Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce qui suit, nous allons donner quelques notions et résultats qui sont utilisés tout le long de ce mémoire.

1.1 Notations

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. On supposera toujours que $\partial\Omega$ est assez régulière.
$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.
$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.
Nous définissons les espaces $C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ et $C^{2+\alpha}(]0,T[\times\Omega)$ par
$C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ =Espace des fonctions une fois continûment différentiable par rapport à t sur $]0,T[\times\Omega$ et deux fois continûment différentiables par rapport à x sur $]0,T[\times\Omega$.
$C^{2+\alpha}(]0,T[\times\Omega)$ =Espace des fonctions $u \in C^2(]0,T[\times\Omega)$ telle que $u_{xx}, u_{tt} \in C^{\alpha}(]0,T[\times\Omega)$.

1.2 Fonction lipschitzienne

Définition 1.2.1. *Une fonction f est dite lipschitzienne (ou bien K-lipschitzienne) sur un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$, s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}^+$ telle que*

$$\forall (x, y) \in S^2, \ \mid f(x) - f(y) \mid \leq K \mid x - y \mid .$$

Une fonction f est dite hölderienne (ou bien r-hölderienne) sur S, s'il existe des constantes $K \in \mathbb{R}^+$ et $r \in]0, 1]$ telles que

$$\forall (x, y) \in S^2, \ \mid f(x) - f(y) \mid \leq K \mid x - y \mid^r .$$

Définition 1.2.2. *Une fonction f est dite localement lipschitzienne sur S, si pour tout $x \in S$, il existe un voisinage V de x sur lequel f est lipschitzienne.*
Une fonction f est dite localement hölderienne sur S, si et seulement si pour tout $x \in S$, il existe un voisinage V de x sur lequel f est hölderienne.

Corollaire 1.2.3. *On a*

$$\begin{aligned} f \text{ est k-lipschitzienne } &\Longrightarrow f \text{ est localement k-lipschitzienne,} \\ &\Longrightarrow f \text{ est localement hölderienne.} \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.4. *Toute fonction $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}$ de classe C^1 est localement lipschitzienne.*

1.3 Les opérateurs elliptiques

1.3.1 Régularité elliptique

Soit Ω étant un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. Nous considérons l'opérateur différentiel L donné par

$$Pu = a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_j(x)u_{x_j} + a(x)u,$$

la matrice (a_{ij}) étant définie positive. B est un opérateur frontières

$$Bu = u \text{ ou } Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u,\ x \in \partial\Omega.$$

Ici $\frac{\partial}{\partial \nu}$ signifie la dérivée par rapport à la normale extérieure, et on suppose toujours $\beta \geq 0$, défini sur le bord $\partial\Omega$. Souvent, on suppose de plus que tous les coefficients de P sont de classe C^∞ et que la matrice (a_{ij}) est uniformément elliptique sur Ω. C'est-à-dire qu'il existe $\lambda > 0$ un réel tel que

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda \mid \xi \mid^2,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On suppose aussi que les coefficients a_{ij} et a_j sont uniformément bornés dans Ω.

1.3.2 Principe du maximum

Théorème 1.3.1. ***(Principe du maximum faible)****. (Voir [23], Lemme 5.2 (i), p.100). Nous supposons que* $a \equiv 0$ *et* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *satisfaisant à* $Pu \leq 0$ *dans* Ω. *Alors*

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir [23], p.101.

Corollaire 1.3.2. *Nous supposons que* $a \equiv 0$. *Soit* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *satisfaisant à* $Pu \leq 0$ *dans* Ω *et* $u \geq 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Alors*

$$u \geq 0 \textit{ dans } \overline{\Omega}.$$

1.4 Les opérateurs paraboliques

1.4.1 Régularité parabolique (Voir [2]).

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $T > 0$ un réel donné. Soit L un opérateur du second ordre de la forme

$$Lu = u_t - a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + a_j(t,x)u_{x_j} + a(t,x)u. \tag{1.1}$$

On suppose de plus que tous les coefficients de L sont de classe $C^0([0,T] \times \overline{\Omega})$ et que la matrice $(a_{ij}(t,x))_{i,j}$ est symétrique (c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$). Si (a_{ij}) est définie positive (i.e., si pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$, $a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $(t,x) \in]0,T[\times\Omega$) alors L est parabolique en (t,x). Si L est parabolique pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega}$ alors on dit que L est parabolique dans $[0,T] \times \overline{\Omega}$. S'il existe une constante strictement positive λ telle que

$$\lambda \mid \xi \mid^2 \leq a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j, \ (t,x) \in]0,T[\times\Omega, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

alors L est dit uniformément parabolique sur $]0,T[\times\Omega$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que

(i) L est parabolique dans $]0,T[\times\Omega$,

(ii) Les coefficients de L sont des fonctions continues,

(iii) T et l sont des réels positifs et non nuls.

Définition 1.4.1. *(Voir [14], Definition, p.3). On dit que u est une solution du problème* $Lu = 0$ *sur un domaine* $]0,T[\times\Omega$, *si*
(1) $u_{x_i x_j}$, u_{x_j} *et* u_t *sont des fonctions continues dans* $]0,T[\times\Omega$.
(2) $Lu(t,x) = 0$ *pour tout* $(t,x) \in]0,T[\times\Omega$.

1.4.2 Noyau de Green $G(t,x,\tau,\xi)$

Définition 1.4.2. *(Voir [21], Theorem 16.1, p.408). Soit l'opérateur L défini par la Formule (1.1). On dit que* $G(t,x,\tau,\xi)$ *est un noyau de Green associé à L si* $G(t,x,\tau,\xi)$ *vérifie pour* $(\tau,\xi) \in]0,T[\times\Omega$

$$\begin{cases} LG(t,x,\tau,\xi) = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \ t \in]0,T[, \ x \in \Omega, \\ G(\tau,x,\tau,\xi) = 0, \\ G(t,x,\tau,\xi) = 0, \ t \in]0,T[, \ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où δ *est la distribution de Dirac.*

1.4.3 Adjoint de l'opérateur L

Définition 1.4.3. *(Voir [14], Sec. 8, p.26). L'adjoint de l'opérateur (1.1) est défini par*

$$L^*v = -v_t - a_{ij}(t,x)v_{x_ix_j} + a_j^*(t,x)v_{x_j} + a^*(t,x)v$$

où $a_j^* = -a_j - 2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$ *et* $a^* = a - \frac{\partial a_j}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$.

1.4.4 Principe du maximum

Dans cette partie, on suppose que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \| a_{ij} \|_\infty =: A < \infty, \ \sum_{j=1}^{n} \| a_j \|_\infty =: B < \infty, \ \ \| a \|_\infty = C < \infty,$$

on a alors

Théorème 1.4.4. *(Voir [1], p 500). Soit* $u \in C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ *satisfaisant* $Lu \geq 0$ *dans* $]0,T[\times\Omega$ *et* $u \geq 0$ *sur* $]0,T[\times\partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega$. *Alors*

$$u \geq 0, \ dans \ [0,T] \times \overline{\Omega}.$$

Si en plus $u(t_0,x_0) = 0$ *en* $(t_0,x_0) \in]0,T[\times\Omega$, *alors*

$$u \equiv 0, \ dans \ [0,t_0] \times \overline{\Omega}.$$

La démonstration du théorème est basée sur les trois résultats suivants

Lemme 1.1. *(**Principe du maximum faible**). (Voir [11], Théorème 1.45, p.29). Nous supposons que* $a \equiv 0$ *et* $u \in C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ *satisfaisant à* $Lu \geq 0$ *dans* $]0,T[\times\Omega$. *Alors*

$$\min_{(t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega}} u(t,x) = \min_{(t,x)\in]0,T[\times\partial\Omega\cup\{0\}\times\Omega} u(t,x). \tag{1.2}$$

Lemme 1.2. *(Voir [11], Corollaire 1.46, p.29). Nous supposons que* $a \geq 0$ *et* $u \in C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ *satisfaisant à* $Lu \geq 0$ *dans* $]0,T[\times\Omega$. *Alors*

$$\min_{(t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega}} u(t,x) = \min_{(t,x)\in]0,T[\times\partial\Omega\cup\{0\}\times\Omega} u^-(t,x),$$

où $u^-(t,x) = \sup\{-u(t,x), 0\}$.

On en déduit, en utilisant le Théorème 1, p.37, [8] le résultat suivant

Lemme 1.3. *(Voir [15], Corollary 3.6, p. 31) Soient* $a \geq 0$ *et* $u \in C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ *satisfaisant à* $Lu \geq 0$ *dans* $]0,T[\times\Omega$ *et* $u \geq 0$ *sur* $]0,T[\times\partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega$. *Alors*

$$u \geq 0, \text{ dans } [0,T] \times \overline{\Omega}.$$

De plus, si $u(t_0,x_0) = 0$ *en* $(t_0,x_0) \in]0,T[\times]0,l[$, *alors* $u \equiv 0$ *dans* $[0,t_0] \times [0,l]$.

A partir de ces lemmes la démonstration du Théorème 1.4.4 se fait comme suit. On pose $w = ue^{-\gamma t}$ où $\gamma \geq -a(t,x)$. On a

$$\begin{cases} w_t - a_{ij}(t,x)w_{x_ix_j} + a_j(t,x)w_{x_j} + (a(t,x)+\gamma)w = e^{-\gamma t}Lu \geq 0, \text{ dans }]0,T[\times\Omega, \\ w \geq 0, \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega. \end{cases}$$

Grâce au Lemme 1.3, nous avons $w \geq 0$ dans $[0,T] \times \overline{\Omega}$. Comme $u = we^{\gamma t}$, on déduit donc $u \geq 0$ dans $[0,T] \times \overline{\Omega}$. Si $u(t_0,x_0) = 0$ où $(t_0,x_0) \in]0,T[\times\Omega$, alors $w(t_0,x_0) = 0$. On trouve que

$$w \equiv 0, \text{ dans } [0,t_0] \times \overline{\Omega},$$

cela implique que

$$u \equiv 0, \text{ dans } [0,t_0] \times \overline{\Omega},$$

ce qui achève la démonstration.

Nous terminons cette section par le théorème suivant (rappelons que Ω est assez régulier)

Théorème 1.4.5. ***(Lemme de Hopf)***. *(Voir [2], Theorem A.10, p.57). Soient* $Lu \geq 0$ *dans* $]0,T[\times\Omega$ *et* $(t_0,x_0) \in]0,T[\times\partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega$. *On suppose que* $a \equiv 0$ *et* $u \in C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ *satisfaisant à* $u(t,x) > u(t_0,x_0)$ *pour tout* $(t,x) \in]0,T[\times\Omega$. *Alors on a*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(t_0,x_0) > 0.$$

Ici $\frac{\partial}{\partial \nu}$ *signifie la dérivée par rapport à la normale extérieure.*

1.5 Méthodes des sur et sous solutions

Dans cette section, on étudie l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant

$$\begin{cases} Lu = f(u) \text{ (resp. } Lu = f(u, u_x)), \text{ dans }]0, T[\times\Omega, \\ Bu = g, \text{ sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ u = h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

dans l'espace $C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0, T[\times\Omega)$, où B est l'opérateur frontière tel que $Bu = u$ ou $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(t, x)u$, $\beta \in C^0(]0, T[\times\partial\Omega)$, $\beta(t, x) \geq 0$.
On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) et localement lipschitzienne (resp. f localement lipschitzienne par rapport à la première variable, la deuxième variable étant dans un intervalle borné), i.e., il existe une constante A telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(u, v) \in [a, b]$, $\mid f(u) - f(v) \mid \leq A \mid u - v \mid$ (resp. $\mid f(u, p) - f(v, p) \mid \leq A \mid u - v \mid$ et $\mid p \mid \leq p_0 < \infty$). On suppose que $h \in C^1(\Omega)$, $g \in C^1(]0, T[)$. En outre, pour tous $(t, x) \in]0, T[\times\Omega$ et $(t^0, x^0) \in]0, T[\times\Omega$ on suppose

$$\mid a_{ij}(t, x) - a_{ij}(t^0, x^0) \mid \leq A,$$

$$\mid a_i(t, x) - a_i(t, x^0) \mid \leq A,$$

$$\mid a(t, x) - a(t, x^0) \mid \leq A.$$

Théorème 1.5.1. *(**Principe de comparaison**)(Voir[13], Theorem B. p.263) Nous supposons que a est bornée. Soient u la solution du Problème (1.3) dans $[0, T] \times \overline{\Omega}$, v [resp. w] continue dans $[0, T] \times \overline{\Omega}$ et v_t, v_{xx}[resp. w_t, w_{xx}] des fonctions continues dans $]0, T[\times\Omega$. Si*

$$\begin{cases} Lv \geq f(v), \text{ dans }]0, T[\times\Omega, \\ v \geq g, \text{ sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ v \geq h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega, \end{cases}$$

alors

$$v \geq u, \text{ dans } [0, T] \times \overline{\Omega}.$$

Si

$$\begin{cases} Lw \leq f(w), \ dans \ ]0,T[\times\Omega, \\ w \leq g, \ sur \ ]0,T[\times\partial\Omega, \\ w \leq h, \ sur \ \{0\}\times\Omega, \end{cases}$$

alors

$$w \leq u, \ dans \ [0,T]\times\overline{\Omega}.$$

Démonstration. On pose $z = v - u$ dans $[0,T]\times\overline{\Omega}$. On a $Lz \geq 0$ dans $]0,T[\times\Omega$ et comme il existe une constante k telle que $\mid f(v) - f(u) \mid\leq k \mid v - u \mid$

$$Lz = Lv - Lu \geq f(v) - f(u) \geq -kz \text{ dans }]0,T[\times\Omega.$$

Alors

$$Lz + kz \geq 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega.$$

où η est entre $v(t,x)$ et $u(t,x)$. On pose

$$L_1 z = Lz + kz \text{ dans }]0,T[\times\Omega$$

où η est entre $v(t,x)$ et $u(t,x)$. D'où

$$L_1 z \geq 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega.$$

Nous avons aussi $z \geq 0$ dans $]0,T[\times\partial\Omega\cup\{0\}\times\Omega$. D'après le Théorème 1.4.4, on obtient donc $z \geq 0$ dans $[0,T]\times\overline{\Omega}$. D'où le résultat. De la même façon, on montre que $w \leq u$ dans $[0,T]\times\overline{\Omega}$. □

Définition 1.5.2. *On dit que $\overline{u}$ est une sur solution du Problème (1.3), si $\overline{u}$ appartient à $C([0,T]\times\overline{\Omega})\cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ et vérifie*

$$\begin{cases} L\overline{u}(t,x) \geq f(\overline{u}(t,x)), \ (t,x) \in]0,T[\times\Omega, \\ B\overline{u}(t,x) \geq g(t), \ (t,x) \in]0,T[\times\partial\Omega, \\ \overline{u}(t,x) \geq h(x), \ (t,x) \in \{0\}\times\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

De même, on dit que $\underline{u} \in C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ *est une sous solution du Problème (1.3), si* $\underline{u}$ *appartient à* $C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ *et vérifie*

$$\begin{cases} L\underline{u}(t,x) \leq f(\underline{u}(t,x)),\ (t,x) \in]0,T[\times\Omega, \\ B\underline{u}(t,x) \leq g(t),\ (t,x) \in]0,T[\times\partial\Omega, \\ \underline{u}(t,x) \leq h(x),\ (t,x) \in \{0\} \times \Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Maintenant, nous donnons le théorème qui démontre l'existence et l'unicité de la solution du Problème (1.3) dans l'espace $C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$

Théorème 1.5.3. *Soient* $\underline{u}$ *une sous solution bornée et* $\overline{u}$ *une sur solution bornée du Problème (1.3) sur* $[0,T] \times \overline{\Omega}$*. Alors le Problème (1.3) admet une unique solution* u *telle que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *sur* $[0,T] \times \overline{\Omega}$*.*

Avant de donner la preuve de ce théorème, on présente d'abord trois lemmes

Lemme 1.4. *(Voir [27], Lemma 2.1, p.54). Soient* $a \in C(]0,T[\times\overline{\Omega})$*,* $a \leq 0$ *et si* $\beta \equiv 0$ *dans* $]0,T[\times\partial\Omega$*. Nous supposons que* $u \in C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$ *satisfait à*

$$\begin{aligned} Lu(t,x) &\geq 0,\ (t,x) \in]0,T[\times\Omega, \\ Bu(t,x) &\geq 0,\ (t,x) \in]0,T[\times\partial\Omega, \\ u(t,x) &\geq 0,\ (t,x) \in \{0\} \times \Omega. \end{aligned}$$

Alors $u \geq 0$ *dans* $[0,T] \times \overline{\Omega}$*.*

Dans ce qui suit, nous considérons $\beta \equiv 0$.

Lemme 1.5. *Soient* $\underline{u}$ *une sous solution et* $\overline{u}$ *une sur solution du Problème (1.3). Alors* $\underline{u}(t,x) \leq \overline{u}(t,x)$*,* $(t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega}$*.*

Démonstration. On pose $w = \overline{u} - \underline{u}$, dans $[0,T] \times \overline{\Omega}$. On sait qu'il existe une constante k positive telle que

$$\mid f(\overline{u}) - f(\underline{u}) \mid \leq k \mid \overline{u} - \underline{u} \mid$$

w satisfait à

$$\begin{aligned} L_1 w(t,x) &\geq 0, \ (t,x) \in]0,T[\times\Omega, \\ Bw(t,x) &\geq 0, \ (t,x) \in]0,T[\times\partial\Omega, \\ w(t,x) &\geq 0, \ (t,x) \in \{0\} \times \Omega \end{aligned}$$

où

$$L_1 w(t,x) = Lw(t,x) - kw.$$

En utilisant le Lemme 1.4, on obtient alors $w \geq 0$ dans $[0,T] \times \overline{\Omega}$, de sorte que $\overline{u}(t,x) \geq \underline{u}(t,x)$, $(t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega}$. Ce qui termine la preuve. □

Lemme 1.6. *Soient E un espace de Banach, C un convexe, borné et fermé de E et $Q : C \to C$ continue et compact sur C. Alors Q admet un point fixe.*

Démonstration du Théorème 1.5.3. (Voir [29]). On considère le problème suivant

$$\begin{cases} Lu = f(u) \text{ (resp. } Lu = f(u,u_x)\text{), dans }]0,T[\times\Omega, \\ Bu = g, \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u = h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

On sait qu'il existe une constante M positive telle que

$$\forall u,v \in [\underline{u},\overline{u}], \mid f(u) - f(v) \mid \leq M \mid u - v \mid \quad \text{(resp. } \mid f(u,p) - f(v,p) \mid \leq M \mid u - v \mid \text{ et } \mid p \mid \leq p_0 < \infty\text{).}$$

Ecrivons à partir de (1.6)

$$\begin{cases} Lu + Mu = f(u) + Mu \text{ (resp. } Lu + Mu = f(u,u_x) + Mu\text{), dans }]0,T[\times\Omega, \\ Bu = g, \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u = h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega. \end{cases}$$

On considère alors le problème suivant

$$\begin{cases} Lv + Mv = 0, \text{ dans }]0,T[\times\Omega, \\ Bv = g, \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ v = h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega, \end{cases}$$

qui admet une unique solution. On pose $w = u - v$ et on s'aperçoit que

$$\begin{cases} Lw + Mw = f^*(w) \text{ (resp. } Lw + Mw = f(w, w_x) + Mw\text{), dans }]0, T[\times\Omega, \\ Bw = 0, \text{ sur } [0, T[\times\{0, l\}, \\ w = 0, \text{ sur } \{0\} \times \Omega, \end{cases}$$

où $f^*(w) = f(w+v) + M(w+v)$ (resp. $f^*(w, w_x) = f(w+v, w_x+v_x) + M(w+v)$). Remarquons que le problème

$$\begin{cases} Lw + Mw = u, \text{ dans }]0, T[\times\Omega, \\ Bw = 0, \text{ sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ w = 0, \text{ sur } \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

admet une unique solution $w = Gu$, G est un opérateur parabolique et compact de E dans E où $E = C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0, T[\times\Omega)$. Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} Lu + Mu = f(u) + Mu \text{ (resp. } Lu + Mu = f(u, u_x) + Mu\text{), dans }]0, T[\times\Omega, \\ Bu = g, \text{ sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ u = h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega. \end{cases}$$

Par suite, l'opérateur Q défini par $Qu = G(f(u) + Mu) = v$ (resp. $Qu = G(f(u, u_x) + Mu) = v$) est un opérateur linéaire, parabolique et compact tel que $Q : S \to S$ où $S = \{u \in E\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et $\| u \|_E \leq M_1,\ M_1 \geq 0\}$. S est fermé, borné et convexe dans E. Nous utilisons le Lemme 1.6, donc nécessairement la fonction $v = Qu$ admet un point fixe $u \in S$. Soient u_1 et u_2 deux solutions du Problème (1.3), comme u_1 est solution du Problème (1.3) et u_2 satisfait à

$$\begin{cases} Lu_2 \leq f(u_2) \text{ (resp. } Lu_2 \leq f(u_2, u_{2x})\text{), dans }]0, T[\times\Omega, \\ Bu_2 \leq g, \text{ sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ u_2 \leq h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega, \end{cases}$$

en utilisant le Thèorème, on obtient $u_2 \leq u_1$ d'autre part, comme u_2 est solution du Problème (1.3) et u_1 satisfait à

$$\begin{cases} Lu_1 \leq f(u_1) \text{ (resp. } Lu_1 \leq f(u_1, u_{1x})\text{), dans }]0, T[\times\Omega, \\ Bu_1 \leq g, \text{ sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ u_1 \leq h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega, \end{cases}$$

en utilisant le Thèorème, on trouve que $u_1 \leq u_2$. On obtient alors $u_1 = u_2$. Le théorème est prouvé. □

Nous aurons aussi besoin des résultats suivants dans la suite de ce travail

Lemme 1.7. *(**Gronwall**). (Voir [9], Lemma 8.4.1, p.98). Soit $b = b(t)$ une fonction continue qui vérifie*

$$0 \leq b(t) \leq \int_0^t \{a(\tau)b(\tau) + c(\tau)\}d\tau + f(t),$$

pour $0 \leq t \leq T$, où $a \geq 0$, $c \geq 0$ et f sont des fonctions continues sur $[0, T]$. Alors

$$0 \leq b(t) \leq \{\int_0^T c(t)dt + \parallel f \parallel_T\} \exp\{\int_0^t a(\tau)d\tau\}$$

où $\parallel f \parallel_T = \sup\limits_{0 \leq s < T} \mid f(s) \mid$.

Lemme 1.8. *(Voir [9], Lemma 8.4.2, p.99). Pour $\parallel \varphi \parallel_t \leq C_1 + C_2 \int_0^t \parallel \varphi \parallel_\tau d\tau$, nous avons*

$$\parallel \varphi \parallel_t \leq C_1 \exp(C_2 t), \; t \geq 0$$

où $\parallel \varphi \parallel_t = \sup\limits_{0 \leq s < t} \mid \varphi(s) \mid$ et $\parallel \varphi \parallel_\tau = \sup\limits_{0 \leq s < \tau} \mid \varphi(s) \mid$.

Lemme 1.9. *Soit $I = [t_0, t_1]$. On suppose que $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1(I)$ satisfaisant à*

$$\begin{cases} u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t), \; t \in I, \\ \qquad u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Alors

$$u(t) \leq u_0 \exp(\int_{t_0}^t a(s)ds) + \int_{t_0}^t b(s) \exp(\int_s^t a(l)dl).$$

Théorème 1.5.4. *Nous supposons que f est une fonction continue par rapport à t et lipschitzienne par rapport à u. Soient $u, v \in C^1([t_0, +\infty[)$ satisfaisant à*

$$\begin{cases} u'(t) \leq f(t, u(t)), \\ v'(t) = f(t, v(t)), \\ u(t_0) \leq v(t_0), \end{cases}$$

alors

$$u(t) \leq v(t),\ t \geq t_0.$$

Le résultat reste vrai si $u, v \in C^1([t_0, b[)$ *où* b *est un nombre supérieur à* t_0.

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde, s'il existe $T > t_0$ tel que $u(T) > v(T)$, on pose

$$t_1 = \sup\{t : t_0 \leq t < T \text{ et } u(t) \leq v(t)\},$$

on en déduit que $u(t_1) = v(t_1)$ et $u(t) > v(t), \forall t \in]t_1, T]$ (puisque $u - v$ est continue). Pour $t_1 \leq t \leq T$ on a $\mid u(t) - v(t) \mid = u(t) - v(t)$. Nous avons alors

$$\exists L \geq 0,\ (u-v)' \leq f(t,u) - f(t,v) \leq L \mid u - v \mid = L(u-v).$$

On applique le Lemme 1.9 sur $[t_1, T]$ avec $(u-v)(t_1) = 0$, $a(t) = L$ et $b(t) = 0$. Donc $0 < u - v \leq 0$ sur $[t_1, T]$. C'est une contradiction. □

Pour terminer, rappelons ici cette définition

Définition 1.5.5. *(Voir [19]). Soit* u *la solution du Problème (1.3). On dit que* u *explose en temps fini s'il existe* $0 < T < \infty$ *tel que* $\parallel u(t) \parallel \to \infty$ *pour* $t \to T^-$ *où* $\parallel u(t) \parallel = \max\{\mid u(t,x) \mid, x \in \overline{\Omega}\}$.