République Algerienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure Kouba - Alger
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée par

Boussad HAMOUR

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Option : **Analyse Fonctionnelle**

Existence de solutions pour certains problèmes elliptiques et paraboliques à croissance quadratique dans un domaine borné ou non

Soutenue le **18 Avril 2016**

Devant le jury composé par :

M. Y. Atik	Professeur à l'E.N.S. Kouba	Président
M. B. Abdellaoui	Professeur à l'Université de Tlemcen	Examinateur
M. A. Mokrane	Professeur à l'E.N.S. Kouba	Directeur de Thèse
M. M.S. Moulay	Professeur à l'U.S.T.H.B. Alger	Examinateur
M. F. Murat	Professeur à l'U.P.M.C. Paris 6	Invité

Table des matières

ملخص الأطروحة تحت عنوان

وجود حلول لبعض المسائل الناقصية والتكافؤية ذات تزايد تربيعي على مساحة محدودة أو غير محدودة.

تتكوّن هذه الأطروحة المتكونة من جزئين

1 **الجزء الاول:** نسعى في هذا الجزء إلى دراسة وجود حلول للمسألة الناقصية التالية :

$$
(1) \qquad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \\ -\mathrm{div}\,(A(x)Du) = H(x,u,Du) + f(x) + a_0(x)\,u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}
$$

حيث Ω مفتوح محدود من $\mathbb{R}^N$ ، $N \geq 3$ ، $A(x)$ مصفوفة ذات حدود فى $L^\infty(\Omega)$ و قسرى، $H(x,s,\xi)$ عبارة عن تابع لكاراتيودورى و يحقق من أجل $\gamma > 0$:

$$
-c_0\,A(x)\,\xi\xi \leq H(x,s,\xi)\,\mathrm{sign}(s) \leq \gamma\,A(x)\,\xi\xi \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,
$$

و $f \in L^{N/2}(\Omega)$ ، $a_0 \geq 0$ ينتمى إلى $L^q(\Omega)$ $(q > N/2)$.
من أجل f و a_0 صغيرين بما فيه الكفاية. نبرهن على أنّه يوجد على الأقل حل لـ (1) بحيث $e^{\delta_0|u|} - 1$ ينتمى إلى $H_0^1(\Omega)$ من أجل $\gamma \leq \delta_0$ و يحقق تقديرا مسبقا فى $H_0^1(\Omega)$.

2 **الجزء الثانى :** نسعى هنا إلى دراسة وجود حلول لجملة من معادلات مكافئة غير خطية

$$
(2) \qquad \begin{cases} u_t^\gamma - \mathrm{div}\,(a^\gamma(t,x,u)Du^\gamma) + f^\gamma(t,x,u,Du) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q), \quad 1 \leq \gamma \leq m, \\ \\ u^\gamma = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ u^\gamma(0,x) = u_0^\gamma(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}
$$

حيث T حقيقى موجب، Ω مفتوح غير محدود من $\mathbb{R}^N$ و نرمز بـ $\partial\Omega$ حافة لـ Ω و $Q = (0,T) \times \Omega$ ، $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ و $u_t^\gamma = \dfrac{\partial u^\gamma}{\partial t}$ ، و من أجل $1 \leq \gamma \leq m$ ، التوابع $u^\gamma : Q \to \mathbb{R}$ عبارة عن مركبات لـ u ، و $a^\gamma(t,x,s)$ مصفوفة قسرية عناصرها فى $L^\infty(\Omega)$ وهي عبارة عن توابع لكاراتيودورى $f^\gamma : Q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times N} \to \mathbb{R}$ توابع لكاراتيودورى تحقق الخاصية لكاراتيودورى،

$$
|f^\gamma(t,x,s,\Xi)| \leq b(|s|)(\rho(t,x) + |\Xi|^2).
$$

نفترض أنه يوجد حل تحتي و حل فوقي، عندئذ تحت شرط نظيم L^∞ صغر، لدينا تقدير في $(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q))^m$ ووجود حل لـ (2) .

الكالمات المفتاحة : وجود حلول، جملة مكافئاة، شبه خطى، ساحة غير محدودة

Résumé

Cette thèse est constituée de deux parties indépendantes.

A : La première partie est consacrée à l'étude du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ -\mathrm{div}\,(A(x)Du) = H(x,u,Du) + f(x) + a_0(x)\,u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{0.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $A(x)$ est une matrice coercive à coefficients $L^\infty(\Omega)$, Du dénote le gradient de u, $H(x,s,\xi)$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait pour un certain $\gamma > 0$

$$-c_0\, A(x)\,\xi\xi \leq H(x,s,\xi)\,\mathrm{sign}(s) \leq \gamma\, A(x)\,\xi\xi \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

f appartient à $L^{N/2}(\Omega)$ et $a_0 \geq 0$ appartient à $L^q(\Omega)$, $q > N/2$. Pour f et a_0 suffisamment petits, nous démontrons qu'il existe au moins une solution u de (0.1) qui est telle que $e^{\delta_0|u|} - 1$ appartienne à $H_0^1(\Omega)$ pour un certain $\delta_0 \geq \gamma$ et qui satisfait une estimation a priori dans cet espace.

Mots clés : Existence, problème quasi-linéaire, perturbation à croissance quadratique en gradient, terme d'ordre zéro non coercif.

B : Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions le système parabolique suivant

$$\begin{cases} u_t^\gamma - \mathrm{div}\,(a^\gamma(t,x,u)Du^\gamma) + f^\gamma(t,x,u,Du) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q), \\ u^\gamma = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ u^\gamma(0,x) = u_0^\gamma(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad u_0^\gamma \in C_0^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{0.2}$$

où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ non nécessairement borné dont le bord est noté $\partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$ avec T est un réel positif et $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$.

Les fonctions $u^\gamma(1 \leq \gamma \leq m) : Q \to \mathbb{R}$ sont les composantes du vecteur inconnu $u = (u^1, \ldots, u^m)$; la matrice $a^\gamma(t,x,s)$ $(1 \leq \gamma \leq m)$ est supposée coercive avec des coefficients qui sont des fonctions bornées et de Carathéodory, .

Chaque fonction $f^\gamma : Q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times N} \to \mathbb{R}$ $(1 \leq \gamma \leq m)$ est une fonction de Carathéodory vérifiant la condition de croissance.

$$|f^\gamma(t,x,s,\Xi)| \leq b(|s|)(\rho(t,x) + |\Xi|^2), \quad 1 \leq \gamma \leq m,$$

où la fonction b est continue et croissante et où ρ appartient à $L^1(Q) \cap L^\infty(Q)$. En supposant l'existence d'une sous- et d'une sur-solution, on obtient, sous une condition de petitesse, une estimation a priori de la solution u dans $(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q))^m$ et ensuite l'existence de solution pour le système (0.2).

Mots clés : Existence, système parabolique, quasi-linéaire, domaine non borné.

Abstract

This thesis consists of two parts.

In the first part, we consider the following problem

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ -\mathrm{div}\,(A(x)Du) = H(x,u,Du) + f(x) + a_0(x)\,u \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{0.3}$$

where Ω is an open bounded set of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $A(x)$ is a coercive matrix with coefficients in $L^\infty(\Omega)$, Du denotes a gradient of u, $H(x,s,\xi)$ is a Carathéodory function which satisfies for some $\gamma > 0$

$$-c_0\, A(x)\,\xi\xi \leq H(x,s,\xi)\,\mathrm{sign}(s) \leq \gamma\, A(x)\,\xi\xi \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

f belongs to $L^{N/2}(\Omega)$, and $a_0 \geq 0$ belongs to $L^q(\Omega)$, $q > N/2$.

For f and a_0 sufficiently small, we prove the existence of at least one solution u of (0.3) which is such that $e^{\delta_0|u|} - 1$ belongs to $H_0^1(\Omega)$ for some $\delta_0 \geq \gamma$ and which satisfies an a priori estimate in this space.

Key words : Existence, quasilinear problems, perturbation with quadratic growth in the gradient, noncoecive zeroth order term.

In the second part, we consider the following system

$$\begin{cases} u_t^\gamma - \mathrm{div}\,(a^\gamma(t,x,u)Du^\gamma) + f^\gamma(t,x,u,Du) = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(Q), \\ u^\gamma = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ u^\gamma(0,x) = u_0^\gamma(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u_0^\gamma \in C_0^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{0.4}$$

for $1 \leq \gamma \leq m$, $m \geq 1$ is an integer, Ω is an open of $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, possibly of infinite measure, with boundary $\partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$ with T is a positive real number, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$.

The functions u^γ $(1 \leq \gamma \leq m) : Q \to \mathbb{R}$ are the components of the unknown vector $u = (u^1, \ldots, u^m)$; the matrices $a^\gamma(t,x,s)$ $(1 \leq \gamma \leq m)$ are assumed to be coercive and bounded, and are Carathéodory funtions.

Each function $f^\gamma : Q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times N} \to \mathbb{R}$ $(1 \leq \gamma \leq m)$ is Carathéodory function satisfying the growth condition.

$$|f^\gamma(t,x,s,\Xi)| \leq b(|s|)(\rho(t,x) + |\Xi|^2), \quad 1 \leq \gamma \leq m,$$

where the function b is continuous and non decreasing increasing and where the function $\rho \geq 0$ belongs to $L^1(Q) \cap L^\infty(Q)$.

Assuming the existence of a sub- and of super-solution, we obtain an $(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q))^m$ a priori estimate and the existence of a solution to the system (0.4).

Key words : Existence, parabolic system, quasilinear, unbounded domain.