RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba Alger

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Spécialité : **Mathématiques**

OPTION : **ANALYSE FONCTIONNELLE**

Présenté par : **ADJEMI SALIM**

Encadrement par : **Dr. Fares MOKHTARI**

Intitulé :

Équations elliptiques anisotropes dans $\mathbb{R}^N$ avec donnée localement intégrable

Soutenu publiquement le : 04/ 02/2016 à 15 :00 h

à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de :

Y. Atik	Professeur	E.N.S-Kouba	Président
A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Examinateur
H. Ouazar	M.C.A	E.N.S-Kouba	Examinateur
F. Mokhtari	M.C.A	E.N.S-Kouba	Promoteur

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$\mathbb{R}^N$ espace euclidien réel N-dimensionnel.

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$ frontière de Ω.

p_i un nombre réel supérieur ou égal à 1 pour tout $i = 1, \ldots, N$.

$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$.

$p_- = \min\{p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N\}$.

$p_+ = \max\{p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N\}$.

p'_i conjugué de p_i, i.e. $\dfrac{1}{p_i} + \dfrac{1}{p'_i} = 1$.

$\hookrightarrow\hookrightarrow$ injection compact.

$\overline{p}$ la moyenne harmonique de p_i, i.e. $\dfrac{1}{\overline{p}} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{1}{P_i}$.

$\overline{q}^* = \dfrac{N\overline{q}}{N - \overline{q}}$.

p.p. presque partout.

$|E|$ mesure de l'ensemble E, lorsque sa mesure de Lebesgue est finie.

$\text{supp}(f)$ support de la fonction f.

K_{Comp} K compacte.

$\mathcal{M}(\Omega)$ ensemble des mesures de Radon bornées sur Ω.

$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

$Du = (D_1 u, D_2 u, \ldots, D_N u)$.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = \text{grad } u$.

$\text{div}(v) = \sum_{i=1}^{N} D_i v_i$, $v = (v_1, \ldots, v_N)$.

χ_E fonction caractéristique de l'ensemble E.

$$S_\nu(\sigma)=\begin{cases}\text{sign}(\sigma), & \text{si} \quad |\sigma|>\nu\\ \dfrac{\sigma}{\nu}, & \text{si} \quad |\sigma|\leq \nu.\end{cases}$$

$$\forall \sigma\in\mathbb{R}, \text{sign}(\sigma)=\begin{cases}1, & \text{si} \quad \sigma>0\\ 0, & \text{si} \quad \sigma=0\\ -1, & \text{si} \quad \sigma<0.\end{cases}$$

T_k la troncature à la hauteur k définie par $T_k(t)=\begin{cases}t, & \text{si} \quad |t|\leq k\\ \dfrac{kt}{|t|}, & \text{si} \quad |t|>k.\end{cases}$

Y' dual topologique de l'espace vectoriel topologique Y.

$\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions tests (l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$).

$$L^p(\Omega)=\left\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R} \quad \text{mesurable}; \int_\Omega |u|^p<\infty\right\} \text{ muni de la norme } \| u \|_p=\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$L^\infty(\Omega)=\left\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}, \text{mesurable}; \ \sup_\Omega \text{ess}\,|u|<\infty\right\} \text{ muni de la norme } \| u \|_\infty=\sup_\Omega \text{ess}\,|u|.$$

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega);\ \nabla u\in L^p(\Omega)\right\} \text{ muni de la norme } \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\|u\|_{L^p(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

$$W_0^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega); \nabla u\in (L^p(\Omega))^N \quad \text{et} \quad u=0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

$$L^{\vec{p}}(\Omega)=L^{p_1}(\Omega)\times L^{p_2}(\Omega)\times\ldots\times L^{p_N}(\Omega)=\prod_{i=1}^N L^{p_i}(\Omega), \text{ avec } p_i>1.$$

$$X^{1,\vec{p}}(\Omega)=\left\{v\in L^{p_+}(\Omega) \text{ telle que } \quad Dv\in L^{\vec{p}}(\Omega)\right\} \text{ muni de la norme } \|v\|_{X^{1,\vec{p}}(\Omega)}=\sum_{i=1}^N(\|v\|_{L^{p_i}}+\|D_iv\|_{L^{p_i}}).$$

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}=X_0^{1,\vec{p}}(\Omega)=\left\{v\in X^{1,\vec{p}}(\Omega) \quad \text{telle que} \quad v=0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}\subseteq W_0^{1,\vec{p}}(\Omega).$$

$$W_{x_i,0}^{1,p_i}(\Omega)=\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_i} \text{ avec } \|u\|_i=\|u\|_{L^{p_i}(\Omega)}+\|D_iu\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

$$W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)=\left\{u\in L^{p_i}(\Omega) \quad \text{et} \quad \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\in L^{p_i}(\Omega) \quad \text{avec} \quad u=0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad \forall i=1,\ldots,N\right\}.$$

$$W_{\text{loc}}^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)=\left\{u:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \int_K |u|^{p_i}<+\infty \text{ et } \int_K |D_iu|^{p_i}<+\infty, \forall i \text{ et } K_{\text{Comp}}\subset\mathbb{R}^N\right\}.$$

Abstract

In this paper we prove the existence and regularity of solutions distributional in an appropriate function space for the equations elliptic nonlinear anisotropic. Our research is based on the following example :

$$-\mathrm{div}A(x, \nabla u) - \mathrm{div}g(x, u) + h(x, u) = f(x), \text{ dans } \quad \mathbb{R}^N,$$

where the $p_i, \ i = 1, \ldots, N$ verifies

$$\begin{cases} \overline{p} < N, \, \dfrac{1}{\overline{p}} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{1}{p_i}, \\ p_i > 1 \quad \text{and} \quad \dfrac{\overline{p}(N-1)}{N(\overline{p}-1)} < p_i < \dfrac{\overline{p}(N-1)}{N-\overline{p}}, \, i \ = 1, \, \ldots, \, N, \\ s > p_i, \, i \ = 1, \, \ldots, \, N. \end{cases}$$

We prove that the solution u has regularity

$$u \in \bigcap_{i=1}^{n} W^{1,q_i}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N), \, 1 \le q_i < \frac{N(\overline{p}-1)}{\overline{p}(N-1)} p_i$$

ملخص

هذا العمل يهدف أساسا إلى دراسة الوجود وصقالة للحلول الضعيفة في فضاء تابعي متعلق بمعادلات ناقصية غير خطية وغير متجانسة.

ويعتمد بحثنا على المثال الأساسي التالي :

$$-\mathrm{div}A(x,\nabla u)-\mathrm{div}g(x,u)+h(x,u)=f(x),\mathrm{dans}\quad \mathbb{R}^N,$$

حيث $p_i, i=1,....,N$ تحقق الجملة :

$$\begin{cases} \overline{p}<N,\ \frac{1}{\overline{p}}=\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i},\\ p_i>1 \quad \mathrm{et} \quad \frac{\overline{p}(N-1)}{N(\overline{p}-1)}<p_i<\frac{\overline{p}(N-1)}{N-\overline{p}},\ i\ =1,\ldots,N,\\ s>p_i,\ i\ =1,\ldots,N.\end{cases}$$

المستوحى أساسا من المقال [٥] المنشور سنة 2005 من طرف الأستاذ م. بن دحمان (M. Bendahmane) والإعتماد على المقالة [٢٢] المنشورة سنة 2013 من طرف الدكتور فارس مختاري (F. Mokhtari) والكتاب [٩].

وهذا حتى يصبح العمل يراعى فيه الطرح المنهجي والمفصل للبراهين من أجل جعلها أكثر وضوحا لجمهور أوسع التي تجعل الحل u يملك صقالة

$$u\in\bigcap_{i=1}^{N}W^{1,q_i}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N),\ 1\leq q_i<\frac{N(\overline{p}-1)}{\overline{p}(N-1)}p_i.$$

Résumé

Dans ce mémoire nous prouvons l'existence et la régularité des solutions distributionnelles dans un espace de fonction approprié pour des équations elliptiques anisotropes non linéaires.
Considérons l'équation suivante :

$$-\mathrm{div}A(x,\,\nabla u)-\mathrm{div}g(x,\,u)+h(x,\,u)=f(x),\;\;\text{dans}\quad\mathbb{R}^N,$$

ou' les $p_i, i=1,\ldots,N$ vérifier

$$\begin{cases}\overline{p}<N,\;\frac{1}{\overline{p}}=\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i},\\ p_i>1\quad\text{et}\quad\frac{\overline{p}(N-1)}{N(\overline{p}-1)}<p_i<\frac{\overline{p}(N-1)}{N-\overline{p}},\;i\;=1,\,\ldots,\,N,\\ s>p_i,\;i\;=1,\,\ldots,\,N.\end{cases}$$

Nous prouvons que la solution u possède la régularité

$$u\in\bigcap_{i=1}^{N}W^{1,q_i}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N),\;1\leq q_i<\frac{N(\overline{p}-1)}{\overline{p}(N-1)}p_i$$