frac{3l}{4}$. Donc $l - x_1 \geq \frac{l}{4}$. Ainsi, la longueur de l'intervalle $[x_1, l]$ est supérieur à $\frac{l}{4}$. Intégrant encore (3.20) deux fois sur $[x_1, x]$, on aboutit à

$$u(\tau, x) < \beta + (x - x_1)u_x(\tau, x_1) + \frac{M}{2}(x - x_1)^2.$$

Pour $x = l$, on a

$$u(\tau, l) < \beta + (l - x_1)u_x(\tau, x_1) + \frac{M}{2}l^2.$$

(3.19) implique alors $u(\tau, l) \to -\infty$ pour $\tau \to T^*(l)^-$. C'est une contradiction car $u(\tau, l) = 0$ pour tout $t \in]0, T^*(l)[$. □

3.2.2 Conditions de Neumann

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ u_x(t, 0) = g(t), \ u_x(t, l) = -g(t), \ t > 0, \\ u(0, x) = 0, \ x \in]0, l[\end{cases} \tag{3.22}$$

où

$$f : \quad [0, c[\quad \to \quad \mathbb{R},$$

et g est continue et bornée inférieurement par une constante positive sur $]0, +\infty[$.

Nous adoptons un raisonnement similaire à celui du 1$^{\text{er}}$ cas pour l'existence d'extinction. Nous notons

$$\begin{aligned} T^*(l) = \quad & \sup\{T > 0 : \text{le Problème (3.22) admet une solution} \\ & u \in C([0, T] \times [0, l]) \cap C^{1,2}(]0, T[\times]0, l[) \text{ et } \sup_{]0,T[\times]0,l[} u < c\}. \end{aligned}$$

Théorème 3.2.6. *(Voir [8], Theorem 3, p.1380). Sous les Hypothèses (3.1). La solution u du Problème (3.22) vérifie les propriétées suivantes*
(1) u est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$.
(2) u est strictement croissante par rapport à x pour $0 < x \leq \frac{l}{2}$.
(3) Si $u(t, \frac{l}{2}) \to c^-$ pour $t \to T^*(l)^-$, alors la solution du Problème (3.22) s'éteint.

Démonstration. (Voir [19]).
(1) Puisque u est unique et $u(t, l-x)$ est une solution du Problème (3.22).
(2) On pose $z(t,x) = u(t, x+h) - u(t, x-h)$ dans $[0, T^*(l)[\times[h, \frac{l}{2}]$, $h \in]0, \frac{l}{2}[$. Par conséquent,

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} - f'(\eta)z = 0, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2}[, \\ z(t,h) > 0 \text{ et } z(t, \frac{l}{2}) = 0, \ t \in]0, T^*(l)[, \\ z(0,x) = 0, \ x \in]h, \frac{l}{2}[\end{cases}$$

où η est entre $u(t, x+h)$ et $u(t, x-h)$. Par le Théorème 1.4.4,

$$z(t,x) \geq 0, \ (t,x) \in [0, T^*(l)[\times[h, \frac{l}{2}].$$

S'il existe $(t_0, x_0) \in]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2}[$ tel que $z(t_0, x_0) = 0$, le Théorème 1.4.4 conduit à $z \equiv 0$ dans $[0, t_0] \times [h, \frac{l}{2}]$. Ce qui contredit $z(t,h) > 0$, $t \in]0, T^*(l)[$. Alors

$$z(t,x) > 0, \ (t,x) \in]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2} - h[.$$

Soient x_1, $x_2 \in]0, \frac{l}{2}[$ tels que $x_1 < x_2$. En choisissant $h = \frac{x_2 - x_1}{2}$ et $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$, on obtient

$$u(t, x+h) - u(t, x-h) = u(t, x_2) - u(t, x_1).$$

Comme $u(t, x+h) - u(t, x-h) > 0$, on a $u(t, x_2) - u(t, x_1) > 0$, i.e., $u(t, x_1) < u(t, x_2)$. Ainsi, u est strictement croissante par rapport à x dans $]0, T^*(l)[\times]0, \frac{l}{2}[$.
(3) On fait le même raisonnement suivi dans la preuve du Théorème 3.2.5 jusqu'à (3.20). En intégrant deux fois cette estimation par rapport à x sur $[x_1, x[$, on aboutit à

$$\int_{x_1}^{x} u_{xx}(t,s)ds < -\int_{x_1}^{x} Mds.$$

D'où

$$u_x(\tau, x) < u_x(\tau, x_1) + M(x - x_1).$$

Pour $x = l$, on voit que

$$-g(\tau) < u_x(\tau, x_1) + M(l - x_1).$$

On constate ainsi que cette relation est en contradiction avec (3.19) car g est continue sur $]0, +\infty[$ et $T^*(l) < \infty$. $\square$

3.3 Étude du 2$^{\text{éme}}$ cas

3.3.1 Conditions de Dirichlet

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, u_x), \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \ t > 0, \\ u(0, x) = 0, \ x \in]0, l[\end{cases} \tag{3.23}$$

où

$$f : \quad [0, c[\times\mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{R}.$$

On note

$$\begin{aligned} T^*(l) = \quad & \sup\{T > 0 : \text{le Problème (3.23) admet une solution} \\ & u \in C([0, T] \times [0, l]) \cap C^{1,2}(]0, T[\times]0, l[) \text{ et } \sup_{]0,T[\times]0,l[} u < c\}. \end{aligned}$$

Théorème 3.3.1. *(Voir [1], Theorem 1, p.500). Soient u la solution du Problème (3.23) dans* $[0, T^*(l)[\times[0, l]$, $f \in C^1([0, c[\times\mathbb{R})$ *et* $f(0, 0) > 0$. *Alors*

(a) $u > 0$ *sur* $]0, T^*(l)[\times]0, l[$ *et u est strictement croissante par rapport à t sur* $]0, T^*(l)[\times]0, l[$.

(b) Il existe une fonction ϕ $:]0, T^*(l)[\to]0, l[$ *telle que pour tout* $t \in]0, T^*(l)[$, *u est strictement croissante par rapport à x dans* $]0, \phi(t)[$ *et strictement décroissante par rapport à x dans* $]\phi(t), l[$.

Démonstration. (Voir [1]).

(a) Comme $f(0,0) > 0$, alors $u_t + 0 > u_{xx} + f(u,u_x) - f(0,0)$. Nous avons alors

$$\begin{cases} u_t > u_{xx} + f_{u_x}(s,p)u_x + f_u(s,p)u, \text{ dans }]0,T^*(l)[\times]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \; t \in]0,T^*(l)[, \\ u(0,x) = 0, \; x \in]0,l[\end{cases}$$

où s est entre 0 et $u(t,x)$ et p est entre 0 et $u_x(t,x)$. Par le Théorème 1.4.4, on a $u > 0$ dans $]0,T^*(l)[\times]0,l[$. On pose $v = u(t+h,x) - u(t,x)$ dans $[0,T^*(l)-h] \times [0,l]$, $h \in]0,T^*(l)[$. Alors v satisfait à

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} - f_u(s,p)v - f_{u_x}(s,p)v_x = 0, \text{ dans }]0,T^*(l)-h[\times]0,l[\\ v(t,0) = v(t,l) = 0, \; t \in]0,T^*(l)-h[, \\ v(0,x) = u(h,x) > 0, \; x \in]0,l[\end{cases}$$

où s est entre $u(t+h,x)$ et $u(t,x)$ et p est entre $u_x(t+h,x)$ et $u_x(t,x)$. Le Théorème 1.4.4 conduit à $v > 0$ dans $]0,T^*(l)-h[\times]0,l[$. Soient $t_1, t_2 \in]0,T^*(l)[$ tels que $t_1 < t_2$. En choisissant $h = t_2 - t_1$ et $t = t_1$ on trouve que

$$u(t+h,x) - u(t,x) \;\; = u(t_2,x) - u(t_1,x).$$

Comme $u(t+h,x) - u(t,x) > 0$, on a $u(t_2,x) - u(t_1,x) > 0$, i.e., $u(t_1,x) < u(t_2,x)$. Ce qui implique que u est strictement croissante par rapport à t dans $]0,T^*(l)[\times]0,l[$.

(b) On pose $w(t,x) = u(t,x+h) - u(t,x-h)$ dans $[0,T^*(l)[\times[h,l-h]$, $h \in]0,l[$. Alors w satisfait à

$$w(t,h) \geq 0, \; t \in]0,T^*(l)[. \tag{3.24}$$

De même

$$w(t,l-h) \leq 0, \; t \in]0,T^*(l)[. \tag{3.25}$$

On obtient donc à partir de (3.24) et (3.25)

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + f_{u_x}(s,p)w_x + f_u(s,p)w, \text{ dans }]0,T^*(l)[\times]h,l-h[, \\ w(t,h) > 0, \; w(t,l-h) < 0, \; t \in]0,T^*(l)[, \\ w(0,x) = 0, \; x \in]h,l-h[\end{cases}$$

où s est entre $u(t,x+h)$ et $u(t,x-h)$ et p est entre $u_x(t,x+h)$ et $u_x(t,x+h)$. Pour tout T arbitraire tel que $0 < T < T^*(l)$, soient G_+ le domaine simplement connexe qui contient $]0,T] \times \{h\}$ et vérifiant $w > 0$, G_- le domaine simplement connexe qui contient $]0,T] \times \{l-h\}$ et vérifiant $w < 0$ et $\gamma =]0,T] \times [h, l-h] \setminus G_+ \cup G_-$. Comme w est continue sur $]0,T] \times [0,l]$, alors w est identiquement nulle sur $\partial\gamma$. Il est facile de voir que

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + f_{u_x}(s,p)w_x + f_u(s,p)w \text{ dans } \gamma, \\ \qquad\qquad w = 0, \text{ sur } \partial\gamma \end{cases}$$

où s est entre $u(t,x+h)$ et $u(t,x-h)$ et p est entre $u_x(t,x+h)$ et $u_x(t,x+h)$. D'après le Théorème 1.4.4, on a $w \equiv 0$ dans γ, $w \geq 0$ dans $G_+ \cup \gamma$ et $w \leq 0$ dans $G_- \cup \gamma$. Ceci implique qu'il existe $\phi(T) \in]h, l-h[$ telle que $\gamma \subset]0,T] \times \{\phi(T)\}$ sinon :
il existe $(t_0, x_0) \in G_- \cup \gamma$ tel que $w(t_0, x_0) = 0$. Le Théorème 1.4.4 conduit alors à $w \equiv 0$ dans $\overline{G_- \cup \gamma} \setminus]t_0, T] \times [h, l-h]$. Ce qui contredit $w(t, l-h) < 0$, $t \in]0, T^*(l)[$;
soit il existe $(t_0, x_0) \in G_+ \cup \gamma$ tel que $w(t_0, x_0) = 0$. Le Théorème 1.4.4 conduit à $w \equiv 0$ dans $\overline{G_- \cup \gamma} \setminus]t_0, T] \times [h, l-h]$. Ce qui contredit $w(t,h) > 0$, $t \in]0, T^*(l)[$.
Cela veut dire que $w(t, \phi(T)) = 0$ pour $t \leq T$. Mais, pour tout $t \in]0, T[$, $w(t, \phi(T)) \neq 0$. Pour avoir ce résultat, nous raisonnons par l'absurde : Supposons qu'il existe $t_0 \in]0, T[$ tel que $w(t_0, \phi(T)) = 0$. Pour $h = l - \phi(T)$, on a $w(t_0, \phi(T)) = w(t_0, l - h) < 0$. C'est une contradiction avec $w(t_0, \phi(T)) = 0$. Alors $\gamma = \{T\} \times \{\phi(T)\}$ i.e., $w(T, \phi(T)) = 0$. Comme T est arbitraire,

$$w(t, \phi(t)) = 0, \text{ pour tout } (t, \phi(t)) \in]0, T^*(l)[\times [h, l-h].$$

D'autre part, on en tire $G_+ = \{(t,x), 0 < t < T, 0 < x < \phi(T)\}$ et $G_- = \{(t,x), 0 < t < T, \phi(T) < x < l-h\}$. Alors

$$u_x < 0, \text{ dans }]\phi(T), l],$$

et

$$u_x > 0, \text{ dans }]0, \phi(T)[.$$

D'où le résultat. □

Théorème 3.3.2. *(Voir [8], Theorem 4, p.1381). On suppose en plus des Hypothèses (3.2), que*

$$\int_0^c \psi_\rho(u)du = \infty,$$

(où ψ_ρ est la fonction figurant dans (3.2))

$$\exists k_1 > 0,\ k_2 > 0,\ -k_2p^2 - k_1 \leq f(u,p). \tag{3.26}$$

Si $u(t,\phi(t)) \to c^-$ quand $t \to T^*(l)^-$, alors u s'éteint (où ϕ est la fonction figurant dans le Théorème 3.3.1 (b)).

Démonstration. (Voir [8]). On pose $v = u_t$ dans $[0, T^*(l)[\times[0,l]$. On suppose que $\lim\limits_{t\to T^*(l)^-} u(t,\phi(t)) = c$ et v est bornée. Il existe $\beta \in]\frac{3c}{4}, c[$, $\exists\gamma > 0$, $\forall\tau \in]\gamma, T^*(l)[$: $u(\tau,\phi(\tau)) > \beta$. On pose $\alpha = u(\tau,\phi(\tau))$. On peut alors choisir $M \geq 0$ telle que

$$v(t,x) < M - k_1,\ c < [l - \phi(\tau)]^2 \frac{M}{8}. \tag{3.27}$$

Soient x_1 le seul point appartenant à $]\phi(\tau), l[$ tel que $u(\tau, x_1) = \beta$ et ρ tel que $\psi_\rho(u) > 2M$ pour $u \in [\beta, c[$. D'après l'Estimation (3.27), on a

$$\begin{aligned} u_{xx}(t,x) &< M - k_1 - \psi_\rho(u(t,x)) \\ &< \tfrac{\psi_\rho(u(t,x))}{2} - k_1 - \psi_\rho(u(t,x)) \\ &= -\tfrac{\psi_\rho(u(t,x))}{2} - k_1. \end{aligned}$$

D'où

$$u_{xx}(t,x) < -\frac{\psi_\rho(u(t,x))}{2}. \tag{3.28}$$

Fixons t, on voit que $u_x \leq 0$ dans $[\phi(\tau), x_1]$. De (3.28), on déduit que

$$\begin{aligned} u_x^2(\tau, x_1) &\geq -\textstyle\int_{\phi(\tau)}^{x_1} \psi_\rho(u)u_x dx \\ &= -\textstyle\int_{u(\tau,\phi(\tau))}^{u(\tau,x_1)} \psi_\rho(u)du \\ &= -\textstyle\int_{u(\tau,\phi(\tau))}^{\beta} \psi_\rho(u)du \\ &= \textstyle\int_\beta^\alpha \psi_\rho(u)du. \end{aligned}$$

Comme β est fixé, et la dernière intégrale tend vers $+\infty$ pour α tend vers c^-, on a obtient alors

$$u_x(\tau, x_1) \to -\infty, \text{ pour } \tau \to T^*(l)^-. \tag{3.29}$$

D'après (3.29), il existe $x_2 \in [\phi(\tau), x_1]$ tel que $u_x(\tau, x_2) < -\rho$. Alors $u_x^2(\tau, x_2) > \rho^2$. Soit x_0 la plus petite valeur de $[\phi(\tau), x_1]$ telle que $u_x(\tau, x_0) = -\rho$. Par conséquent,

$$\mid u_x(\tau, x) \mid \leq \rho, \text{ pour } \phi(\tau) \leq x \leq x_0.$$

Cela donne

$$\psi_\rho(u(\tau, x)) \leq f(u(\tau, x), u_x(\tau, x)), \text{ pour } \phi(\tau) \leq x \leq x_0.$$

Sachant que $\psi_\rho(u) > 2M$ pour $u \in [\beta, c[$, l'Estimation (3.28) donne

$$u_{xx}(\tau, x) < -M.$$

Nous intégrons la dernière estimation deux fois par rapport à x sur $[\phi(\tau), x_1]$, on trouve que

$$u(\tau, x) < u(\tau, \phi(\tau)) - \frac{M}{2}(x - \phi(\tau))^2.$$

En particulier, $\beta \leq c - \frac{M}{2}(x_1 - \phi(\tau))^2$. Donc (3.27) conduit à

$$\begin{aligned} x_0 \leq x_1 &\leq [\tfrac{2(c-\beta)}{M}]^{\frac{1}{2}} + \phi(\tau) \\ &\leq [\tfrac{2c}{M}]^{\frac{1}{2}} + \phi(\tau) \\ &\leq \tfrac{l-\phi(\tau)}{2} + \phi(\tau) \\ &= \tfrac{l+\phi(\tau)}{2}, \end{aligned}$$

donc $l - x_0 \geq \frac{l-\phi(\tau)}{2}$. Ainsi, la longueur de l'intervalle $[x_0, l]$ est au moins égale $\frac{l-\phi(\tau)}{2}$. Pour $x \in [x_0, l]$, on a $u(\tau, x) \in [0, u(\tau, x_0)]$. On pose $R(\tau, x) = u_x^2(\tau, x)$. Pour τ fixé, on a

$$\frac{dR}{du} = 2(v(\tau, x) - f(u, u_x)),$$

et

$$R(\tau, x_0) = \rho^2.$$

De (3.27) et (3.26), on obtient

$$\frac{dR}{du} < 2(M - k_1 + k_2 u_x^2 + k_1) = 2(M + k_2 R).$$

Soit le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \frac{dS}{du} = 2(M + k_2 S), \\ S(\tau, x_0) = \rho^2, \end{cases}$$

et sa solution exacte est

$$S = (\rho^2 + \frac{M}{k_2}) \exp\{-2k_2[u(\tau, x_0) - u(\tau, x)]\} - \frac{M}{k_2}.$$

Comme ρ est arbitraire, on choisit ρ assez grand et tel que

$$\rho^2 + \frac{M}{k_2} \geq \frac{\rho^2}{4} + \frac{Mr^2}{k_2},$$

et

$$r^2 = \exp\{2k_2 c\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} S &\geq (\tfrac{\rho^2}{4} + \tfrac{Mr^2}{k_2}) r^{-2} \exp\{u(\tau, x)\} - \tfrac{M}{k_2} \\ &\geq (\tfrac{\rho^2}{4} + \tfrac{Mr^2}{k_2}) r^{-2} - \tfrac{M}{k_2} \\ &\geq \tfrac{\rho^2}{4} r^{-2}. \end{aligned}$$

Grâce au Théorème 1.5.4, on a $R > S$. Donc

$$u_x(\tau, x) < -\frac{\rho}{2r}, \text{ pour } x \in [x_0, l], \tag{3.30}$$

on intègre entre x_0 et l, on obtient

$$u(\tau, l) - u(\tau, x_0) < -\frac{\rho}{2r}(l - x_0).$$

Alors

$$u(\tau, l) < u(\tau, x_0) - \frac{\rho}{2r}(l - x_0).$$

Comme $u(\tau, x_0) \leq u(\tau, \phi(\tau))$ (car $\phi(\tau) \leq x_0$), alors

$$u(\tau, l) < u(\tau, \phi(\tau)) - \frac{\rho}{2r}(l - x_0).$$

Autrement dit
$$0 < c - \frac{\rho}{4r}[l - \phi(\tau)].$$
Ce qui est absurde avec ρ assez grand. $\square$

3.3.2 Conditions de Neumann

Nous considérons le problème suivant
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, u_x), \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ u_x(t, 0) = g(t),\ u_x(t, l) = -g(t),\ t > 0, \\ u(0, x) = 0,\ x \in]0, l[\end{cases} \tag{3.31}$$
où
$$f : \quad [0, c[\times\mathbb{R} \ \rightarrow \ \mathbb{R},$$
et la fonction g est continue et bornée inférieurement par une constante positive sur $]0, +\infty[$.

Théorème 3.3.3. *(Voir [8], Theorem 5, p.1382). Sous les hypothèses du Théorème 3.3.2. Si f est symétrique par rapport à la deuxième variable, alors la solution u du Problème (3.31) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$ vérifie les propriétés suivantes*
(1) u est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$ et strictement croissante par rapport à x dans $]0, \frac{l}{2}[$.
(2) Si $u(t, \frac{l}{2}) \to c^-$ pour $t \to T^*(l)^-$, alors u s'éteint.

Démonstration. (Voir [8]).
(1) La fonction v définie par $v(t, x) = u(t, l - x)$ dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$ est une solution du Problème (3.31), on a
$$\begin{cases} v_t(t, x) = u_t(t, l - x),\ (t, x) \in]0, T^*(l)[\times]0, l[, \\ v_x(t, 0) = g(t),\ v_x(t, l) = -g(t),\ t \in]0, T^*(l)[, \\ v(0, x) = 0,\ x \in]0, l[, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} v_t(t,x) = u_{xx}(t,l-x) + f(u(t,l-x), u_x(t,l-x)),\ (t,x) \in]0,T^*(l)[\times]0,l[, \\ v_x(t,0) = g(t),\ v_x(t,l) = -g(t),\ t \in]0,T^*(l)[, \\ v(0,x) = 0,\ x \in]0,l[. \end{cases}$$

Comme $f(u(t,l-x), u_x(t,l-x)) = f(u(t,l-x), -u_x(t,l-x))$,

$$\begin{cases} v_t(t,x) = v_{xx}(t,x) + f(v(t,x), v_x(t,x)),\ (t,x) \in]0,T^*(l)[\times]0,l[, \\ v_x(t,0) = g(t),\ v_x(t,l) = -g(t),\ t \in]0,T^*(l)[, \\ v(0,x) = 0,\ x \in]0,l[. \end{cases}$$

D'après l'unicité de la solution du Problème (3.31) dans $[0,T^*(l)[\times[0,l]$, on a

$$u(t,l-x) = u(t,x),\ (t,x) \in [0,T^*(l)[\times[0,l].$$

Il s'ensuit que la solution du Problème (3.31) est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$.

D'autre part, soit la fonction définie par

$$v^\varepsilon(t,x) = \varepsilon t \cos(\frac{\pi x}{2l}); \varepsilon > 0$$

Comme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(v^\varepsilon, v_x^\varepsilon) = f(0,0) > 0,$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (v_t^\varepsilon - v_{xx}^\varepsilon) = 0,$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (v_t^\varepsilon - v_{xx}^\varepsilon) < \lim_{\varepsilon \to 0} f(v^\varepsilon, v_x^\varepsilon),\ \text{dans }]0,T^*(l)[\times]0,\frac{l}{2}[.$$

Pour ε voisin de 0, on obtient

$$v_t^\varepsilon - v_{xx}^\varepsilon < f(v^\varepsilon, v_x^\varepsilon),\ (t,x) \in]0,T^*(l)[\times]0,\frac{l}{2}[.$$

On a

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon - v_{xx}^\varepsilon < f(v^\varepsilon, v_x^\varepsilon),\ (t,x) \in]0,T^*(l)[\times]0,\frac{l}{2}[, \\ v_x^\varepsilon(t,0) = 0 < g(t),\ v_x^\varepsilon(t,\frac{l}{2}) = -\varepsilon t \frac{\pi\sqrt{2}}{4l} \leq 0 = u_x(t,\frac{l}{2}),\ t \in]0,T^*(l)[, \\ v^\varepsilon(0,x) = 0,\ x \in]0,\frac{l}{2}[. \end{cases}$$

On pose $z = u - v^\varepsilon$. Par conséquent, z satisfait à

$$\begin{cases} z_t > z_{xx} + f_{u_x}(s,p)z_x + f_u(s,p)z, \ (t,x) \in]0,T^*(l)[\times]0,\frac{l}{2}[, \\ z_x(t,0) > 0, \ z_x(t,\frac{l}{2}) \geq 0, \ t \in]0,T^*(l)[, \\ z(0,x) = 0, \ x \in]0,\frac{l}{2}[\end{cases}$$

où s est entre $u(t,x)$ et $v^\varepsilon(t,x)$ et p est entre $u_x(t,x)$ et $v^\varepsilon_x(t,x)$. Comme $f_u(s,p) \geq 0$, le Lemme 1.4 montre que

$$z \geq 0, \text{ dans } [0,T^*(l)[\times[0,\frac{l}{2}].$$

Alors la solution u du Problème (3.31) vérifie

$$u \geq v^\varepsilon > 0 \text{ dans }]0,T^*(l)[\times]0,\frac{l}{2}[.$$

En posant

$$w(t,x) = u(t,x+h) - u(t,x-h), \text{ dans } [0,T^*(l)[\times[h,\frac{l}{2}[, \ h \in]0,\frac{l}{4}[,$$

on remarque alors que

$$w(t,h) = u(t,2h) > 0, \ t \in]0,T^*(l)[.$$

Comme u est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$, on a

$$w(t,\frac{l}{2}) = u(t,\frac{l}{2}+h) - u(t,\frac{l}{2}-h) = 0$$

et w satisfait à

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + f_u(s,p)w + f_{u_x}(s,p)w_x, \text{ dans }]0,T^*(l)[\times]h,\frac{l}{2}[, \\ w(t,h) = u(t,2h) > 0, \ t \in]0,T^*(l)[, \\ w(t,\frac{l}{2}) = 0, \ t \in]0,T^*(l)[, \\ w(0,x) = 0, \ x \in]h,\frac{l}{2}[\end{cases}$$

où s est entre $u(t,x+h)$ et $u(t,x-h)$ et p est entre $u_x(t,x+h)$ et $u_x(t,x-h)$. Le Théorème 1.4.4 conduit à $w > 0$ dans $]0,T^*(l)[\times]h,\frac{l}{2}[$. Soient x_1, $x_2 \in]0,\frac{l}{2}[$ tels que $x_1 < x_2$. En choisissant $0 < h = \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{l}{4}$ et $h < x = \frac{x_2+x_1}{2} < \frac{l}{2}$, on trouve que

$$u(t,x+h) - u(t,x-h) \ \ = u(t,x_2) - u(t,x_1).$$

Comme $u(t,x+h)-u(t,x-h) > 0$, on a $u(t,x_2)-u(t,x_1) > 0$, i.e., $u(t,x_1) < u(t,x_2)$. Ainsi, u est strictement croissante par rapport à x dans $]0,T^*(l)[\times]0,\frac{l}{2}[$.
(2) Le maximum de la solution $u(t,.)$ était, dans le Théorème 3.3.2, atteint en $x = \phi(\tau)$. Ici ce maximum est atteint en $x=\frac{l}{2}$. Ainsi, en remplaçant $\phi(\tau)$ par $\frac{l}{2}$ dans le raisonnement du Théorème 3.3.2 on obtient à partir de (3.30) et en choisissant $x=l$

$$-g(\tau) < -\frac{\rho}{2r},$$

i.e.,

$$g(\tau) > \frac{\rho}{2r}.$$

Dans la dernière inégalité, comme ρ est arbitraire et positive, alors on peut prendre ρ assez grand. Ce qui contredit le fait que g est continue sur $]0,+\infty[$ vu que $T^*(l) < +\infty$. $\square$

3.4 Commentaire

Beaucoup d'auteurs se sont intéressés aux équations semi-linéaires singulières. Citons entre autres l'équation du type

$$u_t = u_{xx} + \frac{b}{x}u_x + f(u),\ (t,x) \in]0,T[\times]0,l[\tag{3.32}$$

où $b<1$ et f satisfait les Hypothèses (3.1). En posant

$$P = \partial_t + \partial_x^2 + \frac{b}{x}\partial_x,$$

on remarque que Pv peut s'écrire sous la forme

$$v_t - zv_{xx} - \frac{1}{z}(1+b)$$

où $z=\frac{x^2}{4}$. Cette forme dégénérée apparait en probabilité et a été largement étudiée en 1971 [6] quand $b>-1$. Auparavant, le processus stochastique décrit par l'expression

$$v_t - \frac{1}{2}v_{zz} - \frac{1}{2}\frac{b}{z}v_z$$

a été étudié en 1962 par Lamperti [22] pour $b > -1$. Cette expression a été ramenée à Pu en posant $u(t,x) = v(t,z)$ où $z = \frac{x}{\sqrt{2}}$.
Par ailleurs, l'équation linéaire non homogène $Pu = g(t,x)$ a été traitée en 1982 [3, 4]. Il a été prouvé que

$$\begin{cases} Pu = g(t,x), \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0,l[, \\ u(t,0) = 0, \ t \in]0,T[, \\ u_x(t,l) = 0, \ t \in]0,T[, \end{cases} \tag{3.33}$$

admet une unique solution classique quand $b < 1$.
En 1989, Chan et Kaper se sont posés la question du "quenching" relative au problème

$$\begin{cases} Pu = f(u), \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0,l[, \\ u(t,0) = 0, \ t \in]0,T[, \\ u_x(t,l) = 0, \ t \in]0,T[. \end{cases}$$

Ainsi, ils ont montré que la solution u s'éteint en adoptant une méthode différente de celle de Kawarada. Un résultat intéressant établi par ces auteurs concerne l'existence d'une longueur critique l^*.
Le premier résultat démontré dans [7] est

Lemme 3.14. *(Voir [7], Lemma 1, p.560). Le Problème (3.33) admet au plus une solution u. Cette solution (si elle existe) satisfait à*
(i) $u > 0$ *dans* $]0, T^*(l)[\times]0, l[\cup\{l\}\times]0, T^*(l)[$.
(ii) u est strictement croissante par rapport à t pour $x \in]0, l]$.
(iii) u est croissante par rapport à x pour $t \in]0, T^*(l)[$.

Ce lemme a permis de prouver le

Théorème 3.4.1. *(Voir [7], Theorem 2, p.560). Sous la dernière hypothèse de (3.1). Si u atteint la valeur c en* $x = l$ *pour le temps* $T^*(l)$ *fini, alors la solution du Problème (3.33) s'éteint.*

Dans un exemple illustratif, les auteurs ont considéré le cas $f(u) = \frac{1}{1-u}$. Le théorème précédent montre alors que la solution s'éteint quand $u(t,l) \overset{t \to T^*(l)^-}{\rightarrow} 1$.
Dans le cas où on a aussi $b = 0$ (i.e., l'equation considéré par Kawarada) la longueur critique a été estimée. Ce résultat est plus précis que celui de Kawarada (qui avait donné $l > 2\sqrt{2}$) et ne contredit pas celui de Walter [28] ($l > \frac{\pi}{2}$).