Introduction générale

L'étude du phénomène d'extinction (quenching, en anglais) des solutions des problèmes aux limites, est devenue un vaste domaine de recherche depuis que son concept a fait son apparition (en 1975) dans un article de Kawarada. Ce dernier a étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u),\ t > 0,\ x \in]0, l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t > 0, \\ u(0,x) = 0,\ x \in]0, l[, \end{cases} \tag{1}$$

dans le cas où $f(u) = \frac{1}{1-u}$.

Ce phénomène a été constaté suite à des questions qui se sont posées dans l'étude du phénomène de polarisation dans les conducteurs ioniques [19], ainsi que dans des modèles mathématiques de certaines réactions en chimie [12] et en biologie [10].

Après 1975, les recherches dans ce domaine se sont succédées : Certains auteurs étaient intéressés par la généralisation du résultat obtenu par Kawarada. D'autres se sont penchés sur les propriétés des solutions des problèmes du type (1). Les premiers qui ont commencé à étudier le Problème (1) dans un cadre plus général (en prenant un autre second membre f) sont Walter W. et Acker A. (1976, 1978). Ils ont aussi présenté de nouvelles propriétés de la solution de (1).

On recense maintenant plus de 400 articles publiés sur ce thème depuis 1975, ainsi que plusieurs ouvrages. Par exemple, Acker H. A., Levine H. A. & Montgomery T. J. (1980) ont démontré qu'il existe une longueur critique l^* telle que si $l \leq l^*$ alors $u_t(t, \frac{l}{2}) \to 0$ et $u_{xx}(t, \frac{l}{2}) \to -\infty$ quand $t \to \infty$. Par contre si $l > l^*$ alors la solution du Problème (1) s'éteint en temps fini. Chang H. P. & Levine A. H. (1981) ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(u), \ t > 0, \ x \in]0, l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = 0 = u_t(0,x), \ x \in]0, l[, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} f :]-\infty, c[\to]0, +\infty[, \\ f' > 0 \text{ sur }]-\infty, c[, \\ f \in C^1(]-\infty, c[), \\ f \text{ est convexe}, \\ \lim_{s \to c^-} f(s) = +\infty. \end{cases}$$

Ces auteurs ont montré qu'il existe deux nombres l_1 et l_2, $l_1 \leq l_2$ tels que si $l < l_1$ alors la solution de ce problème ne s'éteint pas, mais si $l > l_2$, la solution de ce problème s'éteint en temps fini. Quant à Lieberman M. G. (1983), il a étudié les problèmes suivants

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ t > 0, \ x \in]0, l[, \\ u(t,0) = u(0,x) = 0, \ t > 0, \\ u_x(t,l) = \phi(u(t,l)), \ x \in]0, l[\ , \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ t > 0, \ x \in]0, l[, \\ u(t,0) = u(0,x) = u_t(x,0) = 0, \ t > 0, \\ u_x(t,l) = \phi(u(t,l)), \ x \in]0, l[\end{cases}$$

où $\phi :]-\infty, 1[\to]0, +\infty[$, $\phi' > 0$ sur $]-\infty, 1[$, $\phi \in C^1(]-\infty, 1[)$ et $\lim_{s \to 1^-} \phi(s) = +\infty$.

En 1988, C. Y. Chan & M. K. kwong avaient publié un article intitulé "*Quenching phenomena for singular nonlinear parabolic equations*" où ils ont décelé une lacune dans la démonstration du théorème principal de Kawarada (1975). Ce papier a fourni une démonstration correcte du théorème de Kawarada, qui en plus, a l'avantage de s'appliquer à d'autres choix de la fonction f dans (1).

Ces travaux se sont poursuivis avec un grand nombre d'auteurs parmi lesquels on peut citer Park S. R. (1994), Dyakevich N. E. (2007), Zhi Y., Mu C. & Yuan D. (2008), Nie Y., Wang C. & Zhou Q. (2013), Zhou Q., Nie Y., Zhou X. & Guo W. (2015) qui ont étudié respectivement le phénomène d'extinction pour les problèmes suivants

$$\begin{cases} x^q u_t = u_{xx} + x^p f(u),\ t \in]0,T[,\ x \in]0,l[, \\ u_x(t,0) = 0 = u_x(t,l),\ t \in]0,T[, \\ u(0,x) = 0,\ x \in]0,l[\end{cases}$$

où $f(0) > 0$, $f' > 0$, $f'' \geq 0$ et $\lim\limits_{s \to c} f(s) = +\infty$;

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \varepsilon(f(u))_x,\ t \in]0,T[,\ x \in]0,1[, \\ u(t,0) = 0,\ u_x(t,1) = ag(u(t,1)),\ t \in]0,T[, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in]0,1[, \end{cases}$$

où $p > 0$, $a > 0$, ε est un reél $T \leq \infty$ et f est une fonction différentiable $g :]-\infty,1[\to]0,+\infty[$, $g \in C^1(]-\infty,1[)$ et $\lim\limits_{s \to 1^-} g(s) = +\infty$;

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \varepsilon \parallel u(t,.) \parallel^q \ln(\alpha u),\ t > 0,\ x \in]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 1,\ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in]0,1[\end{cases}$$

où $\parallel u(t,.) \parallel = \int_0^1 u(t,x)dx$, $\varepsilon > 0$, $q > 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0(0) = u_0(1) = 1$;

$$\begin{cases} x^q u_t = u^m_{xx} + f(u^m),\ t \in]0,T[\ x \in]0,l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t \in]0,T[, \\ u(0,x) = 0,\ x \in]0,l[\end{cases}$$

où $q \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$, $f \in C^2([0,c^m[)$ satisfaisant à $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$, $f''(s) \geq 0$ pour $0 < s < c^m$ et $\lim\limits_{s \to c^{m-}} f(s) = +\infty$;

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + b(x)u_x(t,x) = f(u(t,x)),\ (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,l[, \\ u(t,0) = 0 = u(t,l),\ t \in]0,+\infty[, \\ u(0,x) = 0,\ x \in]0,l[\end{cases} \tag{2}$$

où $l > 0$, $b \in C^1([0,+\infty[) \cap L^\infty([0,+\infty[)$ et $f \in C^1([0,c[)$ satisfaisant à

$$f(0) > 0,\ f'(s) > 0 \text{ pour } 0 < s < c,\ \lim_{s \to c^-} f(s) = +\infty \text{ et } f'' \geq 0.$$

Notre travail a consisté principalement à déterminer des conditions suffisantes assurant l'extinction des solutions en temps fini de certains problèmes aux limites. On se pose alors les questions suivantes :

1. Quand l'extinction se produit ?
2. Est-ce que l'extinction se produit en un seul point ou en plusieurs points ?
3. Est-ce que l'extinction se produit en temps infini ?

Les chapitres II, III, IV et V apportent des réponses aux questions précédentes. Ce mémoire comporte cinq chapitres qui sont :

Chapitre I, Nous nous intéressons aux problèmes aux limites suivants

$$\begin{cases} Lu = f(u) \text{ dans }]0,T[\times\Omega, \\ Bu = g, \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u = h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega \end{cases} \tag{3}$$

et

$$\begin{cases} Lu = f(u,u_x) \text{ dans }]0,T[\times\Omega, \\ Bu = g, \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u = h, \text{ sur } \{0\} \times \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Dans cette étude, Ω est un domaine borné régulier, L désigne un opérateur linéaire uniformément parabolique. Ce chapitre contient également un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de ce mémoire. L'existence et l'unicité d'une solution classique y sont démontrées par une méthode de sur et sous solutions. Il a été prouvé que les solutions des Problèmes (3) et (4) appartiennent à $C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T[\times\Omega)$.

Chapitre II, intitulé *"Sur les solutions du problème $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$"*. Dans ce chapitre, nous exposons en détail l'article fondamental de Kawarada [19] qui a donné naissance à la notion du "quenching".

Chapitre III, intitulé "*Phénomène d'extinction pour des équations semi-linéaires singulières paraboliques*". Nous traitons ici des problèmes aux limites avec un terme singulier qui généralisent les résultats de Kawarada [19], en commençant par l'étude des deux problèmes suivants

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0,l[\end{cases} \tag{5}$$

et

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,l[, \\ u_x(t,0) = g(t), \ u_x(t,l) = -g(t), \ t > 0, \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0,l[\end{cases} \tag{6}$$

où g est continue et bornée inférieurement par une constante positive sur $]0,+\infty[$.
C. Y. Chan et M. K. kwong [8] ont trouvé que sous les conditions suivantes

$$\begin{cases} f \in C^1([0,c[), \ f(0) > 0, \\ \lim\limits_{s\to c^-} f(s) = +\infty, \\ \int_0^c f(s)ds = \infty, \\ f' > 0 \text{ sur } [0,c[, \\ f'' > 0 \text{ sur } [0,c[, \end{cases}$$

les solutions des Problèmes (5) et (6) s'éteignent au point $(T^*(l), \frac{l}{2})$ où

$$\begin{aligned} T^*(l) = \ & \sup\{T > 0 : \text{le Problème (5) (resp. (6)) admet une solution} \\ & u \in C([0,T]\times[0,l]) \cap C^{1,2}(]0,T[\times]0,l[) \text{ et } \sup_{(t,x)\in]0,T[\times]0,l[} u_l(t,x) < c\}. \end{aligned}$$

Nous avons terminé ce chapitre par l'étude des problèmes

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u,u_x), \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,l[, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0,l[, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, u_x), \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ u_x(t, 0) = g(t), \ u_x(t, l) = -g(t), \ t > 0, \\ u(0, x) = 0, \ x \in]0, l[. \end{cases}$$

Chan et kwong ont montré que les solutions des deux problèmes précédents s'éteignent lorsque f satisfait à des conditions bien précises.

Chapitre IV, intitulé "*Phénomène d'extinction pour une équation parabolique semi-linéaire dégénérée*". Nous étudierons ici le problème aux limites

$$\begin{cases} u_t - (p(x)u_x)_x = f(u), \text{ dans }]0, T[\times]0, l[, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \ t \in]0, T[, \\ u(0, x) = u_0(x), \ x \in]0, l[\end{cases} \tag{7}$$

où $0 < T \leq +\infty$.

L. Ke et S. Ning [20] ont supposé

1. $p(0) = 0$, $p \in C^1(]0, +\infty[)$, $p(x) > 0$ dans $]0, +\infty[$, $\frac{1}{p} \in L^1([0, l])$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$,
2. $f(0) > 0$, $f \in C^1(]0, 1[)$, $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$, $\lim\limits_{s \to 1^-} f(s) = +\infty$ et $\int_0^1 f(s)ds < \infty$,
3. $u_0 \in C^{2+\alpha}(]0, l[) \cap C([0, l])$ pour un certain $\alpha \in]0, 1[$ avec $0 \leq u_0 < 1$, $u_0(0) = u_0(l) = 0$ et $\int_0^l p(x)u_0'^2(x)dx < \infty$.

   Moyennant ces conditions et en posant

$$\begin{aligned} T^*(l) = \ & \sup\{T > 0 : \text{le Problème (7) admet une solution} \\ & u \in C([0, T] \times [0, l]) \cap C^{1,2}(]0, T[\times]0, l[) \text{ et } \sup_{(t,x) \in]0,T[\times]0,l[} u_l(t, x) < c\}, \end{aligned}$$

   les auteurs ont montré qu'il existe un $x^* \in]0, l[$ tel que la solution du Problème (7) s'éteint en $T^*(l)$.

Chapitre V, intitulé "*Phénomène d'extinction pour une équation semi-linéaire de réaction-diffusion-convection*". Ce chapitre est consacré à l'étude du Problème (2). Zhou Q., Nie Y., Zhou X. et Guo W. [17] ont démontré que les points d'extinction appartiennent à l'intervalle $[\delta, l-\delta]$ où

$$\delta = \frac{c^2}{2lM} \exp(-\frac{1}{2} \parallel b \parallel^2_{L^\infty([0,+\infty[)} T^*(l)),$$

$M = \int_0^c f(s)ds$ et

$$\begin{aligned} T^*(l) = \quad & \sup\{T > 0 : \text{le Problème (2) admet une solution} \\ & u \in C([0,T] \times [0,l]) \cap C^{1,2}(]0,T[\times]0,l[) \text{ et } \sup_{(t,x)\in]0,T[\times]0,l[} u_l(t,x) < c\}. \end{aligned}$$