RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba (Alger)

Département de Mathématiques

Thèse

pour l'obtention du grade de

Docteur en sciences

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **EDO**

Présentée par

Ouidad Frites

Intitulée

Etude de certaines classes d'inégalités variationnelles

Thèse dirigée par **Toufik Moussaoui**

Soutenu le 10/03/2016

Devant la commission d'examen

H. OUAZAR, ENS-Kouba,	MC(A),	Président
A. BENMEZAI, U.S.T.H.B.,	Professeur,	Examinateur
O. SAIFI, Alger 3,	MC(A),	Examinatrice
F. MOKHTARI, Alger 1,	MC(A),	Examinateur
T. MOUSSAOUI, ENS-Kouba,	Professeur,	Encadreur

CONTENTS

Notations **1**

0 Introduction **3**

1 Preliminaries **8**

1.1 Operators and functionals on Banach spaces 9

1.1.1 Banach spaces, dual spaces 9

1.1.2 Continuity of operators 11

1.2 L^p Spaces 13

1.2.1 Some results about integration 14

1.2.2 Definitions and properties of L^p spaces 14

1.3 Lower and upper semi-continuity 15

1.4 Sobolev spaces, embedding theorems 16

1.4.1 The Sobolev space $W^{1,p}(I)$ 16

1.4.2 The Sobolev space $W^{m,p}(I)$ 18

1.4.3 Embedding theorems 19

1.5 Convex Functions 19

1.5.1 Definitions and properties 19
1.5.2 Subdifferential of convex functionals 21
1.6 Szulkin-type functionals 28
1.6.1 Definitions and properties 28
1.6.2 Existence of deformations 32
1.6.3 Mountain Pass Theorem 36
1.7 Ricceri's variational result 39

2 Existence of positive solutions for a variational inequality of Kirchhoff type [11] 40
2.1 Szulkin-type functionals 41
2.2 Main results 43
2.3 Proof of theorem 2.2.1 44
2.4 Proof of theorem 2.2.2 47

3 On the existence of positive solutions for a variational inequality of Kirchhoff type on the half-line [12] 51
3.1 Preliminaries 52
3.2 Main results 53

4 Existence of solutions via variational methods for a problem with nonlinear boundary conditions on the half-line [13] 63
4.1 Preliminaries 65
4.2 Main results 69
4.3 Proof of Theorem 4.2.1 73
4.4 Proof of Theorem 4.2.2 74

Conclusion 77

References 78

NOTATIONS

General notations

$\overline{\mathbb{R}}$	$= \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
$\to$	simple convergence.
$\rightharpoonup$	weak convergence.
$B_\rho(u_0)$	open ball of radius ρ centered at u_0.
$\partial B_\rho(u_0)$	the boundary of $B_\rho(u_0)$.
B_ρ	open ball of radius ρ centered at 0.
$B(X,Y)$	the class of all bounded, linear mappings from X into Y.
X^*	dual of X.
X^{**}	bidual of X.
$\langle .,. \rangle$	scalar product in the duality X^*, X.
$\mathrm{supp}(\varphi)$	support of the function φ.
$\mathrm{dom}(\varphi)$	domain of the function φ.
$\mathrm{epi}(\varphi)$	epigraph of the function φ.
$int(A)$	interior of a set A.
$a.e.$	almost everywhere. .

i_C	indicator function of C.
$\partial\varphi(u_0)$	subdifferential of φ at u_0.
$\varphi'(u_0;h)$	directional derivative of φ at u_0 in the direction h.
$\psi'_-(x_0)$	$= \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0}$.
$\psi'_+(x_0)$	$= \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0}$.

Function spaces

I	open interval in $\mathbb{R}$.
$L^1(I)$	space of integrable functions on I.
$L^p(I)$	$= \{f : I \longrightarrow \mathbb{R};$ is mesurable and $(\int_I \vert f(x)\vert^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}, 1 \leq p < \infty$.
$\vert\cdot\vert_p$	$= [\int_I \vert f(x)\vert^p dx]^{\frac{1}{p}}$.
$L^\infty(I)$	$= \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ is measurable and there is a constant } C \\ \text{such that } \vert f(x)\vert \leq C \text{ a.e. on } I \end{array} \right\}$.
$L^1_{loc}(I)$	space of locally integrable functions on I.
$C(I,\mathbb{R})$	space of continuous functions from I to $\mathbb{R}$.
$C_l(I,\mathbb{R})$	$= \{u \in C(I,\mathbb{R}) \quad : \quad \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$ exists $\}$.
$C^1(I)$	space of continuously differentiable functions on I.
$C^1_c(I)$	space of continuously differentiable functions with compact support in I.
$W^{1,p}(I)$	$= \{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I)$ such that $\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi,\ \forall\varphi \in C^1_c(I)\}$.
$H^1(I)$	$= W^{1,2}(I)$.

RÉSUMÉ

Dans cette thése, nous avons étudié des inégalités variationnelles qui sont définies sur des domaines bornés et non bornés en utilisant la théorie des points critiques non régulière qui est due à Szulkin.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques outils d'analyse fonctionnelle qui sont utilisés. Dans le second chapitre nous avons présenté quelques résultats d'existence de solutions pour une inégalité variationnelle de type Kirchhoff qui sont définies sur un intervalle borné $(0, 1)$ en utilisant la théorie des points critiques non régulière due à Szulkin.

Dans le chapitre trois, nous avons présenté l'existence de solutions positives pour une inégalité de type Kirchhoff posée sur la demi-droite réelle.

Dans le dernier chapitre, nous avons donné l'existence de solution pour un problème avec des conditions non linéaires sur la demi-droite par des méthodes variationnelles

ملخص

في هذه الأطروحة قمنا بدراسة بعض المتباينات التغايرية المعرفة على مجال محدود أو غير محدود وذلك باستعمال النظريات الغير نظامية للنقطة الحرجة و التفاضلية السفلية للتوابع المحدبة.

لقد قمنا بتقسيم هذا العمل إلى خمسة فصول، في الفصل الأول قدمنا بعض أدوات التحليل التابعي التي قمنا باستعمالها في أطروحتنا، كما أدرجنا كل من مفهوم التفاضلية السفلية للتوابع المحدبة و التابعيات من نوع Szulkin.

في الفصل الثاني والثالث عرضنا بعض نتائج وجود الحل لبعض المتباينات التغايرية المعرفة على مجال محدود (0,1) و نصف مستقيم (0,+∞) باستعمال النظريات الغير نظامية للنقطة الحرجة.

في الفصل الرابع والأخير قمنا بتقديم نتائج وجود الحل لمسألة مع شروط حدية غير خطية معرفة على نصف مستقيم باستعمال الطرق التغايرية.