
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de Magister

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation mathématique et analyse numérique

PAR : BELAL DHEHBIYA

La notion du "quenching" (extinction) et son développement. Etude de quelques exemples

Soutenu le : 16/11/2016

Devant le jury

M. Abdelhafid MOKRANE	Professeur, ENS Kouba	Président
M. Abdelaziz CHOUTRI	M. C. A., ENS Kouba	Examineur
M. Toufik MOUSSAOUI	Professeur, ENS Kouba	Examineur
M. Boubaker Khaled SADALLAH	Professeur, ENS Kouba	Encadreur

Année Universitaire : 2016-2017

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de Magister

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation mathématique et analyse numérique

PAR : BELAL DHEHBIYA

La notion du "quenching" (extinction) et son
développement. Etude de quelques exemples

Soutenu le : 16/11/2016

Devant le jury

M. Abdelhafid MOKRANE	Professeur, ENS Kouba	Président
M. Abdelaziz CHOUTRI	M. C. A., ENS Kouba	Examineur
M. Toufik MOUSSAOUI	Professeur, ENS Kouba	Examineur
M. Boubaker Khaled SADALLAH	Professeur, ENS Kouba	Encadreur

Année Universitaire : 2016-2017

Table des matières

Introduction générale	4
1 Préliminaires	11
1.1 Notations	11
1.2 Fonction lipschitzienne	12
1.3 Les opérateurs elliptiques	12
1.3.1 Régularité elliptique	12
1.3.2 Principe du maximum	13
1.4 Les opérateurs paraboliques	13
1.4.1 Régularité parabolique (Voir [2]).	13
1.4.2 Noyau de Green $G(t, x, \tau, \xi)$	14
1.4.3 Adjoint de l'opérateur L	15
1.4.4 Principe du maximum	15
1.5 Méthodes des sur et sous solutions	17
2 Sur les solutions du problème $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$	24
2.1 Introduction	24
2.2 Définition	25
2.3 Exemples	26
2.4 Démonstration de la Proposition 2.1	27
2.5 Démonstration du Théorème 2.4.1	33
2.6 Commentaire	37

2.6.1	Démonstration de Kawarada	37
2.6.2	Définition équivalente à la définition 2.2.1	42
2.6.3	Points et ensemble d'extinction	43
3	Phénomène d'extinction pour des équations semi-linéaires singulières paraboliques	45
3.1	Introduction	45
3.2	Étude du 1 ^{er} cas	46
3.2.1	Conditions de Dirichlet	46
3.2.2	Conditions de Neumann	61
3.3	Étude du 2 ^{ème} cas	63
3.3.1	Conditions de Dirichlet	63
3.3.2	Conditions de Neumann	69
3.4	Commentaire	72
4	Phénomène d'extinction pour une équation parabolique semi-linéaire dégénérée	75
4.1	Introduction	75
4.2	Existence et unicité de la solution	76
4.3	Résultats principaux	78
4.4	Longueur critique	81
4.5	Extinction en temps fini	85
5	Phénomène d'extinction pour une équation semi-linéaire de réaction-diffusion-convection	89
5.1	Introduction	89
5.2	Propriétés de la solution	90
5.3	Longueur critique	91
5.4	Extinction en temps fini de la solution	93
5.5	Commentaire	100

Bibliographie 105

المخلص

الهدف من هذه المذكرة تبيان أن تحت بعض الشروط، تنطفئ حلول مسائل حدية في زمن محدود.

في هذه المذكرة نبدا بدراسة وجود ووحداية حلول المسائل الحدية. ثم نتناول أنواعا عديدة من المعادلات يظهر الانطفاء في حلولها. وأول معادلة هي $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$ التي درسها كوارادا *Kawarada* عام ١٩٧٥ وعرف من خلالها مفهوم الانطفاء، ومنذ تلك السنة نشر أزيد من ٤٠٠ عمل في المجالات العلمية حول هذا الموضوع الذي أهتم به عدد كبير من الباحثين ولازال هذا الاهتمام متواصلا.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier la notion d'extinction ("quenching", en anglais) introduite en 1975 par Kawarada. Pour cela, nous examinons quelques travaux où il est question de l'extinction des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires.

Ainsi, nous avons présenté les détails de quatre articles parus entre 1975 et 2015 tout en commentant d'autres papiers.

Notre point de départ est le travail de Kawarada concernant le problème

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, l[, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, t > 0, \\ u(0, x) = 0, x \in]0, l[\end{cases}$$

qui a donné naissance à cette notion.

Abstract

The aim of this thesis is to show that under certain sufficient conditions, the solutions of some initial-boundary problems quench in a finite time. In the beginning, we present some results about the existence and uniqueness of the solutions of semilinear parabolic equations.

Kawarada (1975) has introduced the quenching concept which generalizes the concept of blowing-up. Some sufficient conditions for quenching of the solutions have been found.

After 1975, more than 400 papers were published on this new concept. Some authors have studied semilinear and quasilinear equations different from those presented by Kawarada. Some others were interested in the properties of the solutions.

This work gives the details of few papers about the quenching phenomena. On the other hand, the reader can find some comments at the end of the chapters.
