Chapitre 2

Sur les solutions du problème $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$

(D'après l'article de Kawarada H. : *On solutions of initial-boundary problem for* $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$. Publl. Rims, Kyoto Univ.10 : 729-736, 1975, [19])

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude d'un modèle mathématique qu'on trouve en physique et en biologie (voir [19] et [10]). Dans ce travail, Kawarada ([19]) introduit pour la première fois la notion du "quenching" (qu'on pourrait traduire en français par 'extinction'). Depuis, cette notion a été largement étudiée et développée dans plus de 400 papiers. On définit l'équation aux dérivées partielles semi-linéaire parabolique

$$u_t = u_{xx} + f(u), \text{ dans }]0, +\infty[\times\Omega, \tag{2.1}$$

où $\Omega =]0, l[$, f est définie par $f(u) = \frac{1}{1-u}$ et u représente la solution de (2.1) telle que $0 \leq u < 1$.

Le phénomène d'explosion en temps fini (voir Définition 1.5.5) précise que la solution devient infinie quand t s'approche de l'instant d'explosion T, qui est fini.

Naturellement, la raison de ce comportement de la solution est due, à la singularité du terme non linéaire dans l'Équation (2.1).

L'objectif ici est l'étude d'une notion que l'auteur appelle "quenching" généralisant celle de l'explosion. Plus précisément, on cherche certaines conditions nécessaires ou suffisantes pour l'apparition de ce phénomène de "quenching" (qu'on appellera dorénavant dans ce mémoire 'extinction').

On associe à l'Équation (2.1) des conditions aux bords de type Dirichlet $u(t,x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$, $t > 0$ et la condition initiale $u(0,x) = 0$, pour $x \in]0,l[$. On fera usage dans cette étude de la méthode des sur et sous solutions.
Le problème à étudier est donc le suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t > 0, \\ u(0,x) = 0,\ x \in]0,l[\end{cases} \tag{2.2}$$

où

$$f(s) = \frac{1}{1-s}.$$

En fait, on verra que f peut être définie sur $[0,1[$.
On sait (voir le Théorème 1.5.3) que ce problème admet une seule solution qui peut être locale en t car f est localement lipschitzienne.

Nous notons

$$\begin{aligned} T^*(l) &= \sup\{T > 0 : \text{le Problème (2.2) admet une solution} \\ &\quad u \in C([0,T]\times[0,l]) \cap C^{1,2}(]0,T[\times]0,l[) \text{ et } \sup_{]0,T[\times]0,l[} u < 1\}. \end{aligned}$$

2.2 Définition

Définition 2.2.1. *(Voir [19], Definition 1, p.730). Soit u la solution du Problème (2.2). On dit que u s'éteint (en anglais "quench") s'il existe* $0 < T < \infty$ *tel que* $\| u_t \| \to +\infty$ *pour* $t \to T^-$ *où* $\| u_t \| = \max\{| u_t(t,x) |, x \in [0,l]\}$.

2.3 Exemples

Exemple 2.3.1. *(Voir [19], Example 1, p.730). Soit α une constante, on considère le problème à valeur initiale pour $u = u(t)$, $t \geq 0$*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{1-u}, \text{ dans }]0, +\infty[, \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \tag{2.3}$$

La solution du Problème (2.3) est $u = 1 + \sqrt{(1-\alpha)^2 - 2t}$ si $\alpha > 1$ et $u = 1 - \sqrt{(1-\alpha)^2 - 2t}$ si $\alpha < 1$. On obtient l'extinction de la solution à l'instant $t = \frac{(1-\alpha)^2}{2}$.

En effet, soit $u \neq 1$ et $t > 0$. On a

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = \frac{1}{1-u} &\Longleftrightarrow (1-u)\frac{du}{dt} = 1, \\ &\Longleftrightarrow \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dt} = 1, \\ &\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(u) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^2) = 1, \\ &\Longleftrightarrow u^2 - 2u = -2t + c, \text{ où } c\text{=constante.} \end{aligned}$$

Mais $u(0) = \alpha$. Donc $c = \alpha^2 - 2\alpha$. Ainsi $u^2 - 2u = -2t + \alpha^2 - 2\alpha$. D'où les deux solutions de (2.3) relatives à $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$ pour $t < \frac{(1-\alpha)^2}{2}$. D'autre part

$$\| u_t \| = | u_t | = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2 - 2t}} \to +\infty \text{ quand } t \to \frac{(1-\alpha)^2}{2}.$$

Exemple 2.3.2. *(Voir [19], Example 2, p.730). α garde la même valeur que celle de l'Exemple 2.3.1. La solution du problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0, l[\end{cases} \tag{2.4}$$

est la même solution obtenue dans l'Exemple 2.3.1.

En effet, puisque cette solution dépend seulement de t, alors $u_{xx}(t,x) = 0$ pour $t > 0$, $x \in]0, l[$ et $u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$ pour $t > 0$. D'où le résultat.

Exemple 2.3.3. *(Voir [19], Example 3, p.730). L'explosion de la solution du problème à valeur initiale implique l'extinction de cette solution.*

En effet, supposons que la solution explose en temps fini (c'est-à-dire $\| u \| \to \infty$ pour $t \to T^-$) et montrons qu'elle s'éteint. On a

$$u(t,x) = \int_0^t u_t(s,x)ds, \ x \in [0,l].$$

Si u_t était bornée alors $\int_0^{T^-} u_t(s,x)ds$ serait bornée. Or l'explosion en T^- implique $\int_0^{T^-} u_t(s,x)ds = \infty$. D'où le résultat.

Avant d'aborder le résultat principal de Kawarada (voir [19]), précisons le résultat suivant

Proposition 2.1. *(Voir [19], Lemma, p.731). Dans (2.2), on suppose que $l > 2\sqrt{2}$. Alors u atteint la valeur 1 en $x = \frac{l}{2}$ en un temps fini.*

2.4 Démonstration de la Proposition 2.1

Nous avons besoin des lemmes suivants pour la démonstration de cette proposition

Lemme 2.1. *(Voir [7], Lemma 1, p.560). La solution du Problème (2.2) est strictement positive sur $]0, T^*(l)[\times]0, l[$.*

Démonstration. (Voir [7]). Comme $f(0) > 0$, en écrivant $f(u) = f(0) + f'(\eta)u$, on trouve que

$$u_t > u_{xx} + f'(\eta)u, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]0, l[.$$

On a

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,l) = 0, \, t \in]0, T^*(l)[, \\ u(0,x) = 0, \, x \in]0, l[. \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$u_t - u_{xx} = f(u) \geq 0, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]0, l[,$$

alors

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} \geq 0, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]0, l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \; t \in]0, T^*(l)[, \\ u(0,x) = 0, \; x \in]0, l[. \end{cases}$$

Nous appliquons le Théorème 1.4.4, on obtient $u \geq 0$ dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$. S'il existe $(t_0, x_0) \in]0, T^*(l)[\times]0, l[$ tel que $u(t_0, x_0) = 0$, alors $u \equiv 0$ dans $[0, t_0] \times [0, l]$. C'est une contradiction avec $u_t > u_{xx} + f'(\eta)u$ dans $[0, t_0] \times [0, l]$. □

Lemme 2.2. *(Voir [24], Lemma 1(a), p.844). Soit u la solution du Problème (2.2) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$. Alors les dérivées u_{tt}, u_{txx}, u_{xxx} sont continues sur $]0, T^*(l)[\times]0, l[$.*

Lemme 2.3. *(Voir [24], Lemma 1(a), p.844). Soit u la solution du Problème (2.2) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$. Alors u est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$.*

Démonstration. (Voir [24]). Si u est solution du Problème (2.2) dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$, la fonction v définie par $v(t, x) = u(t, l - x)$ pour $t \in [0, T^*(l)[$ et $x \in [0, l]$ est solution du même problème. L'unicité de la solution du Problème (2.2) implique que

$$u(t, x) = v(t, x), \; t \in [0, T^*(l)[, \; x \in [0, l],$$

i.e.,

$$u(t, x) = u(t, l - x), \; t \in [0, T^*(l)[, \; x \in [0, l].$$

D'où la symétrie de la solution par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$. □

Lemme 2.4. *(Voir [17], Proposition 2.1, p.2). La solution du Problème (2.2) est strictement croissante par rapport à t dans $]0, T^*(l)[\times]0, l[$.*

Démonstration. (Voir [17]). On pose $v = u(t + h, x) - u(t, x)$ dans $[0, T^*(l) - h] \times [0, l]$, $h \in]0, T^*(l)[$. Alors v résout

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = f'(\eta)v, \text{ dans }]0, T^*(l) - h[\times]0, l[, \\ v(t,0) = v(t,l) = 0, \; t \in]0, T^*(l) - h[, \\ v(0,x) = u(h,x) > 0, \; x \in]0, l[\end{cases}$$

où η est entre $u(t+h,x)$ et $u(t,x)$. Par le Théorème 1.4.4, on obtient alors $v \geq 0$ dans $[0, T^*(l)-h] \times [0,l]$. S'il existe $(t_0, x_0) \in]0, T^*(l)-h[\times]0,l[$ tel que $v(t_0,x_0) = 0$, nous concluons que $v \equiv 0$ dans $[0,t_0] \times [0,l]$. Ceci contredit notre hypothèse $v(0,x) = u(h,x) > 0$ dans $]0,l[$ donc $v > 0$ dans $]0, T^*(l)-h[\times]0,l[$. Soient t_1, $t_2 \in]0, T^*(l)[$ tels que $t_1 < t_2$. En choisissant $h = t_2 - t_1$ et $t = t_1$ on trouve que

$$u(t+h,x) - u(t,x) \quad = u(t_2,x) - u(t_1,x).$$

Comme $u(t+h,x) - u(t,x) > 0$, on a $u(t_2,x) - u(t_1,x) > 0$, i.e., $u(t_1,x) < u(t_2,x)$. Ce qui implique que u est strictement croissante par rapport à t dans $]0, T^*(l)[\times]0,l[$.

□

Lemme 2.5. *(Voir [5], Lemma 5.2, p.86). Supposons que g est une fonction croissante et bornée dans $[0,+\infty[$. Si $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t)$ existe, alors*

$$\lim_{t\to+\infty} g'(t) = 0.$$

Démonstration. Il existe $M \geq 0$ telle que

$$\int_0^t g'(s)ds = g(t) - g(0) < M.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} g'(t)dt < \infty.$$

Comme g est croissante, $g'(t) \geq 0$ pour $t \in [0,+\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} g'(t)dt$ est convergente alors on a $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = 0$. Sinon il existerait $c > 0$ telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = c$. Nous en déduisons que $g' \sim c$ au voisinage de $+\infty$. Donc (d'après le critère de comparaison des fonctions positives) $\int_0^{+\infty} g'(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} cdt$ sont de même nature. Or $\int_0^{+\infty} cdt$ est divergente puisque $c > 0$. Ceci contredit le fait que $\int_0^{+\infty} g'(t)dt$ est convergente. D'où $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = 0$. □

Lemme 2.6. *On considère le problème aux limites*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1, \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ t \in]0,+\infty[, \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0,l[. \end{cases} \tag{2.5}$$

Alors $u(t,x)$ converge vers $\psi(x)$ quand $t \to +\infty$ où ψ est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \psi''(x) + 1 = 0, \ x \in]0, l[, \\ \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

De plus, $u(t,x) < \psi(x)$ pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[$.

Démonstration. Si $-\psi''(x) = 0$ et $\psi(0) = \psi(l) = 0$, alors $\psi' = c_1$ telle que c_1 est une constante. On a $\psi(x) = c_1 x + c_2$, $x \in [0,l]$ telle que c_2 est une constante. Comme $\psi(0) = \psi(l) = 0$, alors $c_1 = c_2 = 0$. Par suite $\psi \equiv 0$ dans $[0,l]$. Cela veut dire que le noyau de Green associé au Problème (2.6) existe. Soit $F(t,x) = \int_0^l G(x,y)u(t,y)dy$, $(t,x) \in [0,+\infty[\times[0,l]$. Par définition du noyau de Green associé au Problème (2.6), on a pour $y \in [0,l]$

$$\begin{cases} -G_{xx}(x,y) = \delta(x-y), \ x \in]0,l[, \\ G(0,y) = G(l,y) = 0 \end{cases}$$

où δ est la distribution de Dirac et

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{l}(l-y), \ 0 \le x \le y \le l, \\ \frac{y}{l}(l-x), \ 0 \le y \le x \le l. \end{cases}$$

De (2.5), on a

$$\begin{aligned} F_t(t,x) &= \int_0^l G(x,y)u_t(t,y)dy \\ &= -\int_0^l G(x,y)(Lu(t,y)+1)dy \\ &= -\int_0^l G(x,y)Lu(t,y)dy + \int_0^l G(x,y)dy \\ &= -\int_0^l u(t,y)LG(x,y)dy + \int_0^l G(x,y)dy \\ &= -u(t,x) + \int_0^l G(x,y)dy \end{aligned}$$

où $Lu(t,x) = -u_{xx}(t,x)$, $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[$. On a

$$\lim_{t\to+\infty} F_t(t,x) = -\lim_{t\to+\infty} u(t,x) + \int_0^l G(x,y)dy.$$

Comme $u_t \ge 0$, $T^*(l) = \infty$ et $u < 1$ dans $]0,+\infty[\times]0,l[$, alors la limite du second membre existe. D'où l'existence de la limite du premier membre. En appliquant le

Lemme 2.5, nous avons pour $(x, y) \in [0, l]^2$ et $t \in [0, +\infty[$: G et u sont bornées et positives, alors F est bornée et positive, on trouve que $\lim_{t \to +\infty} F_t(t, x) = 0$. D'où

$$\lim_{t \to +\infty} u(t, x) = \int_0^l G(x, y) dy, \; x \in [0, l].$$

Soit $\psi(x) = \lim_{t \to +\infty} u(t, x)$, alors

$$\psi(x) = \int_0^l G(x, y) dy.$$

On a

$$-\psi''(x) = \int_0^l LG(x, y) dy = 1, \; \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Comme $\psi(x) = \lim_{t \to +\infty} u(t, x)$ et u est strictement croissante par rapport à t, alors $\psi > u$ dans $]0, +\infty[\times]0, l[$. En effet, pour tout t_0 fixé on considère $t \geq t_1 > t_0$. En faisant $t \to +\infty$ dans $u(t, x) \geq u(t_1, x) > u(t_0, x)$ on obtient

$$\psi(x) \geq u(t_1, x) > u(t_0, x) \; \forall t_0 > 0, \; \forall x \in]0, l[.$$

D'où

$$\psi(x) > u(t_0, x) \; \forall t_0 > 0, \; \forall x \in]0, l[.$$

Ce qui termine la preuve. □

Regardons maintenant la preuve de la Proposition 2.1

Démonstration de la Proposition 2.1. Elle se fait en 2 étapes

Étape 1 : On montre que u atteint la valeur 1 en un temps fini.

On introduit le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + 1, \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ v(t, 0) = v(t, l) = 0, \; t \in]0, +\infty[, \\ v(0, x) = 0, \; x \in]0, l[. \end{cases} \tag{2.7}$$

D'après le Lemme 2.6, la solution du Problème (2.7) converge vers $\psi(x)$ quand $t \to +\infty$ où ψ est une solution du problème suivant

$$\begin{cases} \psi''(x) + 1 = 0, x \in]0, l[, \\ \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{cases}$$

Nous trouvons aisément que

$$\psi(x) = \frac{x}{2}(l - x),\ x \in [0, l].$$

On pose $w = u - v$ dans $[0, +\infty[\times[0, l]$. Comme $\frac{1}{1-u} \geq 1$ dans $[0, +\infty[\times[0, l]$, w satisfait à

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} \geq 0,\ \text{dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ w(t, 0) = w(t, l) = 0,\ t \in]0, +\infty[, \\ w(0, x) = 0,\ x \in]0, l[. \end{cases}$$

Par le Théorème 1.4.4, nous déduisons que $w \geq 0$ dans $[0, +\infty[\times[0, l]$, alors $u \geq v$ dans $[0, +\infty[\times[0, l]$. Raisonnons par l'absurde pour montrer que u atteint la valeur 1 en un temps fini lorsque $l > 2\sqrt{2}$. Si u n'atteint pas la valeur 1 en un temps fini lorsque $l > 2\sqrt{2}$, sachant que u est croissante par rapport à t dans $[0, T^*(l)[\times[0, l]$ alors $T^*(l) = +\infty$, on aurait

$$1 \geq \lim_{t\to+\infty} u(t, x) \geq \psi(x) = \lim_{t\to+\infty} v(t, x),\ x \in [0, l].$$

Ceci implique que $1 \geq \psi(x)$, i.e., $1 \geq \frac{x}{2}(l - x)$, autrement dit $\max_{x\in[0,l]} \psi(x) \leq 1$. On obtient alors $\psi(\frac{l}{2}) = \frac{l^2}{8} \leq 1$. Donc $l \leq 2\sqrt{2}$. Ce qui contredit l'hypothèse $l > 2\sqrt{2}$.

Étape 2 : On montre que $\max_{x\in[0,l]} u(t, x) = u(t, \frac{l}{2})$ pour tout $t \in [0, T^*(l)[$.

On pose $\pi = u(t, x + h) - u(t, x - h)$ dans $[0, T^*(l)[\times[h, \frac{l}{2}]$, $h \in]0, \frac{l}{2}[$, on voit que

$$\begin{cases} \pi_t - \pi_{xx} - f'(\eta)\pi = 0,\ \text{dans }]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2}[, \\ \pi(t, h) = u(t, 2h) > 0 \text{ et } \pi(t, \frac{l}{2}) = 0,\ t \in]0, T^*(l)[, \\ \pi(0, x) = 0,\ x \in]h, \frac{l}{2}[, \end{cases}$$

Par le Théorème 1.4.4, on a

$$\pi(t,x) \geq 0,\ (t,x) \in [0,T^*(l)[\times[h,\frac{l}{2}]. \tag{2.8}$$

S'il existe $(t_0,x_0)\ \in]0,T^*(l)[\times]h,\frac{l}{2}[$ tel que $\pi(t_0,x_0) = 0$ alors $\pi \equiv 0$ dans $[0,t_0]\times[h,\frac{l}{2}]$. C'est une contradiction avec $\pi(t,h) = u(t,2h) > 0$. D'où

$$\pi(t,x) > 0,\ (t,x) \in]0,T^*(l)[\times]h,\frac{l}{2}[. \tag{2.9}$$

Soient x_1, $x_2 \in]0,\frac{l}{2}[$ tels que $x_1 < x_2$. En choisissant $h = \frac{x_2-x_1}{2}$ et $x = \frac{x_2+x_1}{2}$, on obtient

$$u(t,x+h) - u(t,x-h) \ = u(t,x_2) - u(t,x_1).$$

Comme $u(t,x+h)-u(t,x-h) > 0$, on a $u(t,x_2)-u(t,x_1) > 0$, i.e., $u(t,x_1) < u(t,x_2)$. Ainsi, u est strictement croissante par rapport à x dans $]0,T^*(l)[\times]0,\frac{l}{2}[$. Par conséquent,

$$\max_{x\in]0,\frac{l}{2}[} u(t,x) = u(t,\frac{l}{2}),\ \text{pour tout } t \in [0,T^*(l)[.$$

La symétrie de u par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$ nous donne

$$\max_{x\in[0,l]} u(t,x) = u(t,\frac{l}{2}),\ \text{pour tout } t \in [0,T^*(l)[,$$

ce qui termine la démonstration.

□

Nous présentons maintenant le résultat principal de Kawarada (voir [19])

Théorème 2.4.1. *([19], Theorem, p.731). On suppose que $l > 2\sqrt{2}$. Alors la solution du Problème (2.2) s'éteint.*

2.5 Démonstration du Théorème 2.4.1

Avant de donner la preuve de ce Théorème, nous montrons d'abord le lemme suivant

Lemme 2.7. *(Voir [8], Theorm 2, p.1379). Soit u la solution du problème aux limites (2.2). Alors*

$$u_t(t, \frac{l}{2} - x) = u_t(t, \frac{l}{2} + x),\ (t, x) \in]0, T^*(l)[\times [0, \frac{l}{2}], \tag{2.10}$$

et

$$\max\{u_t(t, x) : 0 \leq x \leq l\} = u_t(t, \frac{l}{2}),\ t \in]0, T^*(l)[.$$

Démonstration. (Voir [8]). Nous posons $v = u_t$ dans $[0, T^*(l)[\times [0, l]$. On sait déjà

$$u(t, \frac{l}{2} - x) = u(t, \frac{l}{2} + x),\ t \in [0, T^*(l)[,\ x \in [0, \frac{l}{2}],$$

donc

$$u_t(t, \frac{l}{2} - x) = u_t(t, \frac{l}{2} + x),\ t \in [0, T^*(l)[,\ x \in [0, \frac{l}{2}].$$

D'où (2.10). Ainsi, nous avons

$$v(t, \frac{l}{2} - x) = v(t, \frac{l}{2} + x),\ t \in [0, T^*(l)[,\ x \in [0, \frac{l}{2}].$$

Alors

$$v_x(t, \frac{l}{2}) = 0,\ t \in]0, T^*(l)[. \tag{2.11}$$

On pose $w(t, x) = v(t, x + h) - v(t, x - h)$ dans $[0, T^*(l)[\times [h, \frac{l}{2}]$, $h > 0$. Alors w résout

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - f'(v(t, x+h))w \geq 0, \text{ dans }]0, T^*(l)[\times]h, \frac{l}{2}[, \\ w(t, h) = v(t, 2h) > 0,\ t \in]0, T^*(l)[, \\ w(t, \frac{l}{2}) = v(t, \frac{l}{2} + h) - v(t, \frac{l}{2} - h) = 0,\ t \in]0, T^*(l)[, \\ w(0, x) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{u(\Delta t, x+h) - u(\Delta t, x-h)}{\Delta t} \geq 0,\ x \in]h, \frac{l}{2}[\end{cases}$$

où η est entre $v(t, x+h)$ et $v(t, x-h)$. On utilise le Théorème 1.4.4 pour déduire que

$$w(t, x) \geq 0,\ t \in [0, T^*(l)[,\ x \in [h, \frac{l}{2}].$$

S'il existe $(t_0, x_0) \in]0, T^*(l)[\times]0, l[$ tel que $w(t_0, x_0) = 0$, alors $w \equiv 0$ dans $[0, t_0] \times [h, \frac{l}{2} - h]$. C'est une contradiction avec $w(t, h) = v(t, 2h) > 0$, $t \in]0, T^*(l)[$. D'où

$$w(t, x) > 0,\ t \in]0, T^*(l)[,\ x \in]0, \frac{l}{2}[.$$

Soient $x_1, x_2 \in]0, \frac{l}{2}[$ tels que $x_1 < x_2$. En choisissant $h = \frac{x_2-x_1}{2}$ et $x = \frac{x_2+x_1}{2}$, on trouve que

$$v(t, x+h) - v(t, x-h) \;\; = v(t, x_2) - v(t, x_1).$$

Comme $v(t, x+h) - v(t, x-h) > 0$, on a $v(t, x_2) - v(t, x_1) > 0$, i.e., $v(t, x_1) < v(t, x_2)$. Ainsi, v est strictement croissante par rapport à x dans $]0, T^*(l)[\times]0, \frac{l}{2}[$.
D'après le dernier résultat et (2.11), nous avons

$$\max_{[0,l]} v(t, x) = v(t, \frac{l}{2}),\ t \in [0, T^*(l)[.$$

Le lemme est prouvé. □

Pour achever la preuve du Théorème 2.4.1, nous adoptons la démonstration de C. Y. Chan et M. K. kwong [7], car il y a une lacune dans la démonstration donnée par Kawarada (Étape 3, voir le commentaire ci-dessous). Cependant le théorème principal de Kawarada demeure vrai.

Démonstration du Théorème 2.4.1. (Voir [8]). Nous supposons que $l > 2\sqrt{2}$. Grâce à la Proposition 2.1, nous avons

$$u(t, \frac{l}{2}) \to 1^-, \text{ quand } t \to T^*(l)^-.$$

On suppose que $u_t(t, \frac{l}{2})$ est bornée quand $t \to T^*(l)^-$, Comme pour tout $k > 0$ nous avons $\frac{1}{1-s} > -k$, $s \in [0, 1[$, on peut écrire

$$\exists M \geq 0,\ v(t, x) < M - k,\ 1 \leq \frac{l^2}{32} M,\ (t, x) \in [0, T^*(l)[\times[\frac{l}{2}, l]. \tag{2.12}$$

Soient $(t, x) \in [0, T^*(l)[\times[\frac{l}{2}, l]$ et $\beta \in]\frac{3}{4}, 1[$ tels que $\frac{1}{1-u} > 2M$, $u \in [\beta, 1[$. Soient τ près de l'instant $T^*(l)$ tel que $u(\tau, \frac{l}{2}) > \beta$ et x_1 la première valeur de x telle que $u(\tau, x_1) = \beta$. Comme $v(t, x) < M - k$, on a

$$u_{xx}(t, x) < M - k - \frac{1}{1-u}. \tag{2.13}$$

Ceci implique que

$$u_{xx}(t, x) < -\frac{1}{2(1-u)}, \tag{2.14}$$

puisque $\frac{1}{1-u} > 2M$ et $k > 0$. Fixons $t \in [0, T^*(l)[$, on pose $\alpha = u(\tau, \frac{l}{2})$. Comme $u_x \leq 0$ dans $[0, T^*(l)[\times[\frac{l}{2}, l]$, nous déduisons de (2.14) que

$$u_x^2(\tau, x_1) > -\int_{\frac{l}{2}}^{x_1} \frac{1}{1-u} u_x dx = -\int_{u(\tau,\frac{l}{2})}^{u(\tau,x_1)} \frac{1}{1-u} du = -\int_{u(\tau,\frac{l}{2})}^{\beta} \frac{1}{1-u} du = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{1}{1-u} du.$$

Comme β est un réel fixé et la dernière intégrale tend vers ∞ lorsque α tend vers 1^-, on obtient alors

$$u_x(\tau, x_1) \to -\infty, \text{ pour } \tau \to T^*(l)^-. \tag{2.15}$$

D'après la Formule (2.13) et $f(u) > 2M$, on a $u_{xx} < M - k - 2M < -k - M$. Ceci implique que

$$u_{xx} < -M \tag{2.16}$$

puisque $k > 0$. Nous intégrons directement deux fois l'Inégalité (2.16) entre x et $\frac{l}{2}$ par rapport à x, nous déduisons que

$$u(\tau, x) < u(\tau, \frac{l}{2}) - \frac{M}{2}(x - \frac{l}{2})^2, \ x \in [\frac{l}{2}, l]. \tag{2.17}$$

En particulier $\beta \leq 1 - \frac{M}{2}(x_1 - \frac{l}{2})^2$, d'après la Formule (2.17). Moyennant (2.12) , cette dernière estimation donne $x_1 - \frac{l}{2} \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{M}}$, i.e., $x_1 \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{M}} + \frac{l}{2} \leq \sqrt{\frac{2}{M}} + \frac{l}{2} \leq \frac{3l}{4}$, donc $l - x_1 \geq \frac{l}{4}$. Ainsi, la longueur de l'intervalle $[x_1, l]$ est au moins égal à $\frac{l}{4}$. De l'Inégalité (2.16), Nous intégrons directement deux fois l'Inégalité (2.16) entre x_1 et x par rapport à x, on a

$$u(\tau, x) < \beta + (x - x_1)u_x(\tau, x_1) + \frac{M}{2}(x - x_1)^2,$$

donc

$$u(\tau, l) < \beta + (l - x_1)u_x(\tau, x_1) + \frac{M}{2} l^2.$$

Nous déduisons de (2.15), $u(\tau, l) \to -\infty$ pour $\tau \to T^*(l)^-$. Ceci contredit les conditions aux limites. C.Q.F.D. □

Nous terminons ce chapitre par un commentaire.

2.6 Commentaire

2.6.1 Démonstration de Kawarada

Maintenant, nous allons donner la preuve de Kawarada jusqu'à l'étape qui contient la lacune signalée en 1988 par C. Y. Chan et M. K. Kwong ([7]).
Dans cette section, on note par $\dot{s}$ la dérivée de la fonction s.

Étape 1 : On pose

$$\mu(t) = u(t, \frac{l}{2}), t \in [0, T^*(l)[.$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient facilement

$$\frac{d\mu}{dt} \leq \frac{1}{1-\mu}, \text{ dans } [T^*(l) - \varepsilon, T^*(l)[,$$

puisque

$$u_{xx}(t, \frac{l}{2}) \leq 0, \ t \in [0, T^*(l)[. \tag{2.18}$$

En effet, soit $t \in [0, T^*(l)[$ nous avons

$$u_x(t, \frac{l}{2}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(t, \frac{l}{2} + h) - u(t, \frac{l}{2})}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(t, \frac{l}{2} - h) - u(t, \frac{l}{2})}{-h}$$

comme u est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{l}{2}$, alors $u_x(t, \frac{l}{2}) = 0$. On a

$$u_{xx}(t, \frac{l}{2}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u_x(t, \frac{l}{2} - h) - u_x(t, \frac{l}{2})}{-h} \leq 0.$$

Posons $T_1 = T^*(l) - \varepsilon$ et $\Omega_\varepsilon = [T_1, T^*(l)[\times]0, l[$. Soit $v(t) = 1 - \sqrt{2}\sqrt{T^*(l) - t}$, $t \in [T_1, T^*(l)[$. On remarque que v satisfait à

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{1-v}, \text{ dans } [T_1, T^*(l)[, \\ \lim\limits_{t \to T^*(l)} v(t) = 1. \end{cases}$$

On trouve que

$$v \leq \mu, \text{ dans } [T_1, T^*(l)[.$$

En effet, on raisonne par l'absurde, i.e., il existe $t_0 \in [T_1, T^*(l)[$ tel que $v(t_0) > \mu(t_0)$. On a

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{dt} \leq \frac{1}{1-\mu}, \text{ dans } [t_0, T^*(l)[, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{1-v}, \text{ dans } [t_0, T^*(l)[, \\ \qquad \mu(t_0) < v(t_0). \end{cases}$$

D'après le Théorème 1.5.4,

$$\mu(t) \leq v(t), \text{ pour tout } t \in [t_0, T^*(l)[. \tag{2.19}$$

D'autre part, on a

$$(\mu - v)_t \leq \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{1-v} = \frac{\mu - v}{(1-\mu)(1-v)} \leq 0, \text{ dans } [t_0, T^*(l)[.$$

Donc $\mu - v$ est décroissante dans $[t_0, T^*(l)[$. D'où $(\mu - v)(t_0) \geq \lim_{t \to T^*(l)} (\mu - v)(t) = 0$. Alors on a $\mu(t_0) \geq v(t_0)$. Ceci contredit (2.19).

Par conséquent, il existe un domaine connexe D_ε (d'après 2.19) défini par

$$D_\varepsilon = \{(t, x) \in \Omega_\varepsilon, \ v \leq u\}. \tag{2.20}$$

Soit $E_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon$. Posons

$$E_\varepsilon^1 = E_\varepsilon \cap \{[T_1, T[\times]0, \frac{l}{2}[\},$$

et

$$E_\varepsilon^2 = E_\varepsilon \cap \{[T_1, T[\times]\frac{l}{2}, l[\}.$$

Il y a deux cas à étudier

1. Dans le cas où l'intérieur de D_ε est vide, on a $D_\varepsilon = \partial D_\varepsilon$. En posant $g(t, x) = u(t, x) - v(t)$, on constate que

$$g \geq 0, \text{ sur } \partial D_\varepsilon. \tag{2.21}$$

Or ∂D_ε est une partie du bord de E_ε. Dans E_ε, on a $g(t, x) < 0$. Par continuité on obtient

$$g \leq 0, \text{ sur } \partial D_\varepsilon. \tag{2.22}$$

Ainsi (2.22) et (2.21) impliquent $g \equiv 0$ sur D_ε. Autrement dit $u(t,x) = v(t)$. Comme $[T_1, T^*(l)[\times\{\frac{l}{2}\} \subset D_\varepsilon$, on peut écrire

$$u(t,\frac{l}{2}) = v(t),\ \forall t \in [T_1, T^*(l)[.$$

On en tire, $u_{xx}(t,\frac{l}{2}) = 0$ vu que

$$u_{xx}(t,\frac{l}{2}) + \frac{1}{1-u(t,\frac{l}{2})} = u_t(t,\frac{l}{2}) = v_t(t) = \frac{1}{1-v(t)}.$$

Dans ce cas, il est clair que la solution du Problème (2.2) s'éteint.

2. Dans le cas où l'intérieur de D_ε n'est pas vide, on note $x = s^{(i)}(t)$ le bord séparant D_ε et $E_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1,2$ et $t \in [T_1, T^*(l)[$. On remarque que

$$u(t,x) = v(t),\ x = s^{(i)}(t),\ t \in [T_1, T^*(l)[. \tag{2.23}$$

Il s'ensuit que

$$v'(t) = u_t(t,s^{(i)}(t)) + \dot{s}^{(i)}(t)u_x(t,s^{(i)}(t)),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1-v(t)} = u_{xx}(t,s^{(i)}(t)) + \frac{1}{1-u(t,s^{(i)}(t))} + \dot{s}^{(i)}(t)u_x(t,s^{(i)}(t)),\ t \in [T_1, T^*(l)[.$$

Or, d'après (2.23) $\frac{1}{1-v(t)} = \frac{1}{1-u(t,s^{(i)}(t))}$. D'où

$$u_x(t,s^{(i)}(t))\dot{s}^{(i)}(t) = -u_{xx}(t,s^{(i)}(t)),\ t \in [T_1, T^*(l)[. \tag{2.24}$$

On a

$$\lim_{t\to T^*(l)^-} u(t,s^{(i)}(t)) = \lim_{t\to T^*(l)^-} v(t) = 1,$$

d'autre part, on a

$$\lim_{t\to T^*(l)^-} u(t,\frac{l}{2}) = 1.$$

D'où

$$\lim_{t\to T^*(l)^-} s^{(i)}(t) = \frac{l}{2}$$

Pa ailleurs, notons que

$$\frac{1}{1-u} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{T^*(l)-t}}, \text{ dans } D_\varepsilon. \tag{2.25}$$

car sur D_ε on a $v \leq u$. D'où $\sqrt{2}\sqrt{T^*(l)-t} = 1 - v \geq 1 - u$. De même

$$\frac{1}{1-u} < \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{T^*(l)-t}}, \text{ dans } E_\varepsilon. \tag{2.26}$$

Étape 2 : Soit $p = p(t,x)$ telle que

$$p(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-u)^2} \text{ dans } E_\varepsilon, \\ \frac{1}{2(T^*(l)-t)} \text{ dans } D_\varepsilon. \end{cases}$$

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} v_{1t} = v_{1xx} + pv_1, \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ v_1(t,0) = v_1(t,l) = 0, \ t \in]T_1, T^*(l)[, \\ v_1(T_1,x) = \beta(x) = u_t(T_1,x) > 0, \ x \in]0,l[. \end{cases} \tag{2.27}$$

Grâce au Théorème 1.4.4

$$v_1 > 0, \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

On a

$$\begin{cases} v_{1t} \leq v_{1xx} + \frac{1}{(1-u)^2} v_1, \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ v_1(t,0) = v_1(t,l) = 0, \ t \in]T_1, T^*(l)[, \\ v_1(T_1,x) = \beta(x) = u_t(T_1,x) > 0, \ x \in]0,l[. \end{cases} \tag{2.28}$$

On pose $v = u_t$ dans $[T_1, T^*(l)[\times [0,l]$, on trouve que v satisfait à

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + \frac{1}{(1-u)^2} v, \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ v(t,0) = v(t,l) = 0, \ t \in]T_1, T^*(l)[, \\ v(T_1,x) = \beta(x) = u_t(T_1,x) > 0, \ x \in]0,l[. \end{cases} \tag{2.29}$$

A partir de (2.28), (2.29) et le Théorème 1.4.4, on a l'inégalité suivante

$$0 < v_1 \leq v, \text{ dans } \Omega_\varepsilon. \tag{2.30}$$

Posons maintenant $W(t,x) = v_1(t,x)\sqrt{T^*(l)-t}$ dans Ω_ε, notée par $W^{(1)}(t,x)$ dans D_ε. Pour tout $(t,x) \in D_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} W_t^{(1)} &= \tfrac{-1}{2\sqrt{T^*(l)-t}} v_1 + v_{1t}\sqrt{T^*(l)-t}, \\ &= \tfrac{-v_1 + 2(T^*(l)-t)v_{1t}}{2\sqrt{T^*(l)-t}}, \\ &= \tfrac{-v_1 + 2(T^*(l)-t)(v_{1xx}+pv_1)}{2\sqrt{T^*(l)-t}}, \\ &= v_{1xx}\sqrt{T^*(l)-t}, \\ &= W_{xx}^{(1)}, \end{aligned}$$

et

$$W > 0, \text{ dans } \Omega_\varepsilon,$$

puisque $v_1(t,x)\sqrt{T^*(l)-t} > 0$, dans Ω_ε, d'après (2.30).

Étape 3 : On considère le problème suivant

$$\begin{cases} V_t = V_{xx}, \text{ dans } [T_1, T^*(l)[\times]-\infty,+\infty[, \\ V = W^{(1)}, \text{ dans } D_\varepsilon, \\ V(T_1,x) = \sqrt{\varepsilon}\beta(x), \ x \in [0, s^{(1)}(T_1)[\cup]s^{(2)}(T_1), l], \\ V(T_1,x) = 0, \ x \in]-\infty, 0[\cup]l, +\infty[, \end{cases} \tag{2.31}$$

de plus, V et V_x sont supposées uniformément bornées par rapport à $t \in [T_1, T^*(l)[$ lorsque $x \to \pm\infty$. Ce problème admet une unique solution qu'on notra $\hat{W}$. Utilisant la fonction de Green

$$K(t,x,\tau,\xi) = \tfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\{-\tfrac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\}, \ (\tau,t,x,\xi) \in [T_1, T^*(l)[^2\times]-\infty,+\infty[^2$$

et le Théorème de Holmgren [25], Kawarada affirme que $\hat{W}$ est donnée pour tout $(t,x) \in [T_1, T^*(l)[\times]-\infty, s^{(1)}(t)[$, par

$$\begin{aligned} \hat{W}(t,x) &= \textstyle\int_{T_1}^t [K(t,x,\tau,s^{(1)}(\tau))W_\xi^{(1)}(\tau,s^{(1)}(\tau)) - \\ &\quad W^{(1)}(\tau,s^{(1)}(\tau))K_\xi(t,x,\tau,s^{(1)}(\tau))]d\tau + \textstyle\int_0^{s^{(1)}(T_1)} K(t,x,T_1,\xi)\sqrt{\varepsilon}\beta(\xi)d\xi \\ &\quad + \textstyle\int_{T_1}^t K(t,0,\tau,s^{(1)}(\tau))W^{(1)}(\tau,s^{(1)}(\tau))\dot{s}^{(1)}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

De même, pour tout $(t,x) \in [T_1, T^*(l)[\times]s^{(2)}(t), +\infty[$

$$\begin{aligned}\hat{W}(t,x) \quad &= \int_{T_1}^{t} [K(t,x,\tau,s^{(2)}(\tau))W_\xi(\tau,s^{(2)}(\tau)) - \\ &W(\tau,s^{(2)}(\tau))K_\xi(t,x,\tau,s^{(2)}(\tau))]d\tau + \int_0^{s^{(2)}(T_1)} K(t,x,T_1,\xi)\sqrt{\varepsilon}\beta(\xi)d\xi \\ &+ \int_{T_1}^{t} K(t,0,\tau,s^{(2)}(\tau))W(\tau,s^{(2)}(\tau))\dot{s}^{(2)}(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

C'est à stade que C. Y. Chan et M. K. kwong (1988) notent que la fonction $\hat{W}$ construite par Kawarada dans sa démonstration ne vérifie pas en général l'équation de la chaleur sur les 2 courbes $s^{(1)}$ et $s^{(2)}$, lorsque t est assez proche de $T^*(l)$.

2.6.2 Définition équivalente à la définition 2.2.1

Proposition 2.2. *Considérons le Problème (2.2) et notons u sa solution. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*
1) Il existe $T^*(l) > 0$ tel que

$$\max\{|\ u_t\ |, x \in [0,l]\} \to +\infty \textit{ pour } t \to T^*(l)^-. \tag{2.32}$$

2) Il existe $T^*(l) > 0$ tel que

$$\max\{u,\ x \in [0,l]\} \to 1 \textit{ pour } t \to T^*(l)^-. \tag{2.33}$$

Démonstration. L'implication (2.33) $\Longrightarrow$ (2.32) est démontrée dans la preuve du Théorème 2.4.1. Il nous reste à montrer que (2.32) implique (2.33). Nous avons

$$u_t(t,\frac{l}{2}) = u_{xx}(t,\frac{l}{2}) + f(u(t,\frac{l}{2})), \text{ dans }]0,T^*(l)[.$$

D'après (2.18), on déduit que

$$u_{xx}(t,\frac{l}{2}) + f(u(t,\frac{l}{2})) \le f(u(t,\frac{l}{2})), \text{ dans }]0,T^*(l)[.$$

D'où

$$u_t(t,\frac{l}{2}) \le f(u(t,\frac{l}{2})), \text{ dans }]0,T^*(l)[.$$

Pour $t \to T^*(l)$, (2.32) donne

$$u_t(t, \frac{l}{2}) \to +\infty,$$

puisque $\max\{| u_t |, x \in [0,l]\} = u_t(t, \frac{l}{2})$. On obtient alors

$$+\infty \leq \lim_{t \to T^*(l)^-} f(u(t, \frac{l}{2})).$$

D'où

$$\lim_{t \to T^*(l)^-} f(u(t, \frac{l}{2})) = +\infty.$$

i.e.,

$$\frac{1}{1 - \lim_{t \to T^*(l)^-} u(t, \frac{l}{2})} = +\infty.$$

Nous déduisons que

$$\lim_{t \to T^*(l)^-} u(t, \frac{l}{2}) = 1.$$

Comme $\max\{u, x \in [0,l]\} = u(t, \frac{l}{2})$, on a le résultat désiré. $\square$

D'après les résultats précédents, il y a deux définitions de l'extinction qui sont équivalentes. La définition 2.2.1 peut s'écrire de la façon suivante

Définition 2.6.1. *Soit $x \in]0, l[$, on dit que la solution du Problème (2.2) s'éteint au point $(T^*(l)^-, x)$ s' il existe une suite $(t_n, x_n) \in]0, T^*(l)[\times]0, l[$ telle que $t_n \to T^*(l)^-$, $x_n \to x$ et $u(t_n, x_n) \to 1$ pour $n \to +\infty$.*

2.6.3 Points et ensemble d'extinction

On distingue deux cas concernant $T^*(l)$.

1. $T^*(l) = +\infty$, on dit que l'existence de la solution est globale, dans ce cas, nous avons
   - (a) Si $\| u_t \| \to +\infty$, on dit qu'il y a une extinction en temps infini.
   - (b) Si $\| u_t \| \nrightarrow +\infty$, on dit qu'il n'y a pas extinction.

2. $T^*(l) < +\infty$, dans ce cas si $\| u_t \| \to +\infty$, on dit alors que u s'éteint en temps $T^*(l)$ fini.

Définition 2.6.2. *On suppose que u est la solution du Problème (2.2), soit* $0 < T^*(l) < +\infty$ *et* $x \in [0, l]$. *Le point x est dit point d'extinction, s'il existe deux suites* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset]0, T^*(l)[$ *et* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset]0, l[$ *tels que*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = T^*(l), \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} u(t_n, x_n) = 1.$$

Définition 2.6.3. *On appelle ensemble d'extinction* $S \subset]0, l[$ *l'ensemble de tous les points d'extinction*

$$\begin{aligned} S = \quad & \{x \in]0, l[, \ \exists (t_n, x_n) \in]0, T^*(l)[\times]0, l[, \ t_n \to T^*(l), \ x_n \to x, \\ & u(x_n, t_n) \to 1 \text{ quand } n \to \infty\}. \end{aligned}$$