République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Normale Supérieure
ENS-Kouba-Alger

MEMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Algèbre et Théorie des nombres**

Présenté par

ELHADRA TOUFIK

Le Théorème De Mertens Dans Les Progressions Arithmétiques

Soutenu le …/…../2015

Devant jury

- BENAYAT Djilali, Professeur, ENSKA, ………………………………………… Président
- MOUSSAOUI Mohand Arezki, Professeur, ENSKA, ……………………… Examinateur
- HERNANE Mohand, Professeur, USTHB, ………………………………… Examinateur
- BAYAD Abdelmejid, Professeur, Université d'Evry Val d'Essonne, Paris, … Examinateur
- DERBAL Abdallah, Professeur, ENSKA,………………………….. Directeur de Mémoire

Table des matières

Notation

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels positifs
2. $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs,

$$\mathbb{Z}^* = \{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}, \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}, \mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z}, n \leq 0\}$$

3. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels,
4. $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels,
5. $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
6. La lettre p désigne toujours un nombre premier.
7. Pour deux entiers $n > 0$ et $m > 0$ on utilise les notations

   . $m \mid n$ signifie m divise n

   . $m \nmid n$ signifie m ne divise pas n .
8. Si $g(x)$ et $f(x)$ deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} , alors

$$f(x) \overset{V_{x_0}}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right) \text{ signifie } (\exists M > 0) \text{ tel que } \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \ (\forall x \in V_{x_0})$$

$$f(x) \overset{V_{x_0}}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right) \text{ signifie } \lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$$

$$f(x) \overset{V_{x_0}}{\sim} g(x) \text{ signifie } \lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 1.$$

9. Si $x_0 = \pm\infty$, on peut poser $f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right), f(x) = \mathrm{o}\left(g(x)\right), f(x) \sim g(x)$
10. Les deux symboles $\sum\limits_{p \leq x}$ et $\prod\limits_{p \leq x}$ représentent une somme et un produit étendus à tous les nombres premiers $p \in [2,\ x]$. De plus

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{p \leq x} = \sum_{p} \text{ la somme étendue à tous les nombres premiers}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \prod_{p \leq x} = \prod_{p} \text{ le produit étendu à tous les nombres premiers}$$

11. Pour tout nombre réel x, on a $[x]$ désigne la partie entière de x qui est l'unique nombre entier k vérifiant $x - 1 < k \leq x$ et $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x.

$$\{x\} = x - [x]$$

12. φ la fonction d'Euler, $\varphi(k) = card\,\{n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq k \text{ et } (n,k) = 1\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

13. La constante d'Euler est le nombre γ défini par

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0.577215663\cdots$$

.

Résumé

Soit k un nombre entier non nul, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leq l \leq k$ et $(k,l) = 1$, on considère la fonction $P_{(k,l)}(x)$ telle que

$$P_{(k,l)}(x) = \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right), (x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 2)$$

Notre objectif est la démonstration du théorème suivant

$$P_{(k,l)}(x) = a_{(k,l)} \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{\varphi(k)}}} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{\varphi(k)}+1}}\right).$$

Le symbole φ désigne la fonction d'Euler, et $a_{(k,l)}$ est une constante réelle strictement positive dépendant de k et l donnée par l'expression

$$a_{(k,l)} = \left(e^{-\gamma} \frac{k}{\varphi(k)} \prod_{\chi \neq \chi_0} \left(\frac{K(1,\chi)}{L(1,\chi)}\right)^{\overline{\chi}(l)}\right)^{\frac{1}{\varphi(k)}}$$

dans laquelle γ est la constante d'Euler. Le produit $\prod_{\chi \neq \chi_0} \left(\frac{K(1,\chi)}{L(1,\chi)}\right)^{\overline{\chi}(l)}$ est étendu à tous les caractères non principaux modulo k, et $L(1,\chi)$, $K(1,\chi)$ sont séries de Dirichlet. attachée aux caractère χ.

ملخص

ليكن k عددا طبيعيا غير معدوم، من أجل أي قيمة للعدد الطبيعي l بحيث $1 \leq l \leq k$ و $(k,l) = 1$.
نعتبر الدّالة المعرّفة من أجل $x \in \mathbb{R}$ مع $x \geq 2$ كمايلي

$$P_{(k,l)}(x) = \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

هدفنا في هذه المذكرة هو إثبات النظرية التالية

$$P_{(k,l)}(x) = a_{(k,l)} \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{\varphi(k)}}} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{\varphi(k)}+1}}\right).$$

مع φ دّالة أولر، والثابت $a_{(k,l)}$ هو ثابت متعلق بالمتغيرين k و l معرّف بالعبارة التالية

$$a_{(k,l)} = \left(e^{-\gamma} \frac{k}{\varphi(k)} \prod_{\chi \neq \chi_0} \left(\frac{K(1,\chi)}{L(1,\chi)}\right)^{\overline{\chi}(l)}\right)^{\frac{1}{\varphi(k)}}$$

مع γ ثابت أولر. الضرب $\prod_{\chi \neq \chi_0} \left(\frac{K(1,\chi)}{L(1,\chi)}\right)$ يشمل جميع الميزات ديريكلي بترديد k ما عدا الميزة الرئيسية χ_0 . أما $L(s,\chi)$ و $K(s,\chi)$ هما دالتي ديريكلي وهما معرفتين جيدا في المذكرة.